PCSI

Nicolas Nguyen
Mathieu Fontes
Walter Damin
Christophe Jan

PRÉPAS SCIENCES

COLLECTION DIRIGÉE PAR **BERTRAND HAUCHECORNE**

MATHS

5e édition

NOUVEAUX PROGRAMMES !

- Objectifs
- Cours résumé
- Méthodes
- Vrai/faux, erreurs classiques
- Exercices de base et d'approfondissement
- Sujets de concours (écrits, oraux)
- Corrigés détaillés et commentés

ellipses

PRÉPAS SCIENCES
collection dirigée par Bertrand Hauchecorne

Mathématiques PCSI

5e édition

NOUVEAUX PROGRAMMES !

ouvrage coordonné par

Nicolas NGUYEN
Professeur au lycée François Rabelais (Saint-Brieuc)

Mathieu FONTES
Professeur au lycée Louis Barthou (Pau)

Walter DAMIN
Professeur au lycée Arnaut Daniel (Ribérac)

Christophe JAN
Professeur au lycée du Parc (Lyon)

ellipses

Avant-propos

Réussir en classes préparatoires nécessite d'assimiler rapidement un grand nombre de connaissances, mais surtout de savoir les utiliser, à bon escient, et les rendre opérationnelles au moment opportun. Bien sûr, l'apprentissage du cours de votre professeur jour après jour est indispensable. Cependant, on constate que pour beaucoup, c'est loin d'être suffisant. Combien d'entre vous ont bien appris leur cours et pourtant se trouvent démunis lors d'un DS, et plus grave, le jour du concours.

Cette collection a été conçue pour répondre à cette difficulté. Suivant scrupuleusement le programme, chaque ouvrage est scindé en chapitres, dont chacun correspond, en gros, à une semaine de cours. Leur structure est identique pour chaque niveau, en mathématiques comme en physique ou chimie.

Le résumé de cours est là pour vous remettre en mémoire tous les résultats à connaître. Sa relecture est indispensable avant un DS, le passage d'une colle relative au thème traité et lors des révisions précédant les concours. Ils sont énoncés sans démonstration.

La partie « méthodes » vous initie aux techniques utiles pour résoudre les exercices classiques. Complément indispensable du cours, elle l'éclaire et l'illustre.

La partie « vrai/faux » vous permet de tester votre recul par rapport au programme et de remédier à quelques mauvais réflexes. Son corrigé est l'occasion de mettre en garde contre des **erreurs classiques**.

Les exercices sont incontournables pour assimiler le programme et pour répondre aux exigences du concours. Des **indications**, que les meilleurs pourront ignorer, permettront de répondre aux besoins de chacun, selon son niveau. Les **corrigés** sont rédigés avec soin et de manière exhaustive.

Ainsi l'ouvrage de maths comme ceux de physique et de chimie vous accompagneront tout au long de l'année et vous guideront dans votre cheminement vers **la réussite aux concours**.

Bertrand Hauchecorne

Sommaire

Premier semestre

1. Logique et raisonnements 3
2. Ensembles et applications 31
3. Calcul algébrique et trigonométrique 61
4. Nombres complexes 101
5. Systèmes linéaires 133
6. Techniques fondamentales pour l'étude des fonctions 157
7. Fonctions usuelles 187
8. Primitives et équations différentielles 221
9. Suites numériques 255
10. Limite et continuité des fonctions 285
11. Dérivabilité 315
12. Calcul matriciel 345
13. Polynômes et fractions rationnelles 377

Deuxième semestre

14. Analyse asymptotique 413
15. Espaces vectoriels et applications linéaires 447
16. Espaces vectoriels de dimension finie 475
17. Matrices 503
18. Déterminants 535
19. Intégration 563
20. Dénombrement 591
21. Probabilités sur un univers fini 617

22. Variables aléatoires, espérance, variance 649
23. Espaces préhilbertiens réels 685
24. Séries numériques 711
25. Fonctions de deux variables 745

Annexes

26. Formulaire 777
27. Index des notations 783
28. Index 785

Premier semestre

Chapitre 1

Logique et raisonnements

UN MATHÉMATICIEN

Né dans une famille de commerçants, **George Boole** est un parfait autodidacte. Il apprend seul le latin et le grec et lit avec passion les textes de grands mathématiciens tels Joseph Lagrange et Pierre-Simon Laplace. Dans sa principale publication, *An investigation into the Laws of Thought*, publié en 1854, il innove en fondant sur des bases mathématiques le raisonnement logique, jusque-là considéré comme une branche de la philosophie.

Un peu d'histoire

On considère les Grecs anciens comme les fondateurs des mathématiques car les premiers, ils ont eu le souci de justifier leurs résultats par des démonstrations. Des philosophes comme Aristote ou les Stoïciens ont même réfléchi à la notion de raisonnement.

Au milieu du XIXe, les mathématiciens anglais George Boole et Augustus De Morgan s'intéressent au raisonnement logique en tant que tel. Le premier définit des opérations logiques telles la négation d'une proposition, la conjonction ou la disjonction de deux d'entre elles. Le second, s'inspirant d'Aristote, introduit la notion de quantificateur.

Au tournant du XXe siècle, des mathématiciens comme Giuseppe Peano ou Bertrand Russell utilisent le langage de la théorie des ensembles pour fonder le raisonnement mathématique sur des bases solides.

Objectifs

les incontournables

- Manipuler les quantificateurs.
- Raisonner par implication ou par équivalence.
- Utiliser un raisonnement par l'absurde ou par contraposition.
- Effectuer un raisonnement par récurrence simple ou double.

et plus si affinités

- Appliquer une récurrence forte.
- Raisonner par analyse-synthèse.

Résumé de cours

Rudiments de logique

Connecteurs logiques

Définition : *Une* ***proposition*** *(ou assertion) est un énoncé mathématique qui peut prendre deux valeurs : vrai (V) ou faux (F).*

Définition : *Soit P et Q deux propositions.*
La ***négation*** *de P est la proposition, notée* **non P**, *définie par :*

- *non P est vraie lorsque P est fausse ;*
- *non P est fausse lorsque P est vraie.*

La ***conjonction*** *de P et de Q est la proposition, notée* **P et Q**, *définie de la manière suivante :*

- *P et Q est vraie lorsque P et Q sont vraies ;*
- *P et Q est fausse lorsque l'une au moins des deux propositions est fausse.*

La ***disjonction*** *de P et de Q est la proposition, notée* **P ou Q**, *définie de la manière suivante :*

- *P ou Q est vraie lorsque l'une au moins des deux propositions est vraie ;*
- *P ou Q est fausse lorsque P et Q sont fausses.*

Définition : *Soit P et Q deux propositions.*
*L'****implication*** *P entraîne Q est la proposition, notée* **$P \Rightarrow Q$** *définie par non P ou Q.*
*L'****équivalence*** *de P et de Q est la proposition, notée* **$P \iff Q$**, *définie par la conjonction $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$.*

Vocabulaire : *La proposition $P \Rightarrow Q$ se lit « P implique Q » ou encore « **si P alors Q** ». La proposition $P \Leftrightarrow Q$ se lit également « **P si et seulement si Q** ».*

Remarques :

- Lorsque $P \Rightarrow Q$ est vraie, on dit que P est une **condition suffisante** pour avoir Q, ou que Q est une **condition nécessaire** pour avoir P.
- Lorsque $P \iff Q$ est vraie, P est une **condition nécessaire et suffisante** pour avoir Q. Ainsi, les équivalences sont les conditions nécessaires et suffisantes.

Table de vérité des connecteurs logiques

P	Q	*non* P	P *et* Q	P *ou* Q	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

Remarque : d'après cette table de vérité, si P et $P \Rightarrow Q$ sont vraies alors Q est vraie. C'est le **principe de déduction**.

Règles de calcul

Proposition 1.1.— Règles de calcul pour la conjonction, la disjonction —. Soit P, Q et R trois assertions. Alors

- $P \text{ ou } Q \iff Q \text{ ou } P$
- $(P \text{ ou } Q) \text{ ou } R \iff P \text{ ou } (Q \text{ ou } R)$
- $P \text{ ou } (Q \text{ et } R) \iff (P \text{ ou } R) \text{ et } (P \text{ ou } R)$
- $P \text{ et } Q \iff Q \text{ et } P$
- $(P \text{ et } Q) \text{ et } R \iff P \text{ et } (Q \text{ et } R)$
- $P \text{ et } (Q \text{ ou } R) \iff (P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)$

Proposition 1.2.— Règles de calcul pour la négation —. Soit P et Q deux assertions. Alors

- $\text{non } (\text{non } P) \iff P$
- $\text{non } (P \text{ et } Q) \iff (\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q)$
- $\text{non } (P \text{ ou } Q) \iff (\text{non } P) \text{ et } (\text{non } Q)$
- $\text{non } (P \Rightarrow Q) \iff P \text{ et } (\text{non } Q)$

Théorème 1.3.— Soit P et Q deux propositions.

$$\boxed{(P \Rightarrow Q) \iff (\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P)}$$

Vocabulaire : *L'implication non $Q \Rightarrow$ non P est appelée la* ***contraposée*** *de l'implication $P \Rightarrow Q$.*

■ Quantificateurs

Définition : *Soit $P(x)$ une propriété dépendant d'un paramètre x, où x est un élément d'un ensemble E.*

- **Quantificateur universel :** *Pour signifier que la propriété $P(x)$ est vraie pour tous les éléments x de E, on écrit :*

$$\boxed{\forall x \in E,\ P(x)}$$

  Le symbole $\forall$ est appelé ***quantificateur universel*** *et se lit « **quel que soit** ».*

- **Quantificateur existentiel —.** *Pour signifier que la propriété $P(x)$ est vraie pour au moins un élément x de E, on écrit :*

$$\boxed{\exists x \in E,\ P(x)}$$

  Le symbole $\exists$ est appelé ***quantificateur existentiel*** *et se lit « **il existe** ».*

Proposition 1.4.— Négation des propositions avec quantificateurs —.

- La négation de la proposition $\forall x \in E,\ P(x)$ est : $\exists x \in E,\ \text{non } P(x)$.
- La négation de la proposition $\exists x \in E,\ P(x)$ est : $\forall x \in E,\ \text{non } P(x)$.

Remarque : attention, l'ordre des quantificateurs est très important. Lorsque plusieurs quantificateurs apparaissent dans une proposition, on ne peut pas intervertir leur ordre sans changer (en général) le sens de la proposition. Pour s'en convaincre, on pourra consulter le **Vrai/Faux**.

■ Modes de raisonnement

Théorème 1.5.— Soit P et Q des propositions.

- **Preuve par déduction**

• Si Q est vraie • Si $Q \Rightarrow P$ est vraie	Alors P est vraie

- **Preuve par disjonction de cas**

• Si $Q \Rightarrow P$ est vraie • Si $non(Q) \Rightarrow P$ est vraie	Alors P est vraie

- **Preuve par l'absurde**

• Si $non(P) \Rightarrow Q$ est vraie • Si $non(P) \Rightarrow non(Q)$ est vraie	Alors P est vraie

■ Raisonnement par récurrence

Théorème 1.6.— Propriété fondamentale de $\mathbb{N}$ —. Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

Théorème 1.7.— Principe de récurrence —. Soit $\mathcal{P}(n)$ une proposition dépendant de $n \in \mathbb{N}$, et $n_0 \in \mathbb{N}$. Si

- **Initialisation :** la proposition $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie,
- **Hérédité :** pour tout entier $n \geqslant n_0$, $\mathcal{P}(n)$ implique $\mathcal{P}(n+1)$;

alors la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Théorème 1.8.— Récurrence double —. Soit $\mathcal{P}(n)$ une proposition dépendant de $n \in \mathbb{N}$, et $n_0 \in \mathbb{N}$. Si

- **Initialisation :** les propriétés $\mathcal{P}(n_0)$ et $\mathcal{P}(n_0+1)$ sont vraies,
- **Hérédité :** pour tout entier $n \geqslant n_0$, ($\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$) implique $\mathcal{P}(n+2)$;

alors la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Théorème 1.9.— Principe de récurrence forte (ou récurrence avec prédécesseurs) —. Soit $\mathcal{P}(n)$ une proposition dépendant de $n \in \mathbb{N}$, et $n_0 \in \mathbb{N}$. Si

- **Initialisation :** la proposition $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie,
- **Hérédité :** pour tout entier $n \geqslant n_0$, $\Big(\mathcal{P}(n_0)$ et $\mathcal{P}(n_0+1)$ et $\cdots$ et $\mathcal{P}(n)\Big)$ implique $\mathcal{P}(n+1)$;

alors la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Méthodes

Démontrer une proposition

Méthode 1.1.— Comment démontrer une proposition par déduction
Si P et $P \Rightarrow Q$ sont vraies, alors Q est vraie. C'est le **principe de déduction**. C'est un principe très simple que l'on utilise en permanence : si l'on sait qu'une proposition P est vraie (propriété du cours, résultat d'une question antérieure...) et que l'on sait démontrer $P \Rightarrow Q$, alors on a démontré que la proposition Q est vraie.

Exemple : montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$.
On a $x^2 - 4x + 5 = x^2 - 4x + 4 + 1 = (x-2)^2 + 1$. Or, $(x-2)^2 \geqslant 0$ (le carré d'un réel est positif) et $1 > 0$. Par conséquent, $(x-2)^2 + 1 > 0$, c'est-à-dire $x^2 - 4x + 5 > 0$.

Mise en œuvre : tous les exercices !

Méthode 1.2.— Comment démontrer une proposition par disjonction de cas
On est parfois amené à distinguer plusieurs cas pour démontrer qu'une proposition est vraie. C'est le principe d'une démonstration par **disjonction de cas**. En particulier, si l'on souhaite démontrer qu'une proposition $P(x)$ est vraie pour tous les éléments x d'un ensemble E, on peut prouver la proposition pour tous les éléments d'une partie A de E, puis pour les éléments de E n'appartenant pas à A.

Exemple : montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{n(n+1)}{2}$ est un entier naturel.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On va démontrer que $\frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$ en distinguant les cas n pair ou impair.

- Si n est pair, on peut écrire $n = 2k$, où $k \in \mathbb{N}$. Alors $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{2k(2k+1)}{2} = k(2k+1) \in \mathbb{N}$.
- Si n est impair, on a $n = 2p+1$, où $p \in \mathbb{N}$. Alors $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(2p+1)(2p+2)}{2} = (2p+1)(p+1) \in \mathbb{N}$.

Finalement, pour tout entier naturel n, $\frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$.

Mise en œuvre : exercice 1.5, exercice 1.6.

Méthode 1.3.— Comment démontrer une proposition par l'absurde
Pour démontrer qu'une proposition P est vraie, on peut utiliser un **raisonnement par l'absurde**. Pour cela, on suppose que P est fausse et on démontre que l'on aboutit alors à une contradiction.

Exemple : montrer qu'il n'existe pas d'entier naturel supérieur à tous les autres.
Nous allons démontrer cette proposition en raisonnant par l'absurde. Pour cela, on suppose qu'il existe un entier naturel N_0 supérieur à tous les autres. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \leqslant N_0$. La relation est donc vraie pour l'entier $n = N_0 + 1$, donc $N_0 + 1 \leqslant N_0$; d'où $1 \leqslant 0$, ce qui est faux ! Par conséquent, il n'existe pas d'entier naturel supérieur à tous les autres.

Mise en œuvre : exercice 1.9, exercice 1.12.

■ Démontrer une implication

❑ Méthode 1.4.— Comment démontrer une implication par raisonnement direct
Pour montrer directement l'implication $P \Rightarrow Q$, on suppose que P est vraie et on démontre que Q est vraie. La démonstration commence par « supposons que P est vraie » et se termine par « Q est vraie ».

Exemple : démontrer que, pour x et y réels, $x^2 = y^2 \Longrightarrow |x| = |y|$.
Soit x et y deux réels tels que $x^2 = y^2$. On a donc $x^2 - y^2 = 0$, soit $(x-y)(x+y) = 0$.
Par conséquent, $x - y = 0$ ou $x + y = 0$. Ainsi, $x = y$ ou $x = -y$, ce qui signifie que $|x| = |y|$ (x et y sont égaux ou opposés). On a donc démontré l'implication attendue.

❑ Méthode 1.5.— Comment démontrer une implication par contraposition
Le raisonnement par contraposition est basé sur le **théorème 1.3** :

l'implication $P \Rightarrow Q$ est équivalente à sa contraposée *non* $Q \Rightarrow$ *non* P.

Ainsi, pour montrer que l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie, on peut prouver que l'implication *non* $Q \Rightarrow$ *non* P est vraie. En pratique, on suppose donc que *non* Q est vraie et on montre que *non* P est vraie.

Exemple : soit n un entier naturel. Montrer que, si n^2 est pair, alors n est pair.

La proposition à démontrer s'écrit : « n^2 est pair $\Rightarrow$ n est pair ». Nous allons raisonner par contraposition en démontrant la proposition (équivalente) : « n n'est pas pair $\Rightarrow$ n^2 n'est pas pair », c'est-à-dire « n est impair $\Rightarrow$ n^2 est impair ». Considérons un entier impair n : il existe donc $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$. On a alors $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$, ce qui s'écrit aussi $n^2 = 2p+1$, où $p = 2k^2+2k$. Par conséquent, n^2 est un entier impair, ce qui démontre l'implication : si n est impair, alors n^2 est impair. Par contraposition, nous avons donc montré l'implication : si n^2 est pair, alors n est pair.

Exemple : montrer l'implication « $x \notin \mathbb{Q} \Rightarrow 1 + x \notin \mathbb{Q}$ ».

Nous allons de nouveau utiliser la contraposée en démontrant l'implication « $1+x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \in \mathbb{Q}$ ». Soit x un réel tel que $1 + x \in \mathbb{Q}$. On peut écrire $x = (1+x) - 1$. Or $1 + x$ est un nombre rationnel (hypothèse), et 1 aussi. Par conséquent, $(1+x) - 1$ est un nombre rationnel, ce qui montre que $x \in \mathbb{Q}$. Par contraposition, on a démontré l'implication « $x \notin \mathbb{Q} \Rightarrow 1 + x \notin \mathbb{Q}$ ».

Mise en œuvre : exercice 1.8

❑ Méthode 1.6.— Comment démontrer une implication par l'absurde
L'implication $P \Rightarrow Q$ est la proposition *non* P *ou* Q, sa négation est donc P *et non* Q.
Pour démontrer par l'absurde l'implication $P \Rightarrow Q$:

- on suppose que P est vraie et que Q est fausse ;
- on montre que cela aboutit à une contradiction.

Exemple : soit $x, y \in \mathbb{R}^+$. En raisonnant par l'absurde, montrer que, si $\frac{x}{1+y} = \frac{y}{1+x}$, alors $x = y$.
On raisonne par l'absurde en supposant que $\frac{x}{1+y} = \frac{y}{1+x}$ et $x \neq y$ (P est vraie, Q est fausse). Il en résulte que $x(1+x) = y(1+y)$, d'où l'on tire $x^2 - y^2 = y - x$, soit $(x-y)(x+y) = y - x$, d'où $(x-y)(x+y+1) = 0$. Comme $x \neq y$, on en déduit que $x + y + 1 = 0$, donc $x + y = -1$. Absurde vu que x et y sont positifs ! leur somme ne saurait être négative. D'où le résultat.

■ Démontrer une équivalence

> ❑ **Méthode 1.7.— Comment démontrer une équivalence par double implication**
> Par définition, l'équivalence « $P \Leftrightarrow Q$ » est la proposition « $P \Rightarrow Q$ *et* $Q \Rightarrow P$ ». Démontrer par double implication l'équivalence $P \Leftrightarrow Q$, c'est démontrer que les implications $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$. En pratique, pour démontrer $P \Leftrightarrow Q$ par double implication :
> - on démontre $P \Rightarrow Q$;
> - puis on démontre $Q \Rightarrow P$.
>
> Dans ce cas, il y a donc deux démonstrations à faire pour obtenir l'équivalence.

Exemple : on pose $f(x) = mx + 1$. Montrer que f garde un signe constant sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $m = 0$. Nous allons prouver cette équivalence en raisonnant par double implication.
$\boxed{\Rightarrow}$ Si $m = 0$, f est constante et égale à 1, elle garde donc un signe constant (positif) sur $\mathbb{R}$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Réciproquement, montrons que, si f garde un signe constant sur $\mathbb{R}$, alors $m = 0$. Pour cela, on raisonne par contraposée en supposant que $m \neq 0$. On a alors :

$$f(x) = m\big(x + \frac{1}{m}\big),$$

et f change de signe en $-\frac{1}{m}$ (du signe de m pour $x > -\frac{1}{m}$, du signe de $-m$ pour $x < -\frac{1}{m}$). Ainsi, si $m \neq 0$, f change de signe sur $\mathbb{R}$.
Nous avons montré les deux implications. Ainsi, f garde un signe constant sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $m = 0$.

Exemple : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x = \sqrt{x^2+1}$.
On va raisonner par double implication.
• Si x est solution de l'équation, alors $(2x)^2 = x^2 + 1$, soit $4x^2 = x^2 + 1$, d'où $3x^2 = 1$. On obtient donc $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ou $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.
• Réciproquement, $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ sont-ils solutions de l'équation ? Si x est égal à $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ou $-\frac{1}{\sqrt{3}}$, alors $\sqrt{x^2+1} = \sqrt{4/3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Par conséquent, $\frac{1}{\sqrt{3}}$ est solution mais $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ ne l'est pas.
Finalement, l'unique solution de l'équation est $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

> ❑ **Méthode 1.8.— Comment démontrer une équivalence par raisonnement direct**
> Pour démontrer l'équivalence $P \Leftrightarrow Q$, on peut également enchaîner les équivalences. On passe de P à Q par une succession d'équivalences en s'assurant, à chaque étape du raisonnement, que l'équivalence est bien conservée.

Remarque : Cette méthode est particulièrement adaptée à la résolution d'équations ou d'inéquations. Notons qu'il n'est pas toujours possible d'appliquer cette méthode directe pour démontrer une équivalence. Il est parfois nécessaire de procéder par double implication (**méthode 1.7**).

Exemple : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x = \sqrt{x^2+1}$.
Pour $x < 0$, l'équation n'a pas de solution (un nombre strictement négatif ne peut pas être égal à une racine carrée). Pour $x \geqslant 0$, on a :

$$2x = \sqrt{x^2+1} \iff (2x)^2 = (\sqrt{x^2+1})^2 \iff 4x^2 = x^2+1 \iff x^2 = \frac{1}{3} \iff x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Ainsi, l'unique solution de l'équation est $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Mise en œuvre : exercice 1.7.

■ Utiliser un contre-exemple

❑ Méthode 1.9.— Comment utiliser un contre-exemple
La négation de la proposition «$\forall x \in E, P(x)$» est «$\exists x \in E, non\ P(x)$».
Si l'on souhaite démontrer qu'une proposition du type «$\forall x \in E, P(x)$» est fausse, il suffit de trouver une valeur de x de E pour laquelle la proposition $P(x)$ est fausse. On parle alors de **contre-exemple**.

Exemple : la fonction sinus n'est pas paire. Par exemple, $\sin(\frac{\pi}{2}) \neq \sin(-\frac{\pi}{2})$.

Exemple : la proposition « tout entier naturel est somme de trois carrés » est-elle vraie ?
On peut facilement vérifier que cette proposition est vraie pour tout entier $n \in \{0, \cdots, 6\}$. Par exemple, $0 = 0^2+0^2+0^2$ et $5 = 2^2+1^2+0^2$. En revanche, la proposition est fausse pour $n = 7$. Sinon, on pourrait écrire $7 = a^2+b^2+c^7$, avec nécessairement $a, b, c \in \{0, \cdots, 2\}$ (puisque $3^2 = 9$). Mais, avec trois des carrés 0^2, 1^2 et 2^2, il est impossible de former 7. Ainsi, 7 constitue un contre-exemple et la proposition énoncée est donc fausse.

Mise en œuvre : voir le Vrai/Faux.

■ Raisonner par analyse-synthèse

❑ Méthode 1.10.— Comment raisonner par analyse-synthèse
Le raisonnement par analyse-synthèse est une méthode qui permet de déterminer les solutions d'un problème. Ce raisonnement se déroule en deux étapes.

- Phase d'**analyse** : on suppose le problème résolu et on en déduit des conditions nécessaires.
- Phase de **synthèse** : on montre que ces conditions obtenues sont suffisantes et on résout le problème.

En pratique, on démontre que, si x est solution du problème, il ne peut prendre que certaines valeurs (phase d'analyse) ; on vérifie ensuite si ces valeurs sont effectivement solutions (phase de synthèse).

Exemple : montrer que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
Nous allons raisonner par analyse-synthèse. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Analyse. On suppose le problème résolu, c'est-à-dire qu'il existe deux fonctions g et h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, avec g paire et h impaire telles que $f = g + h$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x)$$

Comme g est paire et h impaire, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = g(x) - h(x)$$

En sommant les deux égalités précédentes, on en déduit que $g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$.
De même, en retranchant ces deux égalités, il vient $h(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$.
Ainsi, s'il existe deux fonctions solutions du problème, alors ce sont nécessairement les fonctions g et h ci-dessus.
Synthèse. Nous allons vérifier que g et h sont bien solutions du problème.
• La fonction g est paire puisque :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = g(x).$$

• La fonction h est paire puisque :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -h(x).$$

• Enfin, on a $f = g + h$. En effet :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) + h(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = \frac{2f(x)}{2} = f(x).$$

Par conséquent, nous avons démontré par analyse-synthèse qu'il existe un unique couple (g, h), avec g paire et h impaire tel que $f = g + h$.

Mise en œuvre : exercice 1.10 et **exercice 1.11**.

■ Raisonner par récurrence

❑ **Méthode 1.11.— Comment appliquer une récurrence simple**
Pour montrer, à l'aide d'une récurrence **simple**, qu'une proposition $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée pour tout entier $n \geqslant n_0$:

- **Initialisation :** on vérifie que la proposition est vraie au rang initial n_0 ;
- **Hérédité :** on suppose que la proposition est vraie à un certain rang $n \geqslant n_0$ fixé (« on suppose que la proposition est vraie au rang n ») et on en déduit qu'elle est vraie au rang suivant $n + 1$;
- **Conclusion :** « par récurrence, la proposition est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$ ».

Exemple : montrer par récurrence que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Ici $n_0 = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}(n)$ la proposition : « $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ ».

- **Initialisation :** $\mathcal{P}(1)$ est vraie puisque $1 = \frac{1\times(1+1)}{2}$.
- **Hérédité :** On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie à un rang $n \geqslant 1$ fixé, c'est-à-dire que $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$. On déduit de cette hypothèse de récurrence que :

$$\begin{aligned} 1+2+\cdots+n+n+1 &= (1+2+\cdots+n)+n+1 = \frac{n(n+1)}{2}+n+1 \\ &= (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}, \end{aligned}$$

ce qui démontre $\mathcal{P}(n+1)$.

- **Conclusion :** Par récurrence, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée pour tout entier $n \geqslant 1$.

Exemple : montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $1\times 1! + 2\times 2! + \cdots + n\times n! = (n+1)! - 1$.

Ici $n_0 = 1$. Pour $n \geqslant 1$, on introduit la proposition

$$\mathcal{P}(n) : « 1\times 1! + 2\times 2! + \cdots + n\times n! = (n+1)! - 1 ».$$

- **Initialisation :** $\mathcal{P}(1)$ est vraie puisque $1\times 1! = 1$, $(1+1)! - 1 = 2 - 1 = 1$ et $1 = 1$.
- **Hérédité :** On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie à un rang $n \geqslant 1$ fixé, c'est-à-dire que :

$$1\times 1! + 2\times 2! + \cdots + n\times n! = (n+1)! - 1.$$

D'après cette hypothèse de récurrence, on a alors :

$$\begin{aligned} 1\times 1! + \cdots + (n+1)\times(n+1)! &= 1\times 1! + 2\times 2! + \cdots + n\times n! + (n+1)\times(n+1)! \\ &= (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! = (n+1)![1+n+1] - 1 \\ &= (n+2)(n+1)! - 1 = (n+2)! - 1. \end{aligned}$$

Cela démontre $\mathcal{P}(n+1)$.

- **Conclusion :** Par récurrence, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée pour tout entier $n \geqslant 1$.

Mise en œuvre : exercice 1.13, exercice 1.14, exercice 1.19, exercice 1.20.

Méthodes

❑ Méthode 1.12.— Comment appliquer une récurrence double

Pour montrer, à l'aide d'une récurrence **double**, qu'une proposition $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée pour tout entier $n \geqslant n_0$:

- **Initialisation :** on vérifie que la proposition est vraie aux deux rangs initiaux n_0 et $n_0 + 1$;
- **Hérédité :** on suppose que la proposition est vraie aux rangs n et $n+1$, où n est un entier fixé supérieur ou égal à n_0 (« on suppose que la proposition est vraie aux rangs n et $n+1$ ») et on en déduit qu'elle est vraie au rang suivant $n+2$;
- **Conclusion :** « Par récurrence, la proposition est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$ ».

Exemple : soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = -5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 4\times 2^{n+1} - 7\times 3^n$.
On effectue une récurrence double en introduisant, pour $n \in \mathbb{N}$, la proposition

$$\mathcal{P}(n) \ : \ « u_n = 4\times 2^{n+1} - 7\times 3^n ».$$

• **Initialisation :** $\mathcal{P}(0)$ est vraie puisque $u_0 = 1$ et $4 \times 2^{0+1} - 7 \times 3^0 = 8 - 7 = 1.$, $\mathcal{P}(1)$ est vraie puisque $u_1 = -5$ et $4 \times 2^{1+1} - 7 \times 3^1 = 16 - 21 = -5$.

• **Hérédité :** On suppose maintenant que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies, où $n \in \mathbb{N}$ est fixé, c'est-à-dire :

$$u_n = 4 \times 2^{n+1} - 7 \times 3^n \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 4 \times 2^{n+2} - 7 \times 3^{n+1}.$$

En utilisant l'égalité donnant u_{n+2} en fonction de u_{n+1} et u_n, on en déduit que :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 5u_{n+1} - 6u_n = 5(4 \times 2^{n+2} - 7 \times 3^{n+1}) - 6(4 \times 2^{n+1} - 7 \times 3^n) \\ &= 20 \times 2^{n+2} - 35 \times 3^{n+1} - 24 \times 2^{n+1} + 42 \times 3^n \\ &= 2^{n+1}(2 \times 20 - 24) + 3^n(42 - 35 \times 3) = 16 \times 2^{n+1} - 63 \times 3^n \\ &= 4 \times 2^2 \times 2^{n+1} - 7 \times 3^2 \times 3^n = 4 \times 2^{n+3} - 7 \times 3^{n+2}, \end{aligned}$$

ce qui démontre que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

• **Conclusion :** Par récurrence double, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Mise en œuvre : exercice 1.15, exercice 1.16.

❑ **Méthode 1.13.— Comment appliquer une récurrence forte**

Pour montrer, à l'aide d'une récurrence **forte**, qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée pour tout entier $n \geqslant n_0$:

- **Initialisation :** on vérifie que la propriété est vraie au rang initial n_0 ;
- **Hérédité :** on suppose que la propriété est vraie du rang n_0 **jusqu'à** un certain rang $n \geqslant n_0$ fixé (« on suppose que la propriété est vraie aux rangs $n_0, n_0+1, \cdots, n$ ») et on en déduit qu'elle est vraie au rang suivant $n+1$;
- **Conslusion :** « Par récurrence, la propriété est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$ ».

Exemple : montrer que tout entier $n \geqslant 2$ se décompose en produit de nombres premiers.
Pour $n \geqslant 2$, on note $\mathcal{P}(n)$ la proposition : « n s'écrit comme un produit de nombres premiers ».
Ici le rang initial n_0 est égal à 2.

• **Initialisation :** $\mathcal{P}(2)$ est vraie puisque $2 = 2$ et 2 est un nombre premier !

• **Hérédité :** Soit n un entier supérieur ou égal à 2 fixé. On suppose que $\mathcal{P}(2), \mathcal{P}(3), \cdots, \mathcal{P}(n)$ sont vraies, c'est-à-dire que tout entier $k \in [\![2, n]\!]$ peut se décomposer en produit de nombres premiers. On veut montrer que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie ($n+1$ se décompose en un produit de nombres premiers). Il y a deux cas :

- ▸ si $n+1$ est premier, il n'y a rien à faire ($n+1 = n+1$ et $n+1$ est un nombre premier !)
- ▸ si $n+1$ n'est pas un nombre premier, on peut écrire $n+1 = pq$, où p et q sont des entiers compris entre 2 et n. D'après l'hypothèse de récurrence appliquée à p et q (p et q appartiennent à $[\![2, n]\!]$ donc $\mathcal{P}(p)$ et $\mathcal{P}(q)$ sont vraies) : p et q se décomposent en produit de nombres premiers. Il en est alors de même pour leur produit $pq = n+1$.

Ainsi, la propriété est vraie au rang $n+1$.

• **Conclusion :** On vient de démontrer, par récurrence forte, que tout entier $n \geqslant 2$ se décompose en produit de nombres premiers.

Mise en œuvre : exercice 1.17.

Vrai/Faux

	Vrai	Faux
1. $\forall x < 2,\ x^2 < 4$	☐	☐
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$	☐	☐
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)$ est pair.	☐	☐
4. La négation de « la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$ » est « la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$ ».	☐	☐
5. La négation de « la nuit, tous les chats sont gris » est « le jour, aucun chat n'est gris »	☐	☐
6. La réciproque de « la nuit, tous les chats sont gris » est « quand tous les chats sont gris, il fait nuit »	☐	☐
7. La contraposée de « la nuit, tous les chats sont gris » est « quand tous les chats sont gris, il fait jour ».	☐	☐
8. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z}, x \leqslant n$	☐	☐
9. $\exists n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, x \leqslant n$	☐	☐
10. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2^{n-1} \geqslant n+1$.	☐	☐

Énoncé des exercices

Logique et propositions

Exercice 1.1 : Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. La négation de « f est une fonction paire » est « f est une fonction impaire ».
2. Lorsque la proposition (P *et* Q) est vraie, la proposition (P *ou* Q) l'est aussi.
3. Lorsque la proposition (P *ou* Q) est vraie, la proposition (P *et* Q) l'est aussi.
4. La négation de la proposition $P \Rightarrow Q$ est la proposition $P \Rightarrow$ *non* Q.
5. Lorsque P est fausse et $P \Rightarrow Q$ vraie, alors Q est également fausse.
6. $\exists a \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ |a| < \varepsilon$.
7. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in \mathbb{R},\ |a| < \varepsilon$.
8. $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}^+,\ y < \sqrt{x}$.

Exercice 1.2 : Donner la négation des propositions ou affirmations suivantes.

1. S'il pleut, je prends mon parapluie.
2. Chaque été, il pleut au moins un jour en Bretagne.
3. L'été dernier, il a plu tous les jours en Bretagne.
4. $2 \leqslant x < y$.
5. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

Exercice 1.3 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels et f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Écrire avec des quantificateurs chacune des propositions suivantes.

1. La suite (u_n) est majorée par 4.
2. La suite (u_n) est majorée.
3. La suite (u_n) n'est pas majorée.
4. La suite (u_n) est bornée.
5. La suite (u_n) est croissante.
6. La suite (u_n) est constante.
7. La fonction f est la fonction nulle.
8. La fonction f s'annule.
9. La fonction f est croissante.
10. La fonction f admet un maximum.

Exercice 1.4 : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. Traduire par une phrase chacune des propositions suivantes.

1. $\forall x \in I,\ f(x) \neq 0$
2. $\exists x \in I,\ \exists y \in I,\ f(x) \neq f(y)$
3. $\forall x \in I,\ f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$
4. $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in I,\ f(x) = y$
5. $\forall x \in I,\ \forall y \in I,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

Modes de raisonnement

Exercice 1.5 : Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x-1| \leqslant x^2 - x + 1$.

Exercice 1.6 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|x+1| = 4 - |3x-2|$.

Exercice 1.7 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes

1. $|2x-5| = |x^2-4|$
2. $\sqrt{|x-3|} = |x-1|$
3. $\sqrt{|x-3|} \leqslant x-1$
4. $\sqrt{x-1} \geqslant x-7$

Exercice 1.8 : Raisonnements par contraposition

1. Soit a un réel. Démontrer l'implication :

$$\left(\forall \varepsilon > 0,\ |a| < \varepsilon\right) \Rightarrow a = 0.$$

2. Soit $n_1, n_2, \cdots, n_9$ des entiers naturels vérifiant $n_1 + \cdots + n_9 = 90$.
Montrer qu'il existe trois de ces entiers dont la somme est supérieure à 30.

Exercice 1.9* : Démontrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.
On rappelle qu'un réel est un nombre rationnel s'il peut s'écrire $\frac{p}{q}$, où p et q sont des entiers.

Exercice 1.10* : Déterminer toutes les applications f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall m, n \in \mathbb{N},\ f(m+n) = f(n) + f(m).$$

Exercice 1.11* : Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x)f(y) = f(xy) + x + y.$$

Exercice 1.12 :** Montrer que l'ensemble des nombres premiers est infini.

■ Récurrences

Exercice 1.13 : Sommes des carrés, des cubes —. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer que :

1. $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2. $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

Exercice 1.14 : Montrer par récurrence les propriétés suivantes.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0! + 1! + \cdots + n! \leqslant (n+1)!$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $10^n - 1$ est divisible par 9.

Exercice 1.15 : On considère une suite (u_n) de réels vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n + u_{n+2}}{2}.$$

On pose $r = u_1 - u_0$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$. Que peut-on dire de (u_n) ?

Exercice 1.16* : Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 2\cos x$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 2(\cos x)u_{n+1} - u_n.$$

Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2\cos(nx).$$

Exercice 1.17 :** Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $n = 2^p(2q+1)$.

Exercice 1.18* : Suite de Fibonacci —. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_n + u_{n+1}. \qquad (*)$$

On traitera cet exercice sans déterminer le terme général de la suite (u_n).

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant n$. En déduire la limite de la suite (u_n).
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n^2 - u_{n-1}u_{n+1} = (-1)^n$.
3. Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_1 + u_3 + \cdots + u_{2n-1} = u_{2n} - 1$.
4. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_{n+2} - 1$.

Exercice 1.19 : Démontrer par récurrence les inégalités suivantes.

1. $\forall n \geqslant 2,\ 1 + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2} > \dfrac{3n}{2n+1}$
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ 1! \times 3! \times \cdots \times (2n+1)! \geqslant \left[(n+1)!\right]^{n+1}$

Exercice 1.20 : Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$,

$$(x_1 + x_2 + \cdots x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right) \geqslant n^2.$$

Indications

Ex. 1.9

Raisonnement par l'absurde !

Ex. 1.10

Raisonner par analyse-synthèse.

Ex. 1.11

On raisonnera par analyse-synthèse. Dans la partie analyse, on commencera par montrer que $f(0) = 1$.

Ex. 1.12

Raisonner par l'absurde en supposant que cet ensemble $\mathcal{P}$ est fini et, si l'on note $\mathcal{P} = \{p_1, \cdots, p_k\}$, considérer l'entier $N = p_1 \times \cdots \times p_k + 1$.

Ex. 1.14

Pour la deuxième question, comment traduit-on le fait qu'un entier est divisible par un autre ?

Ex. 1.17

On pourra appliquer une récurrence forte.

Ex. 1.20

On pourra commencer par montrer que, pour $a, b \in \mathbb{R}^+$, $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$.

Corrigé des vrai/faux

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F	F	V	F	F	V	F	V	F	F

1. C'est évidemment faux ! Par exemple, $-3 < 2$ mais $(-3)^2 > 4$ (**méthode 1.9**).

2. Les solutions de l'équation $x^2 = 4$ sont 2 et -2. L'équivalence correcte est :

$$x^2 = 4 \Leftrightarrow (x = 2 \text{ ou } x = -2).$$

3. On peut raisonner par disjonction des cas (**méthode 1.2**).
• Si n est pair, alors le produit $n(n+1)$ est pair.
• Si n est impair, alors $n+1$ est pair, et le produit $n(n+1)$ est pair.
Dans le deux cas, $n(n+1)$ est un entier pair.

4. Il existe des fonctions qui ne sont ni croissantes, ni décroissantes sur $\mathbb{R}$. Par exemple, la fonction $f : x \mapsto x^2$ n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$ (décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$).
La négation de « f est croissante sur $\mathbb{R}$ » est « f n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$ ».

5. Cette proposition est de la forme $(P \Rightarrow Q)$, où P est la proposition « il fait nuit » et Q la proposition « tous les chats sont gris ». D'une manière générale, la négation de $(P \Rightarrow Q)$ est $(P \textit{ et non } Q)$, soit ici « la nuit, au moins un chat n'est pas gris ».

6. C'est encore la proposition $(P \Rightarrow Q)$ de la question précédente. Sa réciproque est $(Q \Rightarrow P)$, c'est-à-dire « si tous les chats sont gris, il fait nuit ».

7. C'est encore la proposition $(P \Rightarrow Q)$ de la question précédente. Sa contraposée est $(\textit{non } Q \Rightarrow \textit{non } P)$, c'est-à-dire « si un chat au moins n'est pas gris, alors il fait jour ».

8. La proposition signifie qu'on peut toujours trouver un entier supérieur à un réel fixé, c'est vrai ! Si x est un réel fixé, et N sa partie entière (c'est-à-dire le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x), on a $N \leqslant x < N+1$ et $N+1$ est un entier supérieur à x.

9. La proposition signifie qu'il existe un entier supérieur ou égal à tous les réels, ce qui est faux ($\mathbb{R}$ est non borné). Ces deux exemples nous montrent bien l'importance de l'ordre des quantificateurs.

10. Cette inégalité est fausse pour $n = 1$ et $n = 2$. En revanche, on peut démontrer (par récurrence) qu'elle est vraie pour tout $n \geqslant 3$.

Corrigé des exercices

Exercice 1.1

1. C'est faux : une fonction qui n'est pas paire n'est pas nécessairement impaire ! Par exemple, la fonction exponentielle n'est ni paire, ni impaire.

2. C'est vrai : si la proposition (P *et* Q) est vraie, P et Q sont toutes les deux vraies donc (P *ou* Q) aussi.

3. C'est faux : si P est vraie et Q fausse, alors (P *ou* Q) est vraie mais (P *et* Q) est fausse.

4. C'est faux. En effet, $P \Rightarrow Q$ est la proposition (*non* P *ou* Q), sa négation est (P *et non* Q) alors que $P \Rightarrow$ *non* Q est la proposition (*non* P *ou non* Q). Lorsque P est fausse, (P *et non* Q) est fausse, mais (*non* P *ou non* Q) est vraie.

✐ *$P \Rightarrow Q$ est la proposition (non P ou Q).*

5. C'est faux puisque, si P est fausse, $P \Rightarrow Q$ est automatiquement vraie (que Q soit vraie ou pas).

6. C'est vrai en prenant $a = 0$ (la proposition signifie qu'il existe un réel dont la valeur absolue est inférieure à tout réel positif).

7. C'est vrai en prenant, par exemple $a = \frac{\varepsilon}{2}$. La proposition signifie que l'on peut toujours trouver un réel dont la valeur absolue est strictement inférieure à un réel strictement positif fixé.

8. La proposition est vraie. Soit y un réel fixé. En posant $x = (|y|+1)^2 \in \mathbb{R}^+$, on a $\sqrt{x} = |y| + 1$, donc $\sqrt{x} > y$. ▲

Exercice 1.2

✐ *$P \Rightarrow Q$ est la proposition (non P ou Q).*

1. Cette phrase est de la forme $P \Rightarrow Q$, sa négation est (P *et non* Q), soit : « il pleut et je ne prends pas mon parapluie ».

2. L'affirmation comporte successivement un quantificateur universel $\forall$ (chaque été) et un quantificateur existentiel (il existe un jour durant lequel il a plu). La négation est donc « il y a eu un été en Bretagne sans aucun jour de pluie ». Cette dernière affirmation est évidemment fausse du point de vue météorologique...

3. La négation est : « il y a eu au moins un jour sans pluie l'été dernier en Bretagne ».

4. Cette double inégalité s'écrit aussi ($2 \leqslant x$ *et* $y > x$). Sa négation est : ($x < 2$ *ou* $x \geqslant y$).

✐ *non($P \Rightarrow Q$) est (P et non Q).*

5. $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ f(x) = f(y)$ et $x \neq y$. ▲

Exercice 1.3

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant 4$.

✐ *Dans 2, M est un majorant de (u_n).*

2. $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M$.

3. On donne la négation de la proposition précédente :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\ u_n > M$$

4. $\exists m \in \mathbb{R},\ \exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ m \leqslant u_n \leqslant M$. On peut également écrire : *$C = max(|m|, |M|)$*

$$\exists C \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant C$$

5. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n$
6. $\exists C \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = C$
7. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$
8. $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$
9. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall x' \in \mathbb{R},\ x \geqslant x' \Rightarrow f(x) \geqslant f(x')$.
10. $\exists a \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant f(a)$ ▲ *f admet son maximum en a*

Exercice 1.4

1. La fonction f ne s'annule pas sur I.
2. La fonction f prend au moins deux valeurs différentes sur I. Autrement dit, f n'est pas constante sur I.
3. Si la fonction f s'annule, alors c'est forcément en 0. Autrement dit, f ne peut s'annuler qu'en 0 (mais elle ne s'y annule pas nécessairement).
4. La fonction f prend toutes les valeurs réelles.
5. La fonction f ne prend pas deux fois la même valeur. ▲

On dit que f est surjective pour **4**, *injective pour* **5** *(voir le chapitre* **Applications***)*

Exercice 1.5

Nous allons montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - x + 1 - |x - 1| \geqslant 0$.
Pour cela, raisonnons par disjonction de cas. Soit $x \in \mathbb{R}$. **Méthode 1.2**

▸**Premier cas :** $x \geqslant 1$. Dans ce cas, $|x - 1| = x - 1$ et :

$$x^2-x+1-|x-1| = x^2-x+1-(x-1) = x^2-2x+2 = x^2-2x+1+1 = (x-1)^2+1,$$

quantité positive. Ainsi, pour tout $x \geqslant 1$, $x^2 - x + 1 - |x - 1| \geqslant 0$.
▸**Deuxième cas :** $x < 1$. On a alors $|x - 1| = -(x - 1)$, d'où :

$$x^2 - x + 1 - |x - 1| = x^2 - x + 1 + (x - 1) = x^2 \geqslant 0,$$

ce qui montre que, pour $x > 1$, $x^2 - x + 1 - |x - 1| \geqslant 0$.
En conclusion, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x - 1| \leqslant x^2 - x + 1$. ▲

Exercice 1.6

On a $|x+1| = x+1$ *ssi* $x+1 \geqslant 0$ et $|3x-2| = 3x-2$ *ssi* $3x-2 \geqslant 0$. Partant de ces remarques, on raisonne par disjonction de cas, en considérant trois cas.
▸**Premier cas :** $x \geqslant \frac{2}{3}$. On a alors $|x + 1| = x + 1$ et $|3x - 2| = 3x - 2$. L'équation équivaut à $x + 1 = 4 - (3x - 2)$, soit $x = \frac{5}{4}$. Comme $\frac{5}{4} \geqslant \frac{2}{3}$, $\frac{5}{4}$ est solution.
▸**Deuxième cas :** $x \leqslant -1$. Dans ce cas, $|x + 1| = -x - 1$ et $|3x - 2| = 2 - 3x$. L'équation équivaut à $-x - 1 = 4 + 3x - 2$, soit $x = -\frac{3}{4}$ qui ne convient pas puisque $-\frac{3}{4} > -1$.
▸**Troisième cas :** $x \in]-1, \frac{2}{3}[$. Dans ce dernier cas, $|x + 1| = x + 1$, $|3x - 2| = 2 - 3x$ et l'équation équivaut à $x + 1 = 4 + 3x - 2$, soit $x = -\frac{1}{2}$. Comme $-\frac{1}{2} \in]-1, \frac{2}{3}[$, $-\frac{1}{2}$ est effectivement solution.
Finalement, l'équation a deux solutions : $-\frac{1}{2}$ et $\frac{5}{4}$. ▲

Exercice 1.7

On résout ces équations ou inéquations par équivalences, en s'assurant, à chaque étape du raisonnement, que l'on conserve bien une équivalence.

Lorsque $C \geqslant 0$, $|X| = C \Leftrightarrow X = \pm C$.

1. La valeur absolue d'un nombre est égale à C ($C \in \mathbb{R}^+$) si et seulement si ce nombre est égal à C ou à $-C$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}|2x-5| = |x^2-4| &\Leftrightarrow 2x-5 = x^2-4 \text{ ou } 2x-5 = -(x^2-4)\\ &\Leftrightarrow x^2-2x+1 = 0 \text{ ou } x^2+2x-9 = 0\end{aligned}$$

L'unique solution de la première équation est 1, les solutions de la deuxième équation sont $-1+\sqrt{10}$ et $-1-\sqrt{10}$. Les solutions de l'équation sont donc 1, $-1+\sqrt{10}$ et $-1-\sqrt{10}$.

Lorsque A et B sont de même signe, $A = B \Leftrightarrow A^2 = B^2$

2. Les nombres $\sqrt{|x-3|}$ et $|x-1|$ étant tous les deux positifs, on a :

$$\begin{aligned}\sqrt{|x-3|} = |x-1| &\Leftrightarrow |x-3| = (x-1)^2\\ &\Leftrightarrow x-3 = (x-1)^2 \text{ ou } x-3 = -(x-1)^2\\ &\Leftrightarrow x-3 = x^2-2x+1 \text{ ou } x-3 = -x^2+2x-1\\ &\Leftrightarrow x^2-3x+4 = 0 \text{ ou } x^2-x-2 = 0\end{aligned}$$

$\Delta < 0$ pour le premier trinôme.

Le premier trinôme n'a pas de racine réelle et les racines du second sont -1 et 2. Par conséquent, les solutions de l'équation sont -1 et 2.

Attention à ne pas élever au carré sans la précaution $x \geqslant 1$.

3. Si $x < 1$, l'équation n'a clairement pas de solution (car alors $\sqrt{|x-3|} \geqslant 0$ et $x-1 < 0$). Lorsque $x \geqslant 1$, $\sqrt{|x-3|}$ et $x-1$ sont positifs. Ainsi,

Lorsque A et B sont positifs, $A \leqslant B \Leftrightarrow A^2 \leqslant B^2$

$$\begin{aligned}\sqrt{|x-3|} \leqslant x-1 &\Leftrightarrow x \geqslant 1 \text{ et } |x-3| \leqslant (x-1)^2\\ &\Leftrightarrow x \geqslant 1 \text{ et } -(x-1)^2 \leqslant x-3 \leqslant (x-1)^2\\ &\Leftrightarrow x \geqslant 1 \text{ et } -x^2+2x-1 \leqslant x-3 \leqslant x^2-2x+1\\ &\Leftrightarrow x \geqslant 1 \text{ et } x^2-x-2 \geqslant 0 \text{ et } x^2-3x+4 \geqslant 0\end{aligned}$$

Ne pas oublier que $x \geqslant 1$.

Le premier trinôme a pour racines -1 et 2 donc $x^2-x-2 \geqslant 0$ si et seulement si $x \in]-\infty, -1] \cup [2, +\infty[$. Par ailleurs, le discriminant du second trinôme étant strictement négatif, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2-3x+4 > 0$. Finalement, l'ensemble des solutions de l'inéquation est $[2, +\infty[$.

$\sqrt{a}$ existe ssi $a \geqslant 0$

4. L'inéquation est définie pour $x \geqslant 1$. Par ailleurs, tout réel $x \in [1, 7]$ est solution de l'inéquation (si $x \in [1, 7]$, le membre de gauche de l'inégalité est positif, celui de droite est négatif). Enfin, pour $x \geqslant 7$, les deux membres de l'inégalité sont positifs et on obtient une inéquation équivalente en élevant au carré :

Pour $A, B \geqslant 0$, $A \geqslant B \Leftrightarrow A^2 \geqslant B^2$

$$\begin{aligned}\sqrt{x-1} \geqslant x-7 \text{ et } x \geqslant 7 &\Leftrightarrow x-1 \geqslant (x-7)^2 \text{ et } x \geqslant 7\\ &\Leftrightarrow x-1 \geqslant x^2-14x+49 \text{ et } x \geqslant 7\\ &\Leftrightarrow x^2-15x+50 \leqslant 0 \text{ et } x \geqslant 7.\end{aligned}$$

Les solutions de $x^2-15x+50 = 0$ étant 5 et 10, on a $x^2-15x+50 \leqslant 0$ si et seulement si $x \in [5, 10]$. Par conséquent, l'ensemble des solutions de l'inéquation est $[1, 10]$. ▲

Exercice 1.8

1. Raisonnons par contraposition en prouvant l'implication :

$$a \neq 0 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0,\ |a| \geqslant \varepsilon.$$

Soit $a \neq 0$. En cherche un réel $\varepsilon > 0$ tel que $|a| \geqslant \varepsilon$. Le réel $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$ convient : en effet, $|a| \geqslant \frac{|a|}{2}$ et $\frac{|a|}{2} > 0$ puisque $a \neq 0$. On a donc établi (par contraposition) l'implication attendue.

$|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2. Quitte à réordonner $n_1, n_2, \cdots, n_9$, on peut supposer que $n_1 \leqslant \cdots \leqslant n_9$. Nous allons raisonner par contraposition en montrant que :

$n_7 + n_8 + n_9$ est la plus grande somme formée à partir des 9 entiers

$$n_7 + n_8 + n_9 < 30 \Rightarrow n_1 + \cdots + n_9 \neq 90.$$

Supposons que $n_7 + n_8 + n_9 < 30$. Comme $n_1 \leqslant \cdots \leqslant n_9$, on a :

$$n_1 + n_2 + n_3 \leqslant n_4 + n_5 + n_6 \leqslant n_7 + n_8 + n_9 < 30.$$

Par conséquent, $n_1 + \cdots + n_9 < 3 \times 30$, d'où $n_1 + \cdots + n_9 \neq 90$. D'où le résultat par contraposition. ▲

Exercice 1.9

On raisonne par l'absurde en supposant que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel : il existe des entiers naturels non nuls p et q tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. On suppose (quitte à la simplifier) que la fraction $\frac{p}{q}$ est irréductible. Comme $q\sqrt{2} = p$, on a $2q^2 = p^2$, ce qui montre que p^2 est pair, donc p l'est aussi. On peut donc écrire $p = 2p'$, où $p' \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, $2q^2 = (2p')^2 = 4p'^2$, d'où $q^2 = 2p'^2$. Cela montre que q^2 est pair, donc q aussi : $q = 2q'$, avec $q' \in \mathbb{N}^*$. Par conséquent, la fraction $\frac{p}{q}$ n'est pas irréductible puisque $\frac{p}{q} = \frac{2p'}{2q'} = \frac{p'}{q'}$. Contradiction ! ▲

méthode 1.3

Voir l'exemple de la **méthode 1.5**

Exercice 1.10

Nous allons raisonner par analyse-synthèse.

Analyse. Soit f une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall m, n \in \mathbb{N},\ f(m+n) = f(m) + f(n).$$

On a alors $f(2) = f(1) + f(1) = 2f(1)$, $f(3) = f(2) + f(1) = 3f(1)$, puis, par une récurrence immédiate :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = nf(1),$$

ce qui montre que f est une fonction de la forme $n \mapsto \lambda n$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Synthèse. Supposons maintenant qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = \lambda n$. Alors :

$$\forall m, n \in \mathbb{N},\ f(m+n) = \lambda(m+n) = \lambda m + \lambda n = f(m) + f(n),$$

donc f vérifie la condition indiquée.

Conclusion. Les fonctions f solutions du problème sont les fonctions de la forme $n \mapsto \lambda n$, où λ est un réel. ▲

Exercice 1.11

On raisonne de nouveau par analyse-synthèse.

Analyse. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x)f(y) = f(xy) + x + y. \qquad (*)$$

En prenant $x = y = 0$ dans cette relation, on obtient $f(0)^2 = f(0)$, soit $f(0)(f(0) - 1) = 0$. On a donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$. Mais si $f(0) = 0$, alors, en prenant $x = 0$ et $y = 1$, la relation $(*)$ donne $0 = 1$, ce qui est absurde. Par conséquent, $f(0) = 1$. On en déduit que :

Relation $(*)$ appliquée à $y = 0$ et x quelconque.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x + 1.$$

Synthèse. On suppose maintenant que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x+1$. Alors :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x)f(y) = (x + 1)(y + 1) = xy + 1 + x + y = f(xy) + x + y,$$

ce qui montre que f vérifie la relation $(*)$.

Conclusion. L'unique fonction vérifiant la relation $(*)$ est $f : x \mapsto x + 1$. ▲

Exercice 1.12

On raisonne par l'absurde en supposant qu'il n'existe qu'un nombre fini k de nombres premiers. En notant $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers, on peut donc écrire $\mathcal{P} = \{p_1, \cdots, p_k\}$, où $p_1, \cdots, p_k$ sont des nombres premiers. On introduit alors l'entier naturel $N = p_1 \cdots p_k + 1$. Montrons que N n'est divisible par aucun des p_i ($i \in [\![1, k]\!]$). S'il existe $i \in [\![1, k]\!]$ tel que p_i divise N, alors on peut écrire $N = q \times p_i$, avec $q \in \mathbb{N}$. On a alors $q \times p_i = p_1 \cdots p_k + 1$, soit :

Preuve par contraposition.

$$p_i \times \underbrace{(q - p_1 \cdots p_{i-1} p_{i+1} \cdots p_k)}_{s} = 1.$$

Ainsi, p_i et s sont deux entiers dont le produit vaut un : chacun des deux est donc égal à 1 ou à -1. En particulier, p_i vaut 1 ou -1, il n'est donc pas premier. Finalement, on a montré (par contraposition) que N n'est divisible par aucun des p_i. On en déduit que N est un nombre premier. Or, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $N > p_i$. On a donc trouvé un nombre premier qui n'est égal à aucun des p_i. Par conséquent, l'ensemble $\mathcal{P}$ a au moins $k + 1$ éléments, ce qui est contradictoire ! En définitive, l'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers est infini. ▲

Exercice 1.13

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}(n)$: « $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ».

- **Initialisation :** $\mathcal{P}(1)$ est vraie puisque $1 = \frac{1\times2\times3}{6}$.
- **Hérédité :** On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$: $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Alors :

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= (n+1)\left[\frac{n(2n+1)}{6} + n + 1\right] \\ &= \frac{n+1}{6}(2n^2 + 7n + 6). \end{aligned}$$

Les racines du trinôme $2n^2+7n+6$ étant -2 et $-\frac{3}{2}$, on en déduit que :

$$1^2+2^2+\cdots+(n+1)^2=\frac{n+1}{6}\times 2(n+2)(n+\frac{3}{2})=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6},$$

ce qui démontre $\mathcal{P}(n+1)$.

• **Conclusion :** Par récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n\geqslant 1$.

2. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on note cette fois $\mathcal{P}(n)$: « $1^3+2^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ ».

• **Initialisation :** $\mathcal{P}(1)$ est vraie puisque $1=\frac{1\times 4}{4}$.

• **Hérédité :** Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie à un rang $n\geqslant 1$ fixé : $1^3+2^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Alors :

$$\begin{aligned}1^3+2^3+\cdots+(n+1)^3&=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3=(n+1)^2\left(\frac{n^2}{4}+n+1\right)\\&=(n+1)^2\left(\frac{n^2+4n+4}{4}\right)=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.\end{aligned}$$

On retrouvera les deux sommes de cet exercice dans le chapitre **Calcul algébrique**.

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

• **Conclusion :** Par récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. ▲

Exercice 1.14

Dans les deux cas, on applique une récurrence simple.

1. Pour $n\in\mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$: « $0!+1!+\cdots+n!\leqslant(n+1)!$ ».

• **Initialisation :** $\mathcal{P}(0)$ est vraie puisque $0!=1$ et $(0+1)!=1!=1$.

• **Hérédité :** On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie à un rang $n\in\mathbb{N}$: $0!+1!+\cdots+n!\leqslant(n+1)!$. Alors :

$$\underbrace{0!+1!+\cdots+n!}_{\leqslant(n+1)!\text{ d'après }\mathcal{P}(n)}+(n+1)!\leqslant(n+1)!+(n+1)!.$$

Or $2(n+1)!\leqslant(n+2)!$ puisque $(n+2)!=(n+2)(n+1)!$. Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$2\leqslant n+2$

• **Conclusion :** On a démontré l'inégalité attendue par récurrence sur n.

2. Pour $n\in\mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}(n)$: « 9 divise 10^n-1 ».

0 est divisible par tout entier non nul !

• **Initialisation :** $\mathcal{P}(0)$ est vraie puisque $10^0-1=1-1=0$ et 0 est divisible par 9.

• **Hérédité :** On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée pour un certain $n\in\mathbb{N}$, c'est-à-dire que 9 divise 10^n-1, ce qui équivaut à dire qu'il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que $10^n-1=9k$. Alors :

a divise b ssi il existe $c\in\mathbb{Z}$, $b=ac$.

$$10^{n+1}-1=10\times 10^n-1=10(9k+1)-1=9\times 10k+9=9(10k+1),$$

ou encore $10^{n+1}-1=9k'$, avec $k'=10k+1$. Cela signifie que 9 divise $10^{n+1}-1$: c'est $\mathcal{P}(n+1)$.

• **Conclusion :** Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$, 9 divise 10^n-1. ▲

Exercice 1.15

On effectue une récurrence double en notant, pour $n\in\mathbb{N}$:

$$\mathcal{P}(n):\ «u_n=u_0+nr».$$

• **Initialisation :** $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies puisque $u_0 = u_0 + 0 \times r$ et $u_1 = u_0 + u_1 - u_0 = u_0 + r$.
• **Hérédité :** On suppose que, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies, c'est-à-dire :

$$u_n = u_0 + nr \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = u_0 + (n+1)r.$$

Comme $u_{n+1} = \dfrac{u_n + u_{n+2}}{2}$, on a alors :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 2u_{n+1} - u_n = 2[u_0 + (n+1)r] - (u_0 + nr) \\ &= u_0 + [2(n+1) - n]r = u_0 + (n+2)r, \end{aligned}$$

ce qui montre que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.
• **Conclusion :** Par récurrence double, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est ainsi vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On déduit de l'égalité démontrée que (u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison $r = u_1 - u_0$. ▲

Exercice 1.16

On effectue une récurrence double en notant, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{P}(n) : \text{«}u_n = 2\cos(nx)\text{»}.$$

•**Initialisation :** $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies puisque $u_0 = 2 = 2\cos 0$ et $u_1 = 2\cos x$.
• **Hérédité :** On suppose que, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies :

$$u_n = 2\cos(nx) \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = 2\cos[(n+1)x].$$

Hypothèse de récurrence au rang n et $n+1$, formules d'addition et formules de duplication.

On en déduit que :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 2(\cos x)u_{n+1} - u_n = 2(\cos x)2\cos[(n+1)x] - 2\cos nx \\ &= 4\cos x(\cos nx\ \cos x - \sin nx\ \sin x) - 2\cos nx \\ &= 2\cos nx(2\cos^2 x - 1) - 4\cos x\ \sin x\ \sin nx \\ &= 2\cos 2x\cos nx - 2\sin 2x\sin nx = 2(\cos 2x\cos nx - \sin 2x\sin nx) \\ &= 2\cos[(n+2)x], \end{aligned}$$

ce qui montre que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.
• **Conclusion :** Par récurrence double, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. ▲

Exercice 1.17

On applique une récurrence forte. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}(n)$ la proposition : « il existe deux entiers $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $n = 2^p(2q+1)$ ».
• **Initialisation :** $\mathcal{P}(1)$ est vraie puisque $1 = 2^0(0+1)$ ($p = q = 0$ conviennent).
• **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $\mathcal{P}(1), \mathcal{P}(2), \cdots, \mathcal{P}(n)$ sont vraies.

Tout $k \in [\![1, n]\!]$ peut s'écrire sous la forme $2^p(2q+1)$.

On veut montrer que $n+1$ peut s'écrire sous la forme $2^p(2q+1)$, où $p, q \in \mathbb{N}$.
On distingue deux cas :
– si $n+1$ est impair, n est pair et le résultat est évident. En effet, il suffit de prendre $p = 0$ et $q \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2q$. On a alors $n+1 = 2q+1$.
– si $n+1$ est pair, il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $n+1 = 2k$. On peut alors appliquer

l'hypothèse de récurrence à k : il existe $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $k = 2^p(2q+1)$. Ainsi, $n+1 = 2k = 2 \times 2^p(2q+1) = 2^{p+1}(2q+1)$.
Finalement, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
• **Conclusion :** Le résultat attendu est établi par récurrence forte. ▲

Exercice 1.18

1. Montrons par récurrence double que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant n$.
• **Initialisation :** L'inégalité est vraie aux rangs 0 et 1 puisque $u_0 = 1 \geqslant 0$ et $u_1 = 1 \geqslant 1$.

Récurrence double : on suppose le résultat vrai aux rangs n et $n+1$, on le démontre au rang $n+2$.

•**Hérédité :** On suppose que l'inégalité est vraie aux rangs n et $n+1$: $u_n \geqslant n$ et $u_{n+1} \geqslant n+1$. D'après la relation $(*)$, on a alors $u_{n+2} = u_{n+1}+u_n \geqslant n+1+n$. Si $n = 0$, alors $u_2 = 2 \geqslant 2$ et si $n \geqslant 1$, alors $n+n+1 \geqslant n+2$. Cela montre que l'inégalité est vraie au rang $n+2$.
• **Conclusion :** Par récurrence double, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Par ailleurs, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Théorème de comparaison

2. On démontre cette fois l'égalité à l'aide d'une récurrence simple.
•**Initialisation :** L'égalité est vraie au rang 1 puisque $u_1^2 - u_0u_2 = 1^2 - 1 \times 2 = -1 = (-1)^1$.
• **Hérédité :** On suppose que $u_n^2 - u_{n-1}u_{n+1} = (-1)^n$, pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. D'après la relation $(*)$, on a :

$$u_{n+1}^2 - u_nu_{n+2} = u_{n+1}^2 - u_n(u_n + u_{n+1}) = u_{n+1}^2 - u_n^2 - u_nu_{n+1},$$

c'est-à-dire, d'après l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} u_{n+1}^2 - u_nu_{n+2} &= u_{n+1}^2 - [u_{n-1}u_{n+1} + (-1)^n] - u_nu_{n+1} \\ &= u_{n+1}^2 - u_{n+1}(u_n + u_{n-1}) + (-1)^{n+1} \\ &= u_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 + (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

car $u_{n-1}+u_n = u_{n+1}$ d'après $(*)$. Ainsi, $u_{n+1}^2 - u_nu_{n+2} = (-1)^{n+1}$ et l'égalité est vraie au rang $n+1$.
• **Conclusion :** Par récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. On effectue de nouveau une récurrence simple.
•**Initialisation :** L'égalité est vraie au rang 1 car $u_1 = 1 = 2 - 1 = u_2 - 1$.
• **Hérédité :** On suppose que l'égalité est vraie au rang $n \geqslant 1$. On a alors :

$$u_1 + \cdots + u_{2n-1} + u_{2n+1} = (u_1 + \cdots + u_{2n-1}) + u_{2n+1} = u_{2n} - 1 + u_{2n+1}.$$

Or, $u_{2n} + u_{2n+1} = u_{2n+2}$ d'après la relation $(*)$; d'où :

$$u_1 + u_3 + \cdots + u_{2n+1} = u_{2n+2} - 1,$$

ce qui démontre l'égalité au rang $n+1$.
• **Conclusion :** Par récurrence, la propriété est établie pour tout entier $n \geqslant 1$.

4. Encore une récurrence simple !
• **Initialisation :** L'égalité est vraie au rang 0 puisque $u_0 = 1 = 2 - 1 = u_2 - 1$.
• **Hérédité :** On suppose que l'égalité est vérifiée au rang n, alors :

$$\begin{aligned} u_0 + \cdots + u_n + u_{n+1} &= (u_0 + \cdots + u_n) + u_{n+1} = u_{n+2} - 1 + u_{n+1} \\ &= u_{n+3} - 1, \end{aligned}$$

la dernière égalité résultant de $(*)$. Ainsi, l'égalité est vraie au rang $n+1$.
• **Conclusion :** Par récurrence simple, l'égalité est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. ▲

Exercice 1.19

Dans les deux cas, on applique une récurrence simple.

1. Pour $n \geqslant 2$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} > \frac{3n}{2n+1}$ ».
• **Initialisation :** $\mathcal{P}(2)$ est vraie puisque $1 + \frac{1}{2^2} = \frac{5}{4}$, $\frac{3\times 2}{2\times 2+1} = \frac{6}{5}$ et $\frac{5}{4} > \frac{6}{5}$.
• **Hérédité :** On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie à un rang $n \geqslant 2$ fixé, c'est-à-dire que $1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} > \frac{3n}{2n+1}$.
On a alors

$$1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} > \frac{3n}{2n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Il reste à montrer que $\frac{3n}{2n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} \geqslant \frac{3(n+1)}{2(n+1)+1}$.
Or, en notant $\Delta = \frac{3n}{2n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{3(n+1)}{2(n+1)+1}$, on a :

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{3n(n+1)^2(2n+3) + (2n+1)(2n+3) - 3(2n+1)(n+1)^3}{(2n+1)(n+1)^2(2n+3)} \\ &= \frac{n^2+2n}{(2n+1)(n+1)^2(2n+3)} \geqslant 0.\end{aligned}$$

Cela démontre $\mathcal{P}(n+1)$.
• **Conclusion :** Par récurrence, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée pour tout entier $n \geqslant 2$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}(n)$: « $1! \times 3! \times \cdots \times (2n+1)! \geqslant \big[(n+1)!\big]^{n+1}$ ».
• **Initialisation :** $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée puisque $1! = 1$, $(1!)^1 = 1$ et $1 \geqslant 1$.
• **Hérédité :** On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie à un rang $n \in \mathbb{N}$ fixé :

$$1! \times 3! \times \cdots \times (2n+1)! \geqslant \big[(n+1)!\big]^{n+1}.$$

Alors :

$$1! \times 3! \times \cdots \times (2n+1)! \times (2(n+1)+1)! = 1! \times \cdots \times (2n+1)! \times (2n+3)!$$

et, d'après $\mathcal{P}(n)$,

$$1! \times 3! \times \cdots \times (2n+1)! \times (2n+3)! \geqslant \big[(n+1)!\big]^{n+1}(2n+3)!$$

Ici, étudier le signe de la différence n'est pas facile...

Il reste à montrer que $\big[(n+1)!\big]^{n+1}(2n+3)! \geqslant \big[(n+2)!\big]^{n+2}$. Pour comparer ces deux nombres (positifs), il est plus simple, cette fois, d'étudier leur quotient. On a :

$$\begin{aligned}\frac{\big[(n+1)!\big]^{n+1}(2n+3)!}{\big[(n+2)!\big]^{n+2}} &= \frac{\big[(n+1)!\big]^{n+1}(2n+3)!}{(n+2)^{n+2}\big[(n+1)!\big]^{n+2}} = \frac{(2n+3)!}{(n+2)^{n+2}(n+1)!} \\ &= \frac{(2n+3)(2n+2)\cdots(n+2)(n+1)!}{(n+2)^{n+2}(n+1)!} \\ &= \frac{(2n+3)(2n+2)\cdots(n+2)}{(n+2)(n+2)\cdots(n+2)}.\end{aligned}$$

Cette quantité est supérieure à 1 (c'est un produit de $n+2$ facteurs supérieurs à 1), ce qui démontre $\mathcal{P}(n+1)$.
• **Conclusion :** Par récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. ▲

Exercice 1.20

Tout d'abord, l'inégalité arithmético-géométrique donnée en indication résulte du fait que :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+,\ a + b - 2\sqrt{ab} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqslant 0.$$

On montre ensuite l'inégalité attendue en appliquant une récurrence simple.
• **Initialisation :** Si $n = 1$, $x_1 \times \frac{1}{x_1} = 1$ et l'inégalité est vraie au rang 1.
• **Hérédité :** On suppose que, pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé et tous réels $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$:

$$(x_1 + x_2 + \cdots x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right) \geqslant n^2.$$

Considérons maintenant des réels $x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}$ strictement positifs. En notant $A = x_1 + x_2 + \cdots x_n$ et $B = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}$, on souhaite montrer que :

$$(A + x_{n+1})\left(B + \frac{1}{x_{n+1}}\right) \geqslant (n+1)^2. \tag{1.1}$$

Or,

$$(A + x_{n+1})\left(B + \frac{1}{x_{n+1}}\right) = AB + \frac{A}{x_{n+1}} + Bx_{n+1} + 1,$$

et, d'après l'hypothèse de récurrence et l'inégalité arithmético-géométrique, on a $AB \geqslant n^2$ et

✎ $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$, *avec* $a = \frac{A}{x_{n+1}}$, $b = Bx_{n+1}$

$$\frac{A}{x_{n+1}} + Bx_{n+1} \geqslant 2\sqrt{\frac{A}{x_{n+1}} \times Bx_{n+1}} \geqslant 2\sqrt{AB} \geqslant 2n.$$

Ainsi, $(A + x_{n+1})\left(B + \frac{1}{x_{n+1}}\right) \geqslant n^2 + 2n + 1$, ce qui démontre l'inégalité (1.1).
• **Conclusion :** Finalement, on a établi l'inégalité souhaitée par récurrence simple. ▲

Corrigé

Chapitre 2

Ensembles et applications

UN MATHÉMATICIEN

« *L'essence même des mathématiques, c'est leur liberté* » disait **Georg Cantor**, mathématicien allemand né à Saint Pétersbourg, connu pour avoir été le père de la théorie des ensembles. C'est dans les années 1870 qu'il fonde cette théorie en lien avec son compatriote Richard Dedekind et qu'il définit la notion de cardinal pour les ensembles infinis. Ses théories révolutionnaires furent mal accueillies par certains mais sont désormais acceptées par tous.

Un peu d'histoire

La théorie des ensembles est un cadre dans lequel s'inscrivent toutes les branches des mathématiques. Au tout début des années 1870, Georg Cantor s'intéresse aux points où certaines fonctions ont des comportements atypiques. Cela l'amène à étendre la notion de cardinal (nombre d'éléments) à des ensembles infinis. Il montre que des ensembles infinis peuvent avoir le même cardinal, comme une droite et un plan, mais qu'aussi, il existe différents cardinaux infinis.

Le mathématicien Giuseppe Peano rédige en 1895 un formulaire mathématique qui popularise cette théorie dans lequel il introduit plusieurs symboles que nous utilisons encore.

Le logicien anglais Bertrand Russell énonce un paradoxe qui montre que l'on ne peut nommer ensemble n'importe quoi. Pour pallier ce problème, Ernst Zermelo définit des axiomes sur lesquels doit s'appuyer la théorie des ensembles.

Objectifs

les incontournables

- Savoir démontrer l'égalité de deux ensembles.
- Savoir montrer qu'une application est (ou n'est pas) injective, surjective, bijective.
- Déterminer l'application réciproque d'une application bijective.
- Déterminer l'image directe ou réciproque d'une partie.

et plus si affinités

- Manipuler ces différentes notions dans des exercices théoriques.
- Déterminer l'application réciproque d'une bijection.

Résumé de cours

Ensembles

Appartenance, inclusion

Définition : *Soit E un ensemble. On dit que x* ***est un élément*** *de E lorsque x appartient à E. On note alors $x \in E$. Lorsque x n'appartient pas à E, on note $x \notin E$.*

Définition : *On appelle* ***ensemble vide*** *l'ensemble qui ne contient aucun élément. On le note $\emptyset$.*

Définition : *Soit A et B deux ensembles. On dit que*

- *A* ***est inclus dans*** *B lorsque tout élément de A est un élément de B. On note alors $A \subset B$.*
- *A et B* ***sont égaux*** *lorsque $A \subset B$ et $B \subset A$. On note $A = B$.*

Définition : *Lorsque $A \subset E$, on dit que A est un* ***sous-ensemble*** *(ou une partie) de E.*

Notation : *Si E est un ensemble, on note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.*

Opérations sur les parties d'un ensemble

Définition : *Soit E un ensemble, A et B deux parties de E. On appelle*

- ***réunion*** *de A et B l'ensemble $A \cup B = \{x \in E,\ x \in A \text{ ou } x \in B\}$;*
- ***intersection*** *de A et B l'ensemble $A \cap B = \{x \in E,\ x \in A \text{ et } x \in B\}$;*
- ***complémentaire*** *de A dans E l'ensemble $\overline{A} = \{x \in E,\ x \notin A\}$;*
- ***différence*** *de A et B l'ensemble $A \setminus B = \{x \in E,\ x \in A \text{ et } x \notin B\} = A \cap \overline{B}$.*

Notation : *Le complémentaire $\overline{A}$ de A dans E se note aussi $\complement_E^A$, A^c ou $E \setminus A$.*

Proposition 2.1.— Distributivité —. Soit A, B et C des parties d'un ensemble E.

- L'intersection est distributive par rapport à la réunion : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- La réunion est distributive par rapport à l'intersection : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Proposition 2.2.— Lois de Morgan —. Soit A et B deux parties d'un ensemble E. Alors :

- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Définition : Produit cartésien de deux ensembles —. *Soit E et F deux ensembles. On appelle* ***produit cartésien*** *de E et F et on note $E \times F$ l'ensemble des couples (x, y), avec $x \in E$ et $y \in F$:*

$$E \times F = \{(x, y)\ ;\ x \in E,\ y \in F\}.$$

Définition : Produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles —. *Soit $E_1, \ldots, E_p$ des ensembles. On appelle p-uplet $(x_1, \cdots, x_p)$ la donnée de $x_1 \in E_1, \cdots, x_p \in E_p$ dans cet ordre. L'ensemble des p-uplets $(x_1, \ldots, x_p)$ avec $x_1 \in E_1, \ldots, x_p \in E_p$ est appelé* ***produit cartésien*** *de $E_1, \ldots, E_p$. On le note $E_1 \times \cdots \times E_p$.*

Notation : *Lorsque $E_1 = \cdots = E_p = E$ on note E^p le produit cartésien de E par lui-même p fois.*

■ Ensemble des entiers naturels

Relation de divisibilité

Définition : *Soit a et b deux entiers naturels. On dit que a est un* ***multiple*** *de b ou que b est un* ***diviseur*** *de a s'il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $a = bq$. On note alors $b \mid a$.*

Théorème 2.3.— Division euclidienne dans $\mathbb{N}$ —. Soit $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^\star$.

Il existe un couple $(q, r) \in \mathbb{N}^2$, **unique** tel que :
- $a = bq + r$
- $0 \leqslant r < b$

Proposition 2.4.— Soit $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^\star$, alors :

b divise a *si et seulement si* le reste de la division euclidienne de a par b est nul.

PGCD, PPCM de deux entiers

Définition : *Soit $a, b \in \mathbb{N}$ deux entiers.*

- *Si a ou b est non nul, le plus grand entier, diviseur de a et de b est appelé* ***plus grand diviseur commun*** *à a et b. Cet entier naturel est noté $PGCD(a, b)$.*
- *Si a et b sont non nuls, le plus petit entier strictement positif, multiple de a et de b est appelé* ***plus petit multiple commun*** *à a et b. Cet entier naturel est noté $PGCD(a, b)$.*

En pratique : $PGCD(a, b)$ peut être calculé au moyen de l'algorithme d'Euclide (**méthode 2.3**).

Nombres premiers

Définition : *On appelle* ***nombre premier*** *tout entier naturel $p \geqslant 2$ dont les seuls diviseurs dans $\mathbb{N}$ sont 1 et p lui-même.*

Proposition 2.5.—

- Tout entier $n \geqslant 2$ possède au moins un diviseur premier.
- L'ensemble des nombres premiers est infini.

Théorème 2.6.— Décomposition d'un entier en produit de nombres premiers —. Tout entier $n \geqslant 2$ se décompose de manière unique sous la forme :

$$n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots \times p_N^{\alpha_N}$$

où $p_1, \ldots, p_N$ sont premiers ($p_1 < \cdots < p_N$) et $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ des entiers naturels non nuls.

■ Applications

Généralités

Définition : *Une* ***application*** *– ou une fonction – $f : E \to F$ est un procédé qui à tout élément x de E, associe un unique élément y de F. Cet élément s'appelle l'**image de x par f**. On le note $f(x)$. L'application f elle-même est notée :* $f : \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$.

Notation : *L'ensemble des applications de E dans F est noté $\mathcal{F}(E,F)$ ou F^E.*

Vocabulaire : *Soit f une application de E dans F et $y \in F$. Lorsqu'il existe un élément $x \in E$ tel que $y = f(x)$, on dit que x est un* ***antécédent*** *de y par f.*

Définition : *Soit E un ensemble et I un ensemble fini. On appelle* ***famille d'éléments*** *de E indexée par I toute application de I dans E. On note $(x_i)_{i\in I}$ une telle famille.*

Définition : *Soit E un ensemble et A une partie de E. On appelle* ***fonction indicatrice de A*** *et on note $\mathbf{1}_A$ la fonction de E dans $\{0,1\}$ définie par :*

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in A \\ 0 & si\ x \notin A \end{cases}$$

Définition : *Soit E, F, G trois ensembles, f une application de E dans F et g une application de F dans G. On appelle* ***composée*** *de f par g et on note $g \circ f$ l'application de E dans G définie par* $g \circ f : \begin{array}{ccc} E & \to & G \\ x & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$.

Définition : *Soit E un ensemble. On appelle* ***application identité*** *de E (ou* ***application identique*** *sur E) et on note id_E l'application de E dans E définie par* $id_E : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x \end{array}$.

Proposition 2.7.— Pour toutes applications $f : E \to F$ et $g : F \to E$ on a

$$f \circ id_E = f \text{ et } \quad id_E \circ g = g$$

Définition : *Soit E et F deux ensembles, f une application de E dans F et A une partie de E. On appelle* ***restriction*** *de f à A et on note $f_{|A}$ l'application de A dans F définie par*

$$f_{|A} : \begin{array}{ccc} A & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

Définition : *Soit E et F deux ensembles, f une application de E dans F et G un ensemble contenant E. On appelle* ***prolongement*** *de f à G toute application g de G dans F telle que, pour tout $x \in E$, $g(x) = f(x)$.*

Images directe et réciproque d'une partie

Définition : *Soit E, F des ensembles, $f : E \to F$ et $A \subset E$ et $B \subset F$.*

- *L'**image directe** de A par f est le sous-ensemble de F défini par :*
$$f(A) = \{f(x),\ x \in A\} = \{y \in F,\ \exists x \in A,\ y = f(x)\}.$$
- *L'**image réciproque** de B par f est le sous-ensemble de E défini par :*
$$f^{-1}(B) = \{x \in E,\ f(x) \in B\}.$$

Retenez que : $\forall y \in F,\ y \in f(A) \iff \exists x \in A,\ y = f(x)$ et $\forall x \in E,\ x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B$.

■ Applications injectives, surjectives, bijectives

Définition : Application injective —. *Soit f une application de E dans F. On dit que f est* ***injective*** *(ou que f est une* ***injection****) lorsque tout élément de F possède* ***au plus*** *un antécédent par f ; c'est-à-dire lorsque :*

$$\boxed{\forall (x,x') \in E \times E,\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.}$$

Remarque : de manière équivalente, une application $f : E \to F$ est injective lorsque $\forall (x,x') \in E \times E,\ x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$.

Théorème 2.8.— La composée de deux applications injectives est injective.

Définition : Application surjective —. *Soit f une application de E dans F. On dit que f est* ***surjective*** *(ou que f est une* ***surjection****) lorsque tout élément de F possède* ***au moins*** *un antécédent par f ; c'est-à-dire lorsque :*

$$\boxed{\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x).}$$

Théorème 2.9.— La composée de deux applications surjectives est surjective.

Définition : Application bijective —. *Soit f une application de E dans F. On dit que f est* ***bijective*** *(ou que f est une* ***bijection****) lorsque f est à la fois injective et surjective. Autrement dit, f est bijective lorsque tout élément de F possède* ***un unique*** *antécédent par f.*

Remarque : dire qu'une application f de E dans F est bijective équivaut à dire que, pour tout $b \in F$, l'équation $f(x) = b$ admet une unique solution dans E.

Définition : Application réciproque d'une bijection —. *Soit f une bijection de E dans F. On appelle* ***application réciproque*** *(ou* ***bijection réciproque****) de f et on note f^{-1} l'application de F dans E qui, à tout élément y de F, associe son unique antécédent par f. Par définition, on a :*

$$\boxed{\forall (x,y) \in E \times F,\ y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).}$$

Proposition 2.10.— Soit f une bijection de E dans F et $f^{-1} : F \to E$ son application réciproque. Alors :

$$\boxed{f \circ f^{-1} = id_F \quad \text{et} \quad f^{-1} \circ f = id_E.}$$

Théorème 2.11.— Caractérisation de la bijection réciproque —. Une application $f : E \to F$ est bijective si et seulement si il existe une application $g : F \to E$ vérifiant $f \circ g = id_F$ et $g \circ f = id_E$. Dans ce cas, g est l'application réciproque de f : $g = f^{-1}$.

Théorème 2.12.— Composée de deux bijections —. Soit f une application de E dans F et g une application de F dans G. Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est une bijection de E dans G et on a :

$$\boxed{(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.}$$

Méthodes

Ensembles

Méthode 2.1.— Comment montrer l'égalité de deux ensembles
Pour établir l'égalité de deux ensembles A et B, on peut :

- Procéder par double inclusion en prouvant que $A \subset B$ et $B \subset A$. Pour montrer que $A \subset B$, on prend un élément quelconque de A et on montre qu'il appartient aussi à B ;
- Montrer directement l'égalité en utilisant des opérations usuelles sur les ensembles (réunion, intersection, distributivité, lois de Morgan...).

Exemple : soit A, B et C trois parties d'un ensemble E. On suppose que $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$. Montrer que $B = C$.

On va appliquer chacune des deux méthodes présentées ci-dessus.

- **Première méthode : double inclusion**
  – Montrons que $B \subset C$. Soit x un élément de B. On veut montrer que $x \in C$. Comme $x \in A \cup B$ (car $A \subset A \cup B$), x appartient à $A \cup C$ d'après la première hypothèse ; c'est-à-dire $x \in A$ ou $x \in C$. Si $x \in C$, on a le résultat attendu. Si $x \in A$, alors x appartient à $A \cap B$, donc à $A \cap C$ d'après la deuxième hypothèse, et cela montre que $x \in C$. Dans les deux cas, x appartient à C. Ainsi, $B \subset C$.
  – Étant donné la symétrie des hypothèses sur B et C, le même raisonnement montre que $C \subset B$.
  Comme $B \subset C$ et $C \subset B$, les ensembles B et C sont égaux.
- **Deuxième méthode : utilisation d'opérations sur les ensembles**
  Tout d'abord, $B = B \cup (A \cap B)$. D'après la deuxième hypothèse, on a alors $B = B \cup (A \cap C)$. Par distributivité, cette relation s'écrit aussi :

  $$B = B \cup (A \cap C) = (B \cup A) \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cap (B \cup C),$$

  ou encore $B = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ d'après la première hypothèse. En utilisant de nouveau la distributivité, cette dernière égalité s'écrit :

  $$B = C \cup (A \cap B),$$

  c'est-à-dire $B = C$ puisque $C = C \cup (A \cap C)$.

Mise en œuvre : exercice 2.1, exercice 2.3.

❑ **Méthode 2.2.— Comment montrer qu'un entier est divisible par un autre**
Pour montrer que a divise b, on peut :

- Revenir à la définition. On démontre qu'il existe un entier c tel que $b = ac$.
- Utiliser la division euclidienne de b par a. Il suffit de démontrer que le reste de la division euclidienne de b par a est nul.
- Utiliser la décomposition de a et b en produit de facteurs premiers. Il s'agit de montrer que tous les facteurs premiers de a apparaissent aussi dans la décomposition de b, avec une puissance supérieure.

Calcul du PGCD par l'algorithme d'Euclide

L'algorithme d'Euclide se fonde sur le fait suivant :

Lemme 2.13.— Soit $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$. Notons r le reste de la division euclidienne de a par b. Alors

$$PGCD(a, b) = PGCD(b, r)$$

Remarque : si r est nul, on obtient alors $PGCD(a, b) = PGCD(b, r) = PGCD(b, 0) = b$.

Principe de l'algorithme d'Euclide

On souhaite calculer $d = PGCD(a, b)$. Notons $a_0 = \max\{a, b\}$ et $a_1 = \min\{a, b\}$, de sorte que $d = PGCD(a_0, a_1)$.

- **Étape 1**. Deux cas se présentent :
  - Si $a_1 = 0$, alors $d = PGCD(a_0, a_1) = a_0$.
  - Si $a_1 \neq 0$, effectuons la division euclidienne de a_0 par a_1 : $a_0 = q_1 a_1 + a_2$, où $0 \leqslant a_2 < a_1$. D'après le lemme précédent, $d = PGCD(a_1, a_2)$.
- **Étape 2**. Deux cas se présentent :
  - Si $a_2 = 0$, alors $d = PGCD(a_0, a_1) = PGCD(a_1, a_2) = a_1$.
  - Si $a_2 \neq 0$, effectuons la division euclidienne de a_1 par a_2 : $a_1 = q_2 a_2 + a_3$, où $0 \leqslant a_3 < a_2$. D'après le lemme, $d = PGCD(a_0, a_1) = PGCD(a_1, a_2) = PGCD(a_2, a_3)$.
- **Étape 3**. Ainsi de suite ...

Comme $a_0, a_1, a_2, a_3 \ldots$ sont des entiers naturels et $a_0 \geqslant a_1 > a_2 > a_3 > \cdots$, il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que a_{m+1} soit nul. Si tel est le cas,

$$d = PGCD(a_0, a_1) = PGCD(a_1, a_2) = \cdots = PGCD(a_m, a_{m+1}) = PGCD(a_m, 0) = a_m$$

Résumons :

❑ **Méthode 2.3.— Algorithme d'Euclide**
Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, $(a, b) \neq (0, 0)$, on calcule $d = PGCD(a, b)$. Pour cela :

- On pose $a_0 = \max\{a, b\}$ et $a_1 = \min\{a, b\}$.
- On effectue des divisions euclidiennes successives jusqu'à l'obtention d'un reste nul :

$$\forall k \in [\![1, m]\!],\ a_{k-1} = a_k q_k + a_{k+1} \text{ avec } a_0 \geqslant a_1 > a_2 > \cdots > a_m > a_{m+1} = 0$$

- $d = a_m$ est le dernier reste non nul dans l'algorithme d'Euclide.

Exemple : calculons le PGCD de 162 et 207.

$$\begin{aligned} 207 &= 1 \times 162 + 45 \\ 162 &= 3 \times 45 + 27 \\ 45 &= 1 \times 27 + 18 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 27 &= 1 \times 18 + \boxed{9} \\ 18 &= 2 \times 9 + 0 \end{aligned}$$

D'où $PGCD(207, 162) = 9$.

■ Applications injectives, surjectives, bijectives

Applications injectives

> ❑ **Méthode 2.4.— Comment montrer qu'une application est injective**
> Pour prouver qu'une application $f : E \to F$ est injective, on peut :
> - considérer deux éléments de E qui ont la même image par f et montrer qu'ils sont égaux. On écrit : « soit x et x' deux éléments de E tels que $f(x) = f(x')$ » et on montre que $x = x'$. C'est la méthode la plus fréquemment utilisée ;
> - montrer que, pour tout $b \in F$, l'équation $f(x) = b$ a **au plus** une solution dans E. On écrit : « soit $b \in F$ » et on mène la résolution de l'équation jusqu'à vérifier que celle-ci n'a pas plus d'une solution ;
> - dans certains cas, considérer deux éléments distincts de E et montrer qu'ils n'ont pas la même image par f.

Exemple : l'application $f : \begin{cases} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & 2n \end{cases}$ est injective.

En effet, soit n et n' deux entiers naturels tels que $f(n) = f(n')$. On a alors $2n = 2n'$, d'où $n = n'$. Cela montre que f est injective.

Exemple : soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans $\mathbb{R}$, strictement monotone. Alors f est injective. Pour le démontrer, nous utilisons cette fois le troisième point de la **méthode 2.4**. Soit x et x' deux éléments distincts de I. On a, par exemple, $x < x'$. Comme f est strictement monotone, on a nécessairement $f(x) \neq f(x')$ ($f(x) < f(x')$ si f est strictement croissante et $f(x) > f(x')$ si f est strictement décroissante). La fonction f est donc injective.

> ❑ **Méthode 2.5.— Comment montrer qu'une application n'est pas injective**
> Pour montrer qu'une application $f : E \to F$ n'est pas injective, il suffit de trouver deux éléments distincts de E qui ont la même image par f.

Exemple : l'application $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$ n'est pas injective.

En effet, on a (par exemple) $g(2) = 1$ et $g(3) = 1$. La fonction g n'est pas injective puisque 2 et 3 ont la même image par g. Plus généralement, tout entier pair a la même image par g que l'entier impair qui le suit.

Appllications surjectives

> ❑ **Méthode 2.6.— Comment montrer qu'une application est surjective**
> Pour prouver qu'une application $f : E \to F$ est surjective, on considère un élément quelconque y de F et l'on détermine un antécédent de y par f. Il s'agit ainsi de montrer que l'équation $f(x) = y$, d'inconnue $x \in E$, admet **au moins** une solution. Bien souvent, le problème revient à résoudre explicitement cette équation.

Exemple : l'application $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$ est surjective.

Soit m un entier naturel quelconque. Montrons que m a un antécédent par g, c'est-à-dire qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $g(n) = m$. Comme $2m$ est pair, on a $g(2m) = \frac{2m}{2} = m$; $2m$ est donc un antécédent de m par g. Comme tout entier naturel admet au moins un antécédent par g, l'application g est surjective.

> ❑ **Méthode 2.7.— Comment montrer qu'une application n'est pas surjective**
> Pour montrer qu'une application $f : E \to F$ n'est pas surjective, il suffit de trouver **un** élément de F qui n'a pas d'antécédent par f dans E.

Exemple : l'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(n) = 2n$ n'est pas surjective. Par exemple, 3 n'a pas antécédent par f ($f(n)$ est pair pour tout $n \in \mathbb{N}$), f n'est donc pas surjective. Plus généralement, aucun entier impair n'a d'antécédent par f.

Applications bijectives

> ❑ **Méthode 2.8.— Comment montrer qu'une application est bijective, première méthode**
> Pour prouver qu'une application $f : E \to F$ est bijective, on peut :
> - montrer que f est injective **et** surjective ;
> - fixer un élément quelconque y de F et montrer que l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution x dans E ;
> - montrer qu'il existe une application $g : F \to E$ telle que $f \circ g = id_F$ et $g \circ f = id_E$ (voir la **proposition 2.11**).

Exemple : montrer que l'application f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$ définie par

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

est bijective.

• Notons, tout d'abord, que l'application f est bien à valeurs dans $\mathbb{Z}$. En effet, si n est pair, $\frac{n}{2}$ est un entier (naturel) et, si n est impair, $n+1$ est pair donc $-\frac{n+1}{2}$ est un entier (strictement négatif).

• Montrons maintenant que f est bijective en revenant à la définition (f injective et surjective).

– Soit n et n' deux entiers naturels tels que $f(n) = f(n')$. D'après la remarque ci-dessus, n et

n' ont alors la même parité (sinon $f(n)$ et $f(n')$ n'ont pas le même signe !). Si n et n' sont pairs, on a $\frac{n}{2} = \frac{n'}{2}$ donc $n = n'$. Si n et n' sont impairs, on a alors $-\frac{n+1}{2} = -\frac{n'+1}{2}$, d'où $n = n'$. Dans les deux cas, on obtient $n = n'$. Ainsi, l'application f est injective.

– Montrons maintenant que f est surjective. Soit m un entier relatif quelconque. Si $m \geqslant 0$, alors $2m \in \mathbb{N}$ et $f(2m) = \frac{2m}{2} = m$, donc $2m$ est un antécédent de m par f. Si $m < 0$, alors $-2m-1 \in \mathbb{N}$ et $f(-2m-1) = -\frac{-2m-1+1}{2} = m$: $-2m-1$ est un antécédent de m par f. Tout entier relatif admet donc un antécédent par f dans $\mathbb{N}$: f est surjective. Finalement, l'application f est bijective.

Exemple : l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = 3x + 7$ est bijective.
Pour le démontrer, utilisons le deuxième point de la **méthode 2.8**. Soit y un réel fixé. On résout l'équation $f(x) = y$ pour déterminer les antécédents de y. On a :

$$3x + 7 = y \Longleftrightarrow x = \frac{y-7}{3},$$

ce qui montre que $\frac{y-7}{3}$ est l'unique antécédent de y par f. On en déduit que f est bijective.

Mise en œuvre : exercice 2.16 et **exercice 2.17**.

❑ **Méthode 2.9.— Comment montrer qu'une application est bijective, deuxième méthode**
Pour prouver qu'une application f est bijective, on peut également utiliser un résultat d'analyse : le **théorème de la bijection bicontinue**. Si f est continue et strictement monotone sur l'intervalle I, f réalise une bijection de I vers l'intervalle $J = f(I)$.

Exemple : l'application $f : \begin{cases} [1, +\infty[& \to & [0, +\infty[\\ x & \mapsto & x - \frac{1}{x} \end{cases}$ est bijective.
En effet, f est dérivable sur $[1, +\infty[$ et, pour tout $x \geqslant 1$, $f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} > 0$. Par conséquent, f est continue et strictement croissante sur $I = [1, +\infty[$. D'après le théorème de la bijection bicontinue, f réalise une bijection de I vers $f(I)$. Comme

$$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,$$

on a $f(I) = [0, +\infty[$. On en déduit que l'application f est bijective.

Mise en œuvre : exercice 2.18.

❑ **Méthode 2.10.— Comment déterminer l'application réciproque d'une bijection**
On souhaite déterminer l'application réciproque d'une **bijection** f de E dans F.

- Si l'on a montré que, pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution, la bijection réciproque f^{-1} de f est l'application qui associe, à y, son unique antécédent.
- Si l'on a trouvé une application $g : F \to E$ telle que $f \circ g = id_F$ et $g \circ f = id_E$, l'application réciproque de f est g (on a $f^{-1} = g$).

Exemple : on reprend le deuxième exemple illustrant la **méthode 2.8**. Comme $\frac{y-7}{3}$ est l'unique antécédent de y par f, f^{-1} est l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f^{-1}(x) = \frac{x-7}{3}$.

Exemple : montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}\setminus\{3\} & \to & \mathbb{R}\setminus\{3\} \\ & x & \mapsto & \dfrac{3x+1}{x-3} \end{array}$$

est bijective et déterminer son application réciproque.

Tout d'abord, f est bien à valeurs dans $\mathbb{R}\setminus\{3\}$. En effet, si $f(x)=3$, alors $3x+1=3x-9$, ce qui est impossible. On considère maintenant un réel y distinct de 3 et on résout l'équation $f(x)=y$:

$$\begin{aligned} \frac{3x+1}{x-3}=y &\iff x(y-3)=3y+1 \\ &\iff x=\frac{3y+1}{y-3} \quad (\text{car } y\neq 3). \end{aligned}$$

L'unique antécédent de y est $\frac{3y+1}{y-3}$, qui est bien un réel distinct de 3 (même raison que ci-dessus). On en déduit que f est bijective et que f^{-1} est l'application de $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ dans $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ définie par :

$$f^{-1}(x)=\frac{3x+1}{x-3}.$$

On constate que $f^{-1}=f$. Dans ce cas particulier, on dit que f est une involution.

Exemple : soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f\circ f(x)-2f(x)=x$. Montrer que f est bijective et déterminer son application réciproque.

On applique cette fois la **méthode 2.10**. La relation vérifiée par f s'écrit $f\circ f-2f=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$, d'où :

$$f\circ(f-2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}})=(f-2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}})\circ f=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}.$$

On applique la **proposition 2.11**, avec ici $g=f-2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$. L'application f est bijective et f^{-1} est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f^{-1}(x)=f(x)-2x.$$

Mise en œuvre : exercice 2.16, **exercice 2.17** et **exercice 2.18**.

Vrai/Faux

	Vrai	Faux
1. Une fonction strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ est injective.	☐	☐
2. Une application qui n'est pas injective est surjective.	☐	☐
3. Si $f \circ g$ et $g \circ f$ existent, alors $f \circ g = g \circ f$.	☐	☐
4. $g \circ f$ est surjective si et seulement si f et g sont surjectives.	☐	☐
5. La restriction d'une injection est une injection.	☐	☐
6. Une involution (c'est-à-dire une application $f : E \to E$ vérifiant $f \circ f = \mathrm{Id}_E$) est bijective.	☐	☐
7. Si f et g sont des applications de E dans E telles que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$, alors f ou g est bijective.	☐	☐
8. Si deux applications f et g de E dans E ne sont pas bijectives, $g \circ f$ n'est pas bijective.	☐	☐
9. Si f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ non bijective, $f^{-1}([0,1])$ existe.	☐	☐
10. Si f est une bijection de E dans F et B une partie de F, l'image réciproque de B par f est égale à l'image directe de B par f^{-1}.	☐	☐

Énoncé des exercices

Ensembles

Exercice 2.1 : Soit A, B et C trois parties d'un ensemble E. Démontrer l'égalité suivante :

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

Exercice 2.2 : Soit E un ensemble, A, B et C des parties de E. On suppose que

$$\begin{array}{rcl} A \cup B & = & A \cap C \\ B \cup C & = & B \cap A \\ C \cup A & = & C \cap B \end{array}$$

Montrer que $A = B = C$.

Exercice 2.3* : Différence symétrique. Soit A et B deux parties d'un ensemble E. On appelle différence symétrique de A et B et on note $A \Delta B$ la partie de E définie par :

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

1. Montrer que $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
2. On suppose que $A \Delta B = A \cap B$. Montrer que $A = B = \emptyset$.
3. Soit C une partie de E. Montrer que $A \Delta B = A \Delta C$ si et seulement si $B = C$.
4. Résoudre l'équation d'inconnue $X \in \mathscr{P}(E)$: $A \Delta X = \emptyset$.

Exercice 2.4* : Soit A et B deux parties d'un ensemble E.
Résoudre les équations d'inconnue $X \in \mathscr{P}(E)$:
1. $X \cup A = B$.
2. $X \cap A = B$.

Entiers naturels

Exercice 2.5 : Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, n^2 divise $(n+1)^n - 1$.

Exercice 2.6 : Soit $a, b \in \mathbb{N}^\star$. On note q le quotient de la division euclidienne de $a - 1$ par b. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer, en fonction de q, le quotient de la division euclidienne de $ab^n - 1$ par b^{n+1}.

Exercice 2.7* : Nombres de Mersenne et nombres parfaits. Pour $a \geqslant 2$, on note $M_a = 2^a - 1$.
1. On suppose que M_a est un nombre premier. Montrer que a est égalememt un nombre premier.
2. On dit qu'un entier $n \geqslant 2$ est parfait lorsque la somme de ses diviseurs positifs est égale à $2n$. On suppose que M_a est un nombre premier. Démontrer que $2^{a-1} M_a$ est un nombre parfait.

Exercice 2.8* : Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations suivantes :
1. $xy = 2x + 3y$
2. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{5}$

■ Injectivité, surjectivité, bijectivité

Exercice 2.9 : Soit f et g les applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$f(n) = n+1 \; ; \qquad g(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ n-1 & \text{si } n \geqslant 1 \end{cases} .$$

1. Étudier l'injectivité et la surjectivité de ces applications.
2. Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$.

Exercice 2.10 : Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

1. $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x^2+1} \end{cases}$
2. $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y) \end{cases}$
3. $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x + \frac{1}{x^2+1} \end{cases}$
4. $f : \begin{cases} \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \setminus \{1\} & \to & \mathbb{Q} \\ (p,q) & \mapsto & p + \frac{1}{q} \end{cases}$

Exercice 2.11 : Soit E, F, G trois ensembles, f une application de E dans F et g une application de F dans G.
1. Montrer que, si $g \circ f$ est injective, alors f est injective. g est-elle nécessairement injective ?
2. Montrer que, si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective. f est-elle nécessairement surjective ?
3. On suppose que $E = G$ et que $f \circ g \circ f$ est bijective. Montrer que f et g sont bijectives.

Exercice 2.12* : Soit E un ensemble et f une application de E dans E vérifiant $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.

Exercice 2.13* : Soit f une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.
1. On suppose que f est injective et vérifie $f(n) \leqslant n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$.
2. On suppose que f est surjective et vérifie $f(n) \geqslant n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$.

Exercice 2.14 :** Soit A et B deux parties d'un ensemble E et f l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \to & \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B) \\ X & \mapsto & (X \cap A, X \cap B) \end{array} .$$

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que f soit injective.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que f soit surjective.

Exercice 2.15 :** Soit E un ensemble. Montrer qu'il n'existe pas d'application f surjective de E dans $\mathscr{P}(E)$.

■ Fonction réciproque d'une bijection

Exercice 2.16 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout nombre réel x par :

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}.$$

1. En discutant suivant la valeur de y, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$f(x) = y \tag{2.1}$$

2. L'application f est-elle injective, surjective, bijective ? Que vaut $f(\mathbb{R})$?
3. Montrer que f réalise une application -notée $f_{|}$- de $[-1, 1]$ dans lui-même. $f_{|}$ est-elle bijective ?

Exercice 2.17* : Soit $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ définie pour tout nombre réel x par :

$$f(x) = \frac{2x}{1 - x^2}$$

Montrer que f est bijective et déterminer son application réciproque.

Exercice 2.18 : Soit $f : [-1/2, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$.

1. Montrer que f réalise une bijection sur un intervalle J à préciser.
2. Expliciter l'application réciproque de f.

■ Image directe, image réciproque

Exercice 2.19 : On considère l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$f(x, y) = (x - 4y, 2x + 3y).$$

1. Montrer que f est bijective.
2. Déterminer $f(\Delta)$ et $f^{-1}(\Delta)$, où $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x + 2y = 1\}$.

Exercice 2.20* : Soit E et F deux ensembles, f une application de E dans F.

1. Montrer que, pour toute partie A de E, $A \subset f^{-1}(f(A))$.
2. Montrer que, pour toute partie B de F, $f(f^{-1}(B)) \subset B$.
3. Montrer que f est injective si et seulement si : $\forall A \in \mathscr{P}(E)$, $A = f^{-1}(f(A))$.
4. Montrer que f est surjective si et seulement si : $\forall B \in \mathscr{P}(F)$, $f(f^{-1}(B)) = B$.

Exercice 2.21 :** Soit E et F deux ensembles et f une application de E dans F. Montrer que f est bijective si et seulement si, pour toute partie A de E,

$$f\left(\complement_E^A\right) = \complement_F^{f(A)}.$$

Indications

Ex. 2.5

Formule du binôme !

Ex. 2.8

Pour la première équation, on pourra remarquer que $xy-2x-3y=(x-3)(y-2)-6$ *et se ramener ainsi à un problème de divisibilité. Procéder de même pour la deuxième équation.*

Ex. 2.13

On pourra appliquer une récurrence forte.

Ex. 2.14

Montrer que f *est injective (respectivement surjective) si et seulement si* $A \cup B = E$ *(respectivement* $A \cap B = \emptyset$*).*

Ex. 2.15

On pourra supposer qu'une telle fonction existe et utiliser la partie $A = \{x \in E,\ x \notin f(x)\}$.

Corrigé des vrai/faux

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
V	F	F	F	V	V	F	F	V	V

1. Une fonction strictement monotone sur $\mathbb{R}$ est injective (voir le deuxième exemple qui suit la **méthode 2.4**).
2. C'est évidemment faux. La fonction $x \mapsto x^2$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ n'est ni injective, ni surjective.
3. C'est tout aussi faux... Même lorsque les deux composées existent, f et g ne commutent pas en général. Par exemple, considérons les fonctions f et g, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définies par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x + 1$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f \circ g(x) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ et $g \circ f(x) = x^2 + 1$.
4. Lorsque f et g sont surjectives, leur composée l'est aussi mais la réciproque est fausse comme le montre l'exemple suivant. Si $f : \{1\} \to \{1;2\}$ et $g : \{1;2\} \to \{1\}$, alors f n'est pas surjective, bien que $g \circ f$ le soit.
5. Soit g la restriction à A d'une application injective $f : E \to F$ ($A \subset E$). Comme f est injective, tout $y \in F$ admet au plus un antécédent par f dans E, donc dans A puisque $A \subset E$. Cela montre que g est injective.
6. C'est un cas particulier de la **proposition 2.11** ($g = f$). On a alors $f^{-1} = f$.
7. Reprenons les applications f et g de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ utilisées en exemples plus-haut (**méthode 2.4** et **méthode 2.5**), définies par :

$$f(n) = 2n \qquad \text{et} \qquad g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $g \circ f(n) = g(2n) = n$, donc $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$. Pourtant ni f ni g n'est bijective (f n'est pas surjective et g n'est pas injective, comme nous l'avons vu plus haut).
8. L'exemple de la question précédente montre que c'est faux. En effet, $g \circ f$ est bijective ($g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$) alors que f et g ne le sont pas.
9. Même lorsque f^{-1} n'existe pas (c'est-à-dire lorsque f n'est pas bijective), l'image réciproque de $[0,1]$ (l'ensemble $f^{-1}([0,1])$) est parfaitement définie.
10. C'est vrai : les ensembles

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \ ; \ f(x) \in B\} \qquad \text{image réciproque de } B \text{ par } f$$
$$f^{-1}(B) = \{f^{-1}(y) \ ; \ y \in B\} \qquad \text{image directe de } B \text{ par } f^{-1}$$

sont égaux puisque les images des éléments de B par f^{-1} sont leurs antécédents par f. Il n'y a donc pas d'ambiguïté dans les notations. Il faut néanmoins se souvenir que le deuxième ensemble n'existe que si f est bijective, alors que le premier existe toujours.

Erreurs classiques

- La composée de deux applications non bijectives peut être bijective.
- Ne pas confondre l'ensemble d'arrivée d'une fonction et son image.
- Si f est une application de E dans F, ne pas confondre l'image réciproque d'une partie B de F (qui existe **toujours**) et son image directe par f^{-1} (qui n'existe que si f est bijective).

Corrigé des exercices

Exercice 2.1

On démontre cette égalité en utilisant des opérations sur les ensembles (**méthode 2.1**, deuxième possibilité). Comme $A \setminus (B \cap C) = A \cap \complement_E^{B \cap C}$, on a :

$$\begin{aligned} A \setminus (B \cap C) &= A \cap \complement_E^{B \cap C} = A \cap \left(\complement_E^B \cup \complement_E^C\right) = (A \cap \complement_E^B) \cup (A \cap \complement_E^C) \\ &= (A \setminus B) \cup (A \setminus C). \end{aligned}$$

▲

Exercice 2.2

On peut observer que les hypothèses étant parfaitement symétriques en A, B, C il nous suffira d'établir que $A = B$. Pour cela, nous allons procéder par double inclusion.

- On a $A \subset C \cup A$. Or $C \cup A = C \cap B$, donc $A \subset C \cap B$. Comme $C \cap B \subset B$, on en déduit que $A \subset B$.
- Réciproquement $B \subset B \cup C = B \cap A \subset A$. Donc $B \subset A$.

Par double-inclusion, nous avons établi l'égalité ensembliste $A = B$. ▲

Exercice 2.3

1. C'est une conséquence directe de la deuxième loi de Morgan, que l'on applique à l'ensemble $A \cup B$: *A et B sont deux parties de $A \cup B$.*

$$\begin{aligned} A \Delta B &= (A \cup B) \setminus (A \cap B) = \complement_{A \cup B}^{A \cap B} = \complement_{A \cup B}^B \cup \complement_{A \cup B}^A \\ &= ((A \cup B) \setminus B) \cup ((A \cup B) \setminus A) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A). \end{aligned}$$

2. Si $A \Delta B = A \cap B$, on a alors $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = A \cap B$, d'où $A \cap B = \emptyset$. On a alors $A \cup B = \emptyset$. Par conséquent, on obtient $A = B = \emptyset$.

3. $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $A \Delta B = A \Delta C$ et montrons que $B \subset C$. Soit $x \in B$.
– Si $x \in A$, alors $x \in A \cap B$ donc $x \notin A \Delta B$. Comme $A \Delta B = A \Delta C$, x n'appartient donc pas à $A \Delta C$. Mais $x \in A$, donc $x \in A \cap C$, ce qui montre que x appartient à A.
– Si $x \notin A$, alors $x \in A \Delta B$, donc $x \in A \Delta C$. Par conséquent, $x \in C$ puisque x n'appartient pas à A.
Dans les deux cas, x appartient à C. Ainsi B est inclus dans C. Le même raisonnement (symétrie de l'hypothèse) montre que C est inclus dans B. D'où l'égalité des deux ensembles : $B = C$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Réciproquement, si $B = C$, alors $A \Delta B = A \Delta C$! On a donc établi l'équivalence.

4. Si $A \Delta X = \emptyset$, alors $(A \cup X) \setminus (A \cap X) = \emptyset$, ce qui montre que $A \cup X = A \cap X$. Or $X \subset A \cup X = A \cap X \subset A$ et $A \subset A \cup X = A \cap X \subset X$. D'où $X = A$. *Voir l'exercice 2.1 !*
Réciproquement, A est solution de l'équation $A \Delta X = \emptyset$ puisque $A \Delta A = \emptyset$. L'équation a donc une unique solution $X = A$. ▲

Exercice 2.4

1. Comme $A \subset X \cup A$, il est clair que, si A n'est pas inclus dans B, l'équation n'a pas de solution. On se place désormais dans le cas où $A \subset B$.

• Si $X \cup A = B$, X est inclus dans B et contient $B \setminus A$ (si x appartient à $B \setminus A$, x est un élément de $(X \cup A) \setminus A = X$).
• Réciproquement, si X est une partie de E telle que $B \setminus A \subset X \subset B$, alors $X \cup A = B$. En effet, $X \cup A \subset B$ et, si $x \in B$, alors $x \in A$ ou $x \in (B \setminus A) \subset X$, donc $x \in X \cup A$. Finalement, si A est inclus dans B, l'ensemble des solutions de l'équation est :

$$\mathcal{S} = \{X \in \mathscr{P}(E),\ B \setminus A \subset X \subset B\}.$$

2. Tout d'abord, si B n'est pas inclus dans A, l'équation n'a pas de solution ($X \cap A \subset A$). Étudions maintenant le cas où $B \subset A$.
• Si $X \cap A = B$, on a

$$X = X \cap E = X \cap \left(A \cup \overline{A}\right) = (X \cap A) \cup \left(X \cap \overline{A}\right) = B \cup \left(X \cap \overline{A}\right).$$

On peut écrire $X = B \cup C$, où C est une partie de $\overline{A}$.
• Réciproquement, si X s'écrit $X = B \cup C$, avec $C \subset \overline{A}$, alors :

$$X \cap A = (B \cup C) \cap A = \underbrace{(B \cap A)}_{B} \cup \underbrace{(C \cap A)}_{\emptyset} = B \cap A = B$$

car B est inclus dans A. Par conséquent, lorsque $B \subset A$, les solutions sont les parties de E de la forme $B \cup C$, avec $C \subset \overline{A}$; d'où l'ensemble des solutions :

$$\mathcal{S} = \left\{X \in \mathscr{P}(E),\ B \subset X \subset B \cup \overline{A}\right\}.$$

▲

Exercice 2.5

La formule du binôme appliquée à $a = n$ et $b = 1$ donne :

$$(n+1)^n - 1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} n^k - 1 = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} n^k = \binom{n}{1} n + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} n^k.$$

✎ $\binom{n}{1} = n$

Or, pour tout $k \geqslant 2$, n^2 divise n^k. Par ailleurs, $\binom{n}{1} n = n^2$ donc n^2 divise $\binom{n}{1} n$. Finalement, n^2 divise tous les termes de la somme précédente, donc n^2 divise $(n+1)^n - 1$. ▲

Exercice 2.6

✎ **Théorème 2.3**

On écrit la division euclidienne de $a-1$ par b : $a-1 = bq+r$, avec $0 \leqslant r \leqslant b-1$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a alors :

$$\begin{aligned} ab^n - 1 &= (a-1)b^n + b^n - 1 = (bq+r)b^n + b^n - 1 \\ &= qb^{n+1} + (r+1)b^n - 1 \end{aligned}$$

Comme $0 \leqslant r \leqslant b-1$, on a $1 \leqslant r+1 \leqslant b$, donc $0 \leqslant (r+1)b^n - 1 \leqslant b^{n+1} - 1$. Ainsi, la décomposition

$$ab^n - 1 = qb^{n+1} + (r+1)b^n - 1$$

est la division euclidienne de $ab^n - 1$ par b^{n+1}. Son quotient est donc q. ▲

Exercice 2.7

1. On raisonne par l'absurde en supposant que a n'est pas premier. On peut donc écrire $a = bc$, avec $b, c \geqslant 2$. Or,

Somme d'une progression géométrique.

$$1 + 2^b + \cdots + (2^b)^{c-1} = \sum_{k=0}^{c-1} (2^b)^k = \frac{(2^b)^c - 1}{2^b - 1},$$

donc $M_a = 2^{bc} - 1 = (2^b)^c - 1 = (2^b - 1)(2^{b(c-1)} + 2^{b(c-2)} + \cdots 2^b + 1)$. Comme b et c sont des entiers supérieurs à 2, cette décomposition contredit le fait que M_a est un nombre premier. Ainsi, si M_a est premier, a l'est aussi.

Les nombres M_p avec p premier sont les nombres de Mersenne.

2. On note $d(n)$ la somme des diviseurs positifs d'un entier $n \geqslant 2$. Nous allons montrer que $2^{a-1}M_a$ est parfait, c'est-à-dire que $d(2^{a-1}M_a) = 2^a M_a$. Comme M_a est premier, $2^{a-1}M_a$ est la décomposition en facteurs premiers de $2^{a-1}M_a$ et l'ensemble de ses diviseurs positifs est donc :

n est parfait ssi $d(n) = 2n$.

$$\{2^k,\ 0 \leqslant k \leqslant a-1\} \cup \{2^k M_a,\ 0 \leqslant k \leqslant a-1\}.$$

On en déduit la valeur de la somme des diviseurs positifs de $2^{a-1}M_a$:

Encore la somme d'une progression géométrique.

$$d(2^{a-1}M_a) = \sum_{k=0}^{a-1} 2^k + \sum_{k=0}^{a-1} 2^k M_a = \frac{1-2^a}{1-2} + M_a \frac{1-2^a}{1-2} = (2^a - 1)(1 + M_a),$$

$1 + M_a = 2^a$

soit $d(2^{a-1}M_a) = M_a \times 2^a$, ce qui montre que $2^{a-1}M_a$ est un nombre parfait. ▲

Exercice 2.8

1. On va se ramener à un problème de divisibilité. Pour $x, y \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\begin{aligned} xy = 2x + 3y &\iff xy - 2x - 3y = 0 \\ &\iff (x-3)(y-2) = 6 \end{aligned}$$

Ainsi, (x, y) est solution si et seulement si $x-3$ et $y-2$ sont des diviseurs de 6, dont le produit est égal à 6. Les diviseurs dans 6 étant $-6, -3, -1, -2, 1, 2, 3$ et 6, le tableau ci-dessous nous donnent les couples (x, y) solutions :

Diviseurs de 6 dans $\mathbb{Z}$.

$x-3$	-6	-3	-2	-1	1	2	3	6
$y-2$	-1	-2	-3	-6	6	3	2	1
x	-3	0	1	2	4	5	6	9
y	1	0	-1	-4	8	5	4	3

L'ensemble des couples solutions est donc :

$$\mathcal{S} = \{(-3,1); (0,0); (1,-1); (2;-4); (4,8); (5,5); (6,4); (9,3)\}.$$

2. On se ramène de nouveau à un problème de divisibilité en écrivant :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5} &\iff \begin{cases} x \neq 0, y \neq 0 \\ 5x + 5y = xy \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x \neq 0, y \neq 0 \\ (x-5)(y-5) = 25 \end{cases} \end{aligned}$$

Un couple (x, y) est donc solution si et seulement si $x-5$ et $y-5$ sont des diviseurs de 25 dont le produit vaut 25, avec $x, y \in \mathbb{Z}^*$. Comme plus haut, la liste des diviseurs de 25 permet de conclure.

Les diviseurs de 25 dans $\mathbb{Z}$ sont $-25, -5, -1, 5$ et 25

Le couple $(0, 0)$ n'est pas solution !

$x-5$	-25	-5	-1	1	5	25
$y-5$	-1	-5	-25	25	5	1
x	-20	0	4	6	10	30
y	4	0	-20	30	10	6

L'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \{(-20, 4); (4, -20); (6, 30); (30, 6); (10, 10)\}.$$

▲

Exercice 2.9

1. • Tout d'abord, la fonction f est injective (si $n'+1 = n+1$, alors $n' = n$). En revanche, elle n'est pas surjective puisque 0 n'a pas d'antécédent par f ($f(n) \geqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

• L'application g n'est pas injective (puisque $g(0) = g(1) = 0$) mais elle est surjective. En effet, si m un entier naturel, on a $g(m+1) = m$ (la relation est aussi vraie pour $m = 0$).

2. • Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $f(n) \in \mathbb{N}^*$, donc $g(f(n)) = f(n) - 1 = n + 1 - 1 = n$. Cela montre que $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$.

• On a $f \circ g(0) = f(0) = 1$ et, si $n \geqslant 1$, $f \circ g(n) = f(g(n)) = f(n-1) = n$. Ainsi, $f \circ g(0) = 0$ et $f \circ g(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. ▲

Exercice 2.10

On peut dire aussi que f est injective car strictement croissante.

1. Montrons que f est injective. Soit x et x' deux réels positifs tels que $f(x) = f(x')$, c'est-à-dire $\sqrt{x^2+1} = \sqrt{x'^2+1}$. On a alors $x^2 + 1 = x'^2 + 1$, donc $x^2 = x'^2$. Comme x et x' sont positifs, $x = x'$, ce qui montre que f est injective. En revanche, il est clair que f n'est pas surjective, 0 (par exemple) n'a pas d'antécédent par f. Plus généralement, comme f est à valeurs dans $[1, \infty[$, tout nombre strictement inférieur à 1 n'a pas d'antécédent.

2. On utilise la **méthode 2.8** qui va donner à la fois la bijectivité de f et son application réciproque. On résout pour cela l'équation $f(x, y) = (x', y')$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Soit $(x', y') \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} f(x,y) = (x',y') &\iff (x+y, x-y) = (x',y') \\ &\iff \begin{cases} x+y = x' \\ x-y = y' \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2x = x'+y' \\ y = x-y' \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = \frac{x'+y'}{2} \\ y = \frac{x'-y'}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Comme l'équation $f(x, y) = (x', y')$ admet pour unique solution $\left(\frac{x'+y'}{2}, \frac{x'-y'}{2}\right)$, f est bijective et son application réciproque est

$$f^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right) \end{cases}.$$

3. On utilise cette fois le **théorème de la bijection bicontinue**. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : Méthode 2.9

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 1 - \frac{2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4+2x^2-2x+1}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4+x^2+(x-1)^2}{(x^2+1)^2}.$$

Par conséquent, f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, c'est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $f(\mathbb{R})$. Par ailleurs, comme f tend vers $-\infty$ en $-\infty$ et vers $+\infty$ en $+\infty$, on a $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. On en déduit que l'application f est bijective. Théorème de la bijection bicontinue

4. Notons tout d'abord que, si q est un entier supérieur ou égal à 2, on a

$$\frac{1}{q} \in \left]0, \frac{1}{2}\right].$$

Par conséquent, si $p \in \mathbb{Z}$ et $q \geqslant 2$, $p + \frac{1}{q}$ n'est jamais entier. Cela montre que f n'est pas surjective (un entier n'a pas d'antécédent par f). Montrons maintenant que f est injective. Pour cela, on considère des entiers p, p', q et q' avec $q \geqslant 2$ et $q' \geqslant 2$, tels que $f(p,q) = f(p',q')$, c'est-à-dire $p + \frac{1}{q} = p' + \frac{1}{q'}$. On a donc :

$$p - p' = \frac{1}{q'} - \frac{1}{q}.$$

D'après ce qui précède, $\frac{1}{q'} - \frac{1}{q}$ appartient à $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Comme ce nombre est un entier d'après l'égalité ci-dessus, on a nécessairement $\frac{1}{q'} - \frac{1}{q} = 0$. On a donc $q = q'$, puis $p = p'$. Ainsi, $(p,q) = (p',q')$ et l'application f est injective. ▲ $\frac{1}{q}, \frac{1}{q'} \in]0, \frac{1}{2}]$

Exercice 2.11

1.

• Montrons que f est injective. Soit x et x' deux éléments de E tels que $f(x) = f(x')$. En composant par g, on a $g(f(x)) = g(f(x'))$, c'est-à-dire $g \circ f(x) = g \circ f(x')$. Comme $g \circ f$ est injective, on en déduit que $x = x'$. Cela montre que f est injective.

• La fonction g n'est, quant à elle, pas nécessairement injective comme le prouve le contre-exemple suivant. Soit f la fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$ et g la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par $g(x) = x^2$. L'application $g \circ f$ est injective ($g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_+}$) mais g n'est pas injective puisque (par exemple) $g(-1) = g(1)$. $\forall x \in \mathbb{R}_+$ $g \circ f(x) = x$

2.

• Montrons que g est surjective. Soit y un élément de F. Comme $g \circ f$ est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = g \circ f(x)$. Alors, $y = g(f(x)) = g(z)$, en notant $z = f(x)$. Ainsi l'élément z est un antécédent de y par g. L'application g est donc surjective. $z = f(x) \in F$

• Le contre-exemple utilisé à la question précédente prouve que f n'est pas forcément surjective. En effet, l'application $g \circ f$ est surjective puisque $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_+}$ mais f n'est pas surjective (-1, par exemple, n'a pas d'antécédent par f). *$g \circ f$ est bijective !*

3. On utilise les deux questions précédentes. Comme l'application $f \circ g \circ f$ est injective et s'écrit $(f \circ g) \circ f$, on en déduit que f est injective. De même, f est surjective puisque $f \circ g \circ f$ est surjective et s'écrit $f \circ (g \circ f)$. Cela montre

Corrigé

déjà que f est bijective. On peut alors considérer son application réciproque f^{-1} et écrire :

$f \circ f^{-1} = Id_E$
$f^{-1} \circ f = Id_E$

$$g = f^{-1} \circ (f \circ g \circ f) \circ f^{-1} \ ;$$

Théorème 2.12

ce qui montre que g est également bijective (en tant que composée d'applications bijectives). ▲

Exercice 2.12

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose que f est injective. Montrons que f est surjective. Soit $y \in E$. D'après l'hypothèse, $f(f \circ f(y)) = f(y)$. Comme f est injective, cela entraîne $f \circ f(y) = y$. On a donc $y = f(x)$, avec $x = f(y)$. Ainsi, x est un antécédent de y par f. La fonction f est donc surjective.

$f \circ f(y)$ et y ont la même image par f.

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose maintentant que f est surjective et on montre que f est injective. Soit x et x' deux éléments de E tels que $f(x) = f(x')$. Comme f est surjective, $f \circ f$ l'est aussi par composition. Par conséquent, il existe deux éléments a et a' de E tels que $x = f \circ f(a)$ et $x' = f \circ f(a')$. La relation $f(x) = f(x')$ s'écrit alors $f \circ f \circ f(a) = f \circ f \circ f(a')$, c'est-à-dire $f(a) = f(a')$ d'après l'hypothèse. On a donc $f \circ f(a) = f \circ f(a')$, ce qui signifie que $x = x'$. On en déduit que f est injective. ▲

Théorème 2.9

Exercice 2.13

1. À l'aide d'une récurrence forte, montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = n$.

• **Initialisation :** On a $f(0) \leqslant 0$ et $f(0) \in \mathbb{N}$ donc, nécessairement, $f(0) = 0$.

• **Hérédité :** On suppose maintenant que $f(k) = k$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, où n est un entier naturel fixé. On souhaite montrer que $f(n+1) = n+1$. D'après l'hypothèse, $f(n+1) \leqslant n+1$. Si $f(n+1) < n+1$, alors $f(n+1) \leqslant n$ donc $f(n+1) = k$, avec $k \in [\![0, n]\!]$. Or $f(k) = k$ d'après l'hypothèse de récurrence. On aurait alors $f(k) = f(n+1)$, puis $k = n+1$ (puisque f est injective), ce qui est impossible. Ainsi, $f(n+1) = n+1$ et l'égalité est vraie au rang $n+1$.

$f(n+1) \in \mathbb{N}$

$k \in [\![0, n]\!]$

• **Conclusion :** Par récurrence forte, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. On applique, de nouveau, une récurrence forte.

• **Initialisation :** Montrons que $f(0) = 0$. Cette fois, l'hypothèse de l'énoncé ($f(0) \geqslant 0$) ne donne rien. Comme f est surjective, 0 admet un antécédent par f. Or, pour $k \geqslant 1$, on a $f(k) \geqslant k \geqslant 1$. L'unique antécédent de 0 est donc 0, d'où $f(0) = 0$.

$\forall k \geqslant 1,\ f(k) \neq 0$

• **Hérédité :** On suppose maintenant que $f(k) = k$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, où $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $f(n+1) = n+1$. On sait que $f(n+1) \geqslant n+1$. Supposons que l'on ait $f(n+1) > n+1$. Comme $f(k) = k$ pour $k \in [\![0, n]\!]$ et $f(k) > n+1$ pour $k \geqslant n+1$, on en déduit que $n+1$ n'a pas d'antécédent par f, ce qui est impossible puisque f est surjective. Par conséquent, $f(n+1) = n+1$.

$\forall k \geqslant n+2$, $f(k) \geqslant k \geqslant n+2$

• **Conclusion :** Grâce à une récurrence forte, on a bien établi que $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$. ▲

Exercice 2.14

1. Montrons que f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose que f est injective. On a $f(E) = (E \cap A, E \cap B) = (A, B)$ et $f(A \cup B) = \big((A \cup B) \cap A, (A \cup B) \cap B\big) = (A, B)$. Comme f est injective, on en déduit que $A \cup B = E$.

E et $A \cup B$ sont des antécédents de (A, B).

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose maintenant que $A \cup B = E$ et on considère deux parties X

et X' de E telles que $f(X) = f(X')$, c'est-à-dire :

$$X \cap A = X' \cap A \qquad \text{et} \qquad X \cap B = X' \cap B.$$

Comme $A \cup B = E$, on a alors :

$$\begin{aligned} X &= X \cap E = X \cap (A \cup B) = (X \cap A) \cup (X \cap B) = (X' \cap A) \cup (X' \cap B) \\ &= X' \cap (A \cup B) = X' \cap E = X'. \end{aligned}$$

Comme $X = X'$, l'application f est injective.

2. Montrons que f est surjective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose que f est surjective. Il existe alors une partie de X de E telle que $f(X) = (\emptyset, B)$, c'est-à-dire $X \cap A = \emptyset$ et $X \cap B = B$. On a donc $B \subset X \subset \overline{A}$; donc $A \cap B = \emptyset$.

$(\emptyset, B)$ admet un antécédent par f.

$\boxed{\Leftarrow}$ Réciproquement, on suppose que $A \cap B = \emptyset$. On considère une partie Y de A et une partie Z de B. Comme A et B sont deux ensembles disjoints, on a $Y \cap B = \emptyset$ et $Z \cap A = \emptyset$ puisque $Y \subset A$ et $Z \subset B$; d'où :

On cherche un antécédent de (Y, Z).

$$\begin{aligned} f(Y \cup Z) &= \Big((Y \cup Z) \cap A, (Y \cup Z) \cap B\Big) \\ &= \Big((Y \cap A) \cup (Z \cap A), (Y \cap B) \cup (Z \cap B)\Big) \\ &= \Big(Y \cup \emptyset, \emptyset \cup Z\Big) = (Y, Z). \end{aligned}$$

Ainsi, $Y \cup Z$ est un antécédent de (Y, Z) et l'application f est surjective. ▲

Exercice 2.15

On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe une application f surjective de E dans $\mathscr{P}(E)$. On note alors $A = \{x \in E \ ; \ x \notin f(x)\}$. Comme f est surjective, toute partie de E admet un antécédent par f. En particulier, il existe $a \in E$ tel que $f(a) = A$. On distingue alors deux cas.

$\forall X \in \mathscr{P}(E)$, $\exists x \in E$, $f(x) = X$

- Si $a \in A$, alors $a \in f(a)$ (puisque $f(a) = A$), d'où $a \notin A$ par définition de A.
- Si $a \notin A$, alors $a \notin f(a)$, donc $a \in A$.

Dans les deux cas, on obtient une contradiction. Ainsi, il n'existe pas d'application f surjective de E dans $\mathscr{P}(E)$. ▲

Exercice 2.16

1. Soit $y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (2.1) \quad f(x) = y \quad &\Longleftrightarrow \quad y = \frac{2x}{1+x^2} \\ &\Longleftrightarrow \quad yx^2 - 2x + y = 0 \end{aligned}$$

On en déduit la discussion suivante :

- Si $y = 0$ alors (2.1) admet 0 comme unique solution.
- Si $y \neq 0$, (2.1) est une équation du deuxième degré. Son discriminant est $\Delta = 4(1 - y^2)$. D'où la discussion suivante :
  - Si $|y| > 1$, (2.1) n'a pas de solution.

- Si $|y| = 1$, (2.1) admet une seule solution, $x = \dfrac{1}{y} = y$.
- Si $|y| < 1$, (2.1) admet deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{1-y^2}}{y}; \qquad x_2 = \frac{1 + \sqrt{1-y^2}}{y}$$

2.

- f n'est pas surjective car 3 n'a pas d'antécédents.
- f n'est pas injective car $\dfrac{1}{2}$ a deux antécédents distincts.
- f n'est pas bijective car 3 n'a pas d'antécédents.

Notons $f(\mathbb{R})$ l'ensemble

$$f(\mathbb{R}) = \{f(x)\,;\ x \in \mathbb{R}\}$$

$f(\mathbb{R})$ est l'ensemble des images par f des éléments de $\mathbb{R}$. C'est aussi l'ensemble des réels y qui ont au moins un antécédent dans $\mathbb{R}$. D'après la discussion ci-dessus, $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.

3. Comme l'ensemble de toutes les images par f est $[-1, 1]$, f induit une fonction de $[-1, 1]$ dans lui-même. Notons-la $f_| : [-1, 1] \to [-1, 1]$. Montrons que $f_|$ est bijective.

- Soit $y \in \{-1, 0, 1\}$. Alors l'équation (2.1) admet une unique solution dans $[-1, 1]$.
- Soit y tel que $0 < |y| < 1$. En ce cas, l'équation (2.1) admet deux solutions réelles, notées x_1 et x_2. Il s'agit de prouver qu'une exactement de ces deux solutions appartient à $[-1, 1]$. On observe alors que $x_1.x_2 = 1$ (produit des racines d'un polynôme de degré 2), de sorte que x_1 et x_2 sont inverse l'une de l'autre. Par conséquent, l'une exactement appartient à $[-1, 1]$.

  Remarque : on peut prouver, mais ce n'est pas demandé, qu'il s'agit de x_1. En effet, $|1 + \sqrt{1-y^2}| = 1 + +\sqrt{1-y^2} \geqslant 1 > |y|$. Par conséquent $|x_2| > 1$.

Ainsi, pour tout $y \in [-1, 1]$, l'équation (2.1) admet exactement une solution dans $[-1, 1]$. D'après la caractérisation des bijections (point de vue équation), cela signifie que $f_| : [-1, 1] \to [-1, 1]$ est bijective. ▲

Exercice 2.17

Pour prouver que f est bijective et déterminer son application réciproque, on adopte le point de vue équations.
Résolvons, en discutant suivant la valeur de y, l'équation

$$y = f(x) \tag{2.2}$$

Soit donc $y \in \mathbb{R}$.

$$(2.2) \iff yx^2 + 2x - y = 0$$

- Si $y = 0$, l'équation (2.2) admet pour unique solution $x = 0$.

- Si $y \neq 0$. Il s'agit d'une équation polynomiale du deuxième degré, de discriminant $\Delta = 4(1+y^2) > 0$. Elle admet donc deux racines réelles distinctes

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{1+y^2}}{y}; \quad x_2 = \frac{-1-\sqrt{1+y^2}}{y}$$

Pour conclure, il s'agit de prouver que de ces deux racines réelles, une exactement appartient à l'intervalle $]-1,1[$. Pour ce faire, observons tout d'abord que $x_1x_2 = -1$. De plus, $|x_2| = \dfrac{1+\sqrt{1+y^2}}{|y|} > \dfrac{\sqrt{y^2}}{|y|} = 1$. Ainsi, $|x_2| > 1$, ce qui garantit en outre que $|x_1| < 1$.

Finalement, pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'équation (2.2) admet exactement une solution dans $]-1,1[$. D'après la caractérisation des bijections, cela signifie que $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ est bijective.
f admet donc une application réciproque , $f^{-1} : \mathbb{R} \to]-1,1[$, qui est définie pour tout $y \in \mathbb{R}$ par $f^{-1}(y)$ est l'unique antécédent de y par f. Vu l'étude précédente, il en résulte que

$$\text{Pour tout } y \in \mathbb{R}^\star,\ f^{-1}(y) = \frac{-1+\sqrt{1+y^2}}{y} \text{ et } f^{-1}(0) = 0$$

▲

Exercice 2.18

1. Appliquons la **méthode 2.9**. Une rapide étude de la fonction f montre que f est dérivable, strictement décroissante sur $[-1/2,+\infty[$ et que $f(-1/2) = 2/\sqrt{3}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Il s'ensuit que f réalise une bijection de $[-1/2,+\infty[$ sur $]0,2/\sqrt{3}]$.
2. Pour déterminer la fonction réciproque de $f_|$, nous résolvons, pour $y \in]0,2/\sqrt{3}]$, l'équation

$$y = f(x) \tag{2.3}$$

Soit $x \geqslant -\dfrac{1}{2}$ et $y \in]0,2/\sqrt{3}]$.

$$\begin{aligned}
(2.3) \quad &\iff \quad y = \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}} \\
&\iff \quad \begin{cases} y > 0 \\ y^2 = \dfrac{1}{x^2+x+1} \end{cases} \\
&\iff \quad \begin{cases} y > 0 \\ y^2x^2 + y^2x + y^2 - 1 = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Il s'agit d'une équation polynomiale de degré 2. Son discriminant est $\Delta = y^4 - 4y^2(y^2-1) = y^2(4-3y^2)$. D'où la discussion suivante :

- Si $y = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, (2.3) possède une unique solution $x = -\dfrac{1}{2}$.
- Si $0 < y < \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, (2.3) possède deux solutions réelles distinctes :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-y^2 + y\sqrt{4-3y^2}}{2y^2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{4-3y^2}}{2y} \\ x_2 &= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{4-3y^2}}{2y} \end{aligned}$$

Visiblement, $x_1 \geqslant -\frac{1}{2}$ tandis que $x_2 < -\frac{1}{2}$. Par conséquent, x_1 est la seule solution de (2.3) dans $[-1/2, +\infty[$.
Ainsi, l'équation (2.3) admet exactement une solution dans $[-1/2, +\infty[$, c'est $f_|^{-1}(y)$. Pour conclure, l'application réciproque de f est la fonction $f_|^{-1}$: $]0, \frac{2\sqrt{3}}{3}] \to [-1/2, +\infty[$, définie pour tout $y \in]0, \frac{2\sqrt{3}}{3}]$ par :

$$f_|^{-1}(y) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{4-3y^2}}{2y}.$$

▲

Exercice 2.19

Méthode 2.8

1. Soit $(x', y') \in \mathbb{R}^2$. Montrons que l'équation $f(x, y) = (x', y')$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned} f(x,y) = (x',y') &\iff \begin{cases} x - 4y = x' \\ 2x + 3y = y' \end{cases} \iff \begin{cases} x - 4y = x' \\ 11y = y' - 2x' \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = x' + 4 \times \frac{y'-2x'}{11} = \frac{3x'+4y'}{11} \\ y = \frac{y'-2x'}{11} \end{cases} \end{aligned}$$

Nous avons trouvé un unique antécédent de (x', y'), donc f est bijective et :

$$f^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & \left(\frac{3x+4y}{11}, \frac{y-2x}{11}\right) \end{cases}.$$

2. Par définition, $f(\Delta) = \{f(x, y),\ (x, y) \in \Delta\}$. Soit $(x, y) \in \Delta$. Comme $x + 2y = 1$, on a :

$$f(x,y) = (x - 4y, 2x + 3y) = (1 - 6y, 2 - y) = (1, 2) - y(6, 1),$$

Le vérifier à l'aide du déterminant !

ce qui montre que $f(\Delta)$ est la droite passant par le point $(1, 2)$ et dirigée par le vecteur $(6, 1)$. Cette droite a pour équation cartésienne $x - 6y + 11 = 0$; on obtient donc :

$$f(\Delta) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x - 6y + 11 = 0\}.$$

De même, on sait que $f^{-1}(\Delta) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) \in \Delta\}$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned} f(x,y) \in \Delta &\iff (x - 4y, 2x + 3y) \in \Delta \\ &\iff x - 4y + 2(2x + 3y) = 1 \\ &\iff 5x + 2y - 1 = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $f^{-1}(\Delta) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 5x + 2y - 1 = 0\}$. ▲

Exercice 2.20

1. Soit A une partie de E et $x \in A$. Alors $f(x)$ appartient à $f(A)$, donc $x \in f^{-1}(f(A))$ ($x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B$). Ainsi, $A \subset f^{-1}(f(A))$.

2. Soit B une partie de F et $y \in f(f^{-1}(B))$. Il existe $x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$. Comme $x \in f^{-1}(B)$, on a $f(x) \in B$, c'est-à-dire $y \in B$. Par conséquent, $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

3. $\boxed{\Rightarrow}$ On suppose que f est injective et on considère une partie A de E. On veut montrer que $A = f^{-1}(f(A))$. L'inclusion $A \subset f^{-1}(f(A))$ est toujours vraie d'après la question **1**. Par ailleurs, si $x \in f^{-1}(f(A))$, $f(x)$ appartient à $f(A)$, donc il existe $a \in A$ tel que $f(x) = f(a)$. Comme f est injective, cela entraîne $x = a$, donc $x \in A$. Ainsi, $A \subset f^{-1}(f(A))$; d'où l'égalité.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $A = f^{-1}(f(A))$ pour toute partie A de E et montrons que f est injective. Soit x et x' deux éléments de E tels que $f(x) = f(x')$. En prenant $A = \{x\}$, on a $f(A) = \{f(x)\} = \{f(x')\}$ donc $x' \in f^{-1}(f(A))$. Comme $f^{-1}(f(A)) = A$, on en déduit que $x' \in A$, ce qui montre que $x' = x$. L'application f est donc injective.

4. $\boxed{\Rightarrow}$ On suppose que f est surjective. Soit B une partie de F, montrons que $f(f^{-1}(B)) = B$. L'inclusion $f(f^{-1}(B)) \subset B$ est toujours vérifiée d'après la question **2**. Montrons maintenant que $B \subset f(f^{-1}(B))$. Soit $y \in B$. Comme f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. On a $x \in f^{-1}(B)$ (car $f(x) \in B$), ce qui montre que $y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$. On a donc $B \subset f(f^{-1}(B))$, puis l'égalité $f(f^{-1}(B)) = B$. ✐ $B \subset F$

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $f(f^{-1}(B)) = B$ pour toute partie B de F et montrons que f est surjective. Soit y un élément de F. Prenons $B = \{y\}$; on a $f(f^{-1}(\{y\})) = \{y\}$. Par conséquent, $f^{-1}(\{y\})$ n'est pas vide, ce qui signifie que y a un antécédent par f. La fonction f est donc surjective. ▲

Exercice 2.21

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose que f est bijective et on considère une partie quelconque A de E. On souhaite montrer que $f\left(\complement_E^A\right) = \complement_F^{f(A)}$.

• Soit $y \in f\left(\complement_E^A\right)$, il existe $x \in \complement_E^A$ tel que $y = f(x)$. Si y appartient à $f(A)$, on a $y = f(a)$, avec $a \in A$. Alors $f(x) = f(a)$, donc $x = a$ d'après l'injectivité de f. Ceci est impossible puisque $x \notin A$. Ainsi, $y \in \complement_F^{f(A)}$, ce qui prouve l'inclusion $f\left(\complement_E^A\right) \subset \complement_F^{f(A)}$. ✐ $y \in F$

• Soit $y \in \complement_F^{f(A)}$, y est un élément de F qui n'appartient pas à l'image de A par f. Comme f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Or $y \notin f(A)$, donc $x \notin A$, soit $x \in \complement_E^A$. Ainsi, $y = f(x) \in f\left(\complement_E^A\right)$ et on a $\complement_F^{f(A)} \subset f\left(\complement_E^A\right)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose que :

$$\forall A \in \mathscr{P}(E),\ f\left(\complement_E^A\right) = \complement_F^{f(A)}. \tag{2.4}$$

On va montrer que f est injective et surjective.

• Soit x et x' deux éléments de E tels que $f(x) = f(x')$. On applique (2.4) à $A = \{x\}$. Si $x' \neq x$, alors $x' \in \complement_E^A$ donc $f(x') \in f\left(\complement_E^A\right) = \complement_F^{f(A)}$. Ainsi, $f(x') \notin f(A)$, ce qui est impossible puisque $f(x') = f(x) \in f(A)$. Par conséquent, $x' = x$ et f est injective. ✐ $x \in A$

✐ *Comme $f(E) = F$, tout $y \in F$ admet un antécédent par f.*

• Pour montrer que f est surjective, on applique (2.4) à $A = \emptyset$:

$$f(E) = f\left(\complement_E^{\emptyset}\right) = \complement_F^{f(\emptyset)} = \complement_F^{\emptyset} = F.$$

Comme $f(E) = F$, f est surjective. Ainsi, la fonction f est bijective. ▲

Chapitre 3

Calcul algébrique et trigonométrique

UN MATHÉMATICIEN

Le principal apport de **François Viète** fut l'utilisation du calcul littéral ; grâce à lui, les mathématiques occidentales ont intégré une approche nouvelle que l'on dénomme algèbre.

Le mathématicien vendéen en avait pleinement conscience lorsqu'il affirmait être l'initiateur d'un « art nouveau qui lui permet de résoudre les problèmes par vingtaine là où les mathématiciens anciens ou contemporains ne les traitaient qu'un à un ».

Un peu d'histoire

Pour effectuer des calculs, les Sumériens et les Babyloniens avaient déjà des méthodes efficaces et surprenantes pour l'époque. Pourtant, dans l'Antiquité, les systèmes de notations des nombres ne permettaient pas l'utilisation d'algorithmes pour réaliser des calculs. La trigonométrie, quant à elle, est introduite par Hipparque au IIe siècle avant notre ère.

La numération de position, inventée par les Indiens vers le VIe siècle puis généralisée par les Arabes, entre lentement en usage en Occident à la fin du Moyen Âge ; on peut alors élaborer des algorithmes pour les opérations simples. Peu avant 1600, principalement grâce à François Viète, des méthodes plus générales sont possibles grâce au calcul littéral.

L'introduction quelques années plus tard des logarithmes permet d'effectuer des calculs sur des très grand nombres ce qui entraîne de spectaculaires progrès en astronomie.

Objectifs

les incontournables

- Savoir calculer des sommes et produits finis :
  - Connaître les sommes de référence ;
  - Savoir effectuer un changement d'indice ;
  - Savoir mettre en œuvre un télescopage.
- Manipuler les coefficients binomiaux.
- Connaître les règles de calcul et les symétries pour les fonctions trigonométriques :
  - Savoir transformer des expressions trigonométriques ;
  - Savoir résoudre des équations ou inéquations trigonométriques.

et plus si affinités

- Calculer des sommes doubles.
- Calculer des sommes triangulaires.

Résumé de cours

Sommes et produits finis

Définition : *Soit I un ensemble fini et $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels. On note :*

- $\sum_{i\in I} a_i$ *la somme des éléments de la famille* $(a_i)_{i\in I}$ *;*
- $\prod_{i\in I} a_i$ *le produit des éléments de la famille* $(a_i)_{i\in I}$.

Par convention, lorsque $I=\emptyset$, $\sum_{i\in I} a_i = 0$ *et* $\prod_{i\in I} a_i = 1$.

Dans le cas où $I = [\![1,n]\!]$, on a $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$; $\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$.
Plus généralement, si m et n sont deux entiers tels que $m \leqslant n$, alors :

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n \quad ; \qquad \prod_{i=m}^{n} a_i = a_m \times a_{m+1} \times \cdots \times a_n.$$

Remarque : l'indice i de la somme est un indice « muet », c'est-à-dire qu'on peut le remplacer par n'importe quel autre symbole non utilisé par ailleurs. Par exemple, on a :

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{s=m}^{n} a_s \quad ; \qquad \prod_{i=m}^{n} a_i = \prod_{k=m}^{n} a_k = \prod_{l=m}^{n} a_l$$

Définition : *Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle* ***factorielle*** *n et on note $n!$ l'entier défini par* $n! = \prod_{k=1}^{n} k$.

Remarque : on a $0! = 1$ et, si $n \geqslant 1$, $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$. On retiendra que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)! = (n+1) \times n!$$

Proposition 3.1.— Règles de calculs pour les sommes et produits finis —. Soit I un ensemble fini à p éléments, $(a_i)_{i\in I}$, $(b_i)_{i\in I}$ deux familles de nombres réels, λ un réel.

- $\sum_{i\in I}(a_i + b_i) = \sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in I} b_i$
- $\prod_{i\in I}(a_i b_i) = \prod_{i\in I} a_i \times \prod_{i\in I} b_i$
- $\sum_{i\in I}(\lambda a_i) = \lambda \sum_{i\in I} a_i$
- $\prod_{i\in I}(\lambda a_i) = \lambda^p \prod_{i\in I} a_i$

Remarque : en particulier, si a est un nombre réel et p le nombre d'éléments de I, on a

$$\sum_{i\in I} a = p \times a \qquad \text{et} \qquad \prod_{i\in I} a = a^p$$

Dans la suite de ce paragraphe, on énonce les propriétés pour les sommes finies. Des propriétés analogues pour les produits finis sont également valides.

Techniques de calcul de sommes

Théorème 3.2.— Changements d'indice et regroupement des termes —. Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, une suite de réels. Alors pour tous entiers naturels n et m tels que $m < n$,

- **Regroupement de termes :** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k$
- **Changements d'indice :** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i}$ et $\displaystyle\sum_{k=p}^{q} a_k = \sum_{i=0}^{q-p} a_{p+i}$

Théorème 3.3.— Télescopage —. Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels, telles que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_k = a_{k+1} - a_k$. Alors, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} x_k = \sum_{k=0}^{n} \left[a_{k+1} - a_k\right] = a_{n+1} - a_0.}$$

Sommes de référence

Proposition 3.4.— Somme des premiers entiers, des premiers carrés
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Alors

- **Somme des premiers entiers :** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
- **Somme des premiers carrés :** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Théorème 3.5.— Somme de termes en progression géométrique —. Soit x un nombre réel distinct de 1, $n \in \mathbb{N}$ un entier. Alors

- **Somme des premières puissances de x :** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$

Remarque : si x est égal à 1, la somme des $n+1$ premières puissances de x vaut $n+1$.

Coefficients binomiaux

Définition : *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$. On pose :* $\displaystyle\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant n \\ 0 & \text{si } k > n \text{ ou } k < 0 \end{cases}$

$\displaystyle\binom{n}{k}$ *est appelé* ***coefficient binomial*** *et se lit « k parmi n ».*

Théorème 3.6.— Propriétés des coefficients du binôme —. Soit $(n,k) \in \mathbb{N}^2$, les coefficients du binôme vérifient

$$\boxed{\bullet \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad \bullet \binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k} \qquad \bullet \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}}$$

Deux formules sommatoires

Théorème 3.7.— Identité géométrique —. Soit $n \in \mathbb{N}$, a et b deux nombres réels. Alors :

$$\boxed{a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k}$$

Remarque : lorsque $a = x$ et $b = 1$, on retrouve la somme des n premières puissances de x.

Théorème 3.8.— Formule du binôme —. Soit $n \in \mathbb{N}$, a et b deux nombres réels. Alors :

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k}$$

Remarque : en prenant $a = b = 1$ dans la formule du binôme, on obtient $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

■ Sommes doubles

Définition : *Soit I et J deux ensembles finis non vides et $(a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de nombres réels. On note $\sum\limits_{(i,j)\in I\times J} a_{i,j}$ la somme des éléments de la famille $(a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$.*
Lorsque $I = [\![1,m]\!]$ et $J = [\![1,n]\!]$, cette somme se note $\sum\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}} a_{i,j}$.

Théorème 3.9.— Somme double indexée par un rectangle —. Soit m, n des entiers et $(a_{i,j})_{ij}$ une famille de nombres réels indexée par le rectangle $[\![1,m]\!] \times [\![1,n]\!]$. Alors :

$$\boxed{\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{i,j}}$$

Corollaire 3.10.— Produit de sommes finies —. Soit m, n deux entiers et (a_i), (b_j) deux familles de réels indexées par $I = [\![1,m]\!]$ et $J = [\![1,n]\!]$ respectivement. Alors :

$$\boxed{\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}} (a_i \times b_j) = \left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right) \times \left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right)}$$

■ Ensemble ordonné des nombres réels

L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est muni de deux opérations : l'addition $+$ et la multiplication $\times$. Nous rappelons ici les propriétés liées à la relation d'ordre $\leqslant$.

Compatibilité ordre et opérations

L'addition et la multiplication des réels sont compatibles avec la relation d'ordre au sens suivant :

Théorème 3.11.— Soit $x, y \in \mathbb{R}$ des réels. On suppose que $x \leqslant y$. Alors

- Pour tout réel $z \in \mathbb{R}$, $\quad x + z \leqslant y + z$,
- Pour tout réel strictement positif $z \in \mathbb{R}^+$, $\quad x \times z \leqslant y \times z$.

On en déduit que le passage aux inverses et la multiplication par un réel négatif sont aussi **compatibles** avec la relation d'ordre.

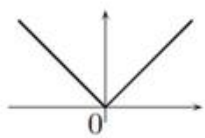
Corollaire 3.12.— Soit x, y, z et u, v des réels.

- **Si** $(0 \leqslant x \leqslant y)$ **alors** $0 \leqslant y^{-1} \leqslant x^{-1}$
- **Si** $\begin{cases} x \leqslant y \\ u \leqslant v \end{cases}$ **alors** $x + u \leqslant y + v$
- **Si** $(x \leqslant y$ et $z \leqslant 0)$ **alors** $x \times z \geqslant y \times z$
- **Si** $\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant y \\ 0 \leqslant u \leqslant v \end{cases}$ **alors** $x \times u \leqslant y \times v$

Valeur absolue d'une réel

Définition : *Pour tout réel x, on définit la* ***valeur absolue*** *de x par*

$$|x| = \max\{x, -x\} = \begin{cases} x \ si \ x \geqslant 0 \\ -x \ si \ x \leqslant 0 \end{cases}$$



Remarque : $|x|$ désigne la distance du point d'abscisse x à l'origine sur la droite numérique.

Proposition 3.13.— Inégalités triangulaires —. Pour tous réels x et y, on a :

$$\boxed{|x + y| \leqslant |x| + |y| \quad \text{et} \quad |x - y| \geqslant \big||x| - |y|\big|}$$

Remarque : $|x + y| = |x| + |y|$ si et seulement si x et y ont même signe.

Partie entière d'un réel

Théorème 3.14.— Partie entière d'un réel —. Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe un entier relatif $p \in \mathbb{Z}$, unique tel que $p \leqslant x < p+1$. Cet entier relatif p est appelé **partie entière** de x. On note $p = \lfloor x \rfloor$.

Remarque : la partie entière de x est le plus grand de tous les entiers inférieurs ou égaux à x.

Intervalles de $\mathbb{R}$

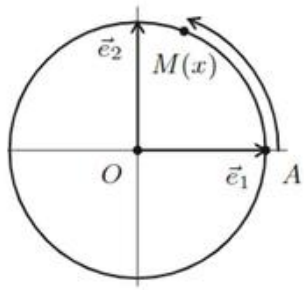
Définition : *Soit I une partie de $\mathbb{R}$. On dit que I est un* ***intervalle*** *dans les quatre cas suivants.*

- $I = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$, $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$
- $I = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$, $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}$
- $I = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$, $(a, b) \in \mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}$
- $I = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$, $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

■ Compléments de trigonométrie

Le cercle trigonométrique

Le plan géométrique $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R}(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On appelle **cercle trigonométrique** le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon unité, orienté dans le sens direct.
À tout réel $x \in \mathbb{R}$, on associe le point $M(x)$ du cercle unité tel que la longueur de l'arc de cercle unité qui va de A à $M(x)$ soit égale à $|x|$, dans le sens direct si x est positif, dans le sens indirect si x est négatif. On dit que $M(x)$ est l'**image du réel x sur le cercle trigonométrique.**



Définition : *Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs non nuls. On appelle* **mesure en radians** *de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ la mesure de tout arc de cercle unité orienté allant de $\vec{u}$ à $\vec{v}$. On note $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv x\ [2\pi]$.*

Notation : *Étant donné $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on note $a \equiv b\ [2\pi]$ lorsqu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a - b = 2\,k\,\pi$.*

Cosinus, sinus, tangente d'un réel x

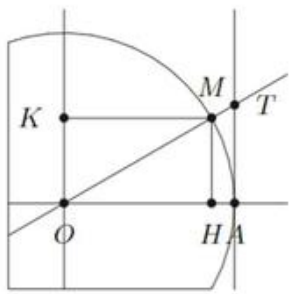
Soit x un réel, M son image sur le cercle unité. Le point M est déterminé par ses coordonnées dans le repère cartésien $\mathcal{R}$. On note :

- $\cos(x) = \overline{OH}$ son abscisse ;
- $\sin(x) = \overline{OK}$ son ordonnée.

Si de plus x est non congru à $\frac{\pi}{2}$ modulo π, on note :

- $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = \overline{AT}$.

La tangente de l'angle x est la pente de la droite $(OM(x))$. Elle n'est pas définie lorsque cette droite est verticale.



Règles de calcul

Théorème 3.15.— Propriété fondamentale de trigonométrie —.

- Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$ $\quad \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$
- Pour tout réel $x \not\equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$ $\quad 1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$

Proposition 3.16.— Propriétés de symétries —. Les fonctions sin et cos vérifient les propriétés de symétrie suivantes :

- $\cos(2\pi + x) = \cos(x)$
- $\cos(-x) = \cos(x)$
- $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$
- $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
- $\cos(\pi/2 + x) = -\sin(x)$
- $\cos(\pi/2 - x) = \sin(x)$
- $\sin(2\pi + x) = \sin(x)$
- $\sin(-x) = -\sin(x)$
- $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$
- $\sin(\pi - x) = \sin(x)$
- $\sin(\pi/2 + x) = \cos(x)$
- $\sin(\pi/2 - x) = \cos(x)$

Proposition 3.17.— Formules d'addition —. Pour tous a et b (tels que les expressions suivantes sont bien définies)

$$\boxed{\begin{array}{llll} \bullet\ \cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b & & \bullet\ \sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b \\ \bullet\ \cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b & & \bullet\ \sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b \\ \bullet\ \tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\tan b} & & \bullet\ \tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a\tan b} \end{array}}$$

Proposition 3.18.— Formules de duplication —. En particulier, lorsque $a = b$, nous obtenons :

$$\boxed{\begin{array}{lll} \bullet\ \cos(2a) & = & \cos^2(a) - \sin^2(a) = 1 - 2\sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 \\ \bullet\ \sin(2a) & = & 2\sin(a)\cos(a) \\ \bullet\ \tan(2a) & = & \dfrac{2\tan(a)}{1 - \tan^2(a)} \end{array}}$$

Résolution d'équations trigonométriques

Proposition 3.19.— Soit a, x des réels.

- $\cos(x) = \cos(a) \iff x \equiv a\ [2\pi]$ ou $x \equiv -a\ [2\pi]$.
- $\sin(x) = \sin(a) \iff x \equiv a\ [2\pi]$ ou $x \equiv \pi - a\ [2\pi]$.
- $\tan(x) = \tan(a) \iff x \equiv a\ [\pi]$.

Méthodes

Sommes et produits finis

Méthode 3.1.— Comment calculer une somme ou un produit fini

On peut calculer une somme ou un produit finis

- à l'aide d'un récurrence ;
- en reconnaissant une somme de référence ;
- à l'aide d'un changement d'indice oud'un regroupement de termes ;
- en utilisant l'identité géométrique ou la formule du binôme de Newton (pour une somme) ;
- au moyen d'un télescopage.

Utiliser un télescopage

Méthode 3.2.— Comment calculer une somme à l'aide d'un « télescopage »

Lorsque les termes à sommer peuvent s'écrire comme différence de deux termes consécutifs d'une suite auxiliaire ($x_k = a_{k+1} - a_k$), on peut utiliser le **théorème 3.3**. Les termes s'éliminent deux à deux, il ne reste que le premier et le dernier :

$$\sum_{k=0}^{n} x_k = \sum_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_0$$

Remarque : ce principe s'applique également aux produits de la forme $\prod_{k=0}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k}$. En effet :

$$\prod_{k=0}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\cancel{a_1}}{a_0} \times \frac{\cancel{a_2}}{\cancel{a_1}} \times \cdots \times \frac{\cancel{a_n}}{\cancel{a_{n-1}}} \times \frac{a_{n+1}}{\cancel{a_n}} = \frac{a_{n+1}}{a_0}$$

Exemple : en remarquant que, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, calculer la somme $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

Grâce à l'indication, on obtient directement une somme télescopique :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

Exemple : calculer la valeur du produit $P_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k} \right)$.

En réduisant au même dénominateur, on fait cette fois apparaître un produit télescopique :

$$P_n = \prod_{k=2}^{n} \left(\frac{k-1}{k} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{n-2}{n-1} \times \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}$$

Mise en œuvre : exercice 3.1, **exercice 3.4** et **exercice 3.5**.

Utiliser un changement d'indice

> ❑ **Méthode 3.3.— Comment effectuer un changement d'indice dans une somme**
> $\boxed{1}$ On définit le nouvel indice en fonction de l'indice de départ.
> $\boxed{2}$ On exprime la somme en utilisant le nouvel indice. Pour cela, on exprime le terme sous la somme en fonction du nouvel indice, puis on change les bornes de la somme.
> Bien noter que l'indice de sommation est « muet ». Par exemple, $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j$.

Exemple : à l'aide du changement d'indice $j = n - k$, retrouver la valeur de la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} k$.

On applique le changement d'indice $j = n - k$ à S_n. Lorsque $k = 0$, $j = n$, lorsque $k = n$, $j = 0$ et $k = n - j$; ainsi :

$$S_n = \sum_{j=0}^{n}(n-j) = \sum_{j=0}^{n} n - \sum_{j=0}^{n} j = (n+1) \times n - \sum_{j=0}^{n} j.$$

L'indice de sommation étant muet, on a $\sum_{j=0}^{n} j = \sum_{k=0}^{n} k = S_n$, de sorte que l'égalité précédente s'écrit :

$$S_n = n(n+1) - S_n$$

soit $2S_n = n(n+1)$. Finalement, $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$: on retrouve le résultat de la **proposition 3.4**.

Mise en œuvre : exercice 3.3 et **exercice 3.8**.

Utiliser un regroupement de termes

> ❑ **Méthode 3.4.— Comment calculer une somme en groupant des termes**
> Pour obtenir la valeur de certaines sommes, on est parfois conduit à décomposer la somme de départ en plusieurs sommes plus simples à calculer. On peut par exemple séparer les termes d'indice pair et les termes d'indice impair lorsque l'occasion se présente.

Exemple : calculer la somme $S_n = \sum_{k=0}^{2n} \min(k, n)$, où $\min(k, n)$ est le minimum des entiers k et n.

Pour tout entier $k \in [\![0, 2n]\!]$, on a $\min(k, n) = k$ lorsque $k \leqslant n$ et $\min(k, n) = n$ lorsque $k > n$. On peut donc décomposer S_n en deux sommes aisées à calculer, celle d'indice $k \in [\![0, n]\!]$ et celle d'indice $k \in [\![n+1, 2n]\!]$ à l'aide du **théorème 3.2**.

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \min(k, n) + \sum_{k=n+1}^{2n} \min(k, n) = \sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=n+1}^{2n} n = \frac{n(n+1)}{2} + n \times n = \frac{n(3n+1)}{2}.$$

Exemple : calculer la somme $S_n = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k^2$.

On calcule S_n en séparant les termes d'indices pairs et impairs. On a :

$$S_n = \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant 2n \\ k \text{ pair}}} (-1)^k k^2 + \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant 2n \\ k \text{ impair}}} (-1)^k k^2 = \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant 2n \\ k \text{ pair}}} k^2 - \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant 2n \\ k \text{ impair}}} k^2$$

Un entier pair compris entre 0 et $2n$ est de la forme $2p$, avec $p \in [\![0, n]\!]$. De même, un entier impair compris entre 0 et $2n$ est de la forme $2p+1$, avec $p \in [\![0, n-1]\!]$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{p=0}^{n}(2p)^2 - \sum_{p=0}^{n-1}(2p+1)^2 = \sum_{p=0}^{n}4p^2 - \sum_{p=0}^{n-1}(4p^2+4p+1) \\ &= 4\sum_{p=0}^{n}p^2 - 4\sum_{p=0}^{n-1}p^2 - 4\sum_{p=0}^{n-1}p - \sum_{p=0}^{n-1}1 \\ &= 4n^2 - 4\frac{n(n-1)}{2} - n = 2n^2 + n \end{aligned}$$

Mise en œuvre : exercice 3.6 et **exercice 3.10**.

■ Sommes doubles

Soit $(a_{i,j})$ une famille de réels indexée par l'ensemble des couples $(i,j) \in [\![1,m]\!] \times [\![1,n]\!]$. Calculer la somme double

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant m \\ 1\leqslant j\leqslant n}} a_{i,j}$$

revient à ajouter tous les nombres réels du tableau ci-contre. D'après le **théorème 3.9**, on peut par exemple commencer par sommer en ligne puis en colonne, ou vice-versa.

$i \backslash j$	**1**	**2**	$\cdots$	n
1	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$\cdots$	$a_{1,n}$
2	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$\cdots$	$a_{2,n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
m	$a_{m,1}$	$a_{m,2}$	$\cdots$	$a_{m,n}$

❑ **Méthode 3.5.— Comment calculer une somme double indexée par un rectangle**
Grâce au **théorème 3.9** le calcul de $\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant m \\ 1\leqslant j\leqslant n}} a_{i,j}$ se ramène à calculer une «somme de sommes». Plus précisément,

- comme $\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant m \\ 1\leqslant j\leqslant n}} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}$, on peut commencer à sommer en j puis en i ;
- comme $\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant m \\ 1\leqslant j\leqslant n}} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{i,j}$, on peut commencer à sommer en i puis en j.

Parfois, l'un des deux choix s'avère bien plus facile.

Exemple : calculer la somme double $S_{n,q} = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant q}} (i+j)$.

$$S_{n,q} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{q}(i+j) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{q} i + \sum_{j=1}^{q} j\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(qi + \frac{q(q+1)}{2}\right) = q\sum_{i=1}^{n} i + n\frac{q(q+1)}{2}$$
$$= q\frac{n(n+1)}{2} + n\frac{q(q+1)}{2} = \frac{nq}{2}(n+q+2)$$

Mise en œuvre : exercice 3.10 à exercice 3.11.

❑ **Méthode 3.6.— Comment calculer une somme double indexée par un triangle**
Pour calculer une somme double indexée par un triangle $\{(i,j);\ 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n\}$ (somme de tous les $a_{i,j}$ du tableau ci-dessous), on doit parfois intervertir les deux symboles sommes. Pour cela, il faut être très prudent puisque, cette fois, les deux indices de sommation sont liés.
Pour calculer la somme de tous les $(a_{i,j})$ du tableau ci-contre, on peut sommer les éléments

- ligne par ligne : $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}$
- colonne par colonne : $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{i,j}$

$i \backslash j$	**1**	**2**	$\cdots$	n
1	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$\cdots$	$a_{1,n}$
2		$a_{2,2}$	$\cdots$	$a_{2,n}$
$\vdots$			$\ddots$	$\vdots$
n				$a_{n,n}$

Exemple : calculer la somme double $S_n = \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i}{j}$.

On somme sur le triangle $\{(i,j);\ 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n\}$ et nous allons voir que l'ordre des sommations est ici crucial. En effet, on peut écrire $S_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\frac{i}{j} = \sum_{i=1}^{n}\left(i\sum_{j=i}^{n}\frac{1}{j}\right)$, mais on ne connaît pas l'expression de $\sum_{j=i}^{n}\frac{1}{j}$. En revanche, l'autre ordre de sommation permet d'obtenir rapidement le résultat :

$$S_n = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\frac{i}{j} = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j} i\right) = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\times\frac{j(j+1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(j+1) = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n+1} k$$
$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n+1} k - 1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{n^2+3n+2-2}{2}\right) = \frac{n(n+3)}{4}$$

Mise en œuvre : exercice 3.10, exercice 3.10, exercice 3.11.

■ Inégalités

Majorer, minorer, encadrer

Pour comparer deux nombres :

- on peut étudier le signe de la différence ;
- s'il s'agit de nombres positifs, on peut comparer leur quotient à 1 ;
- s'il s'agit de nombres positifs, on peut comparer leurs carrés.

❑ Méthode 3.7.— Comment encadrer un quotient

Pour encadrer un quotient $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$, dont numérateur et dénominateur sont strictement positifs :

[1] On encadre $N(x)$.

[2] On encadre $D(x)$ et on en déduit un encadrement de $\dfrac{1}{D(x)}$.

[3] On multiplie terme à terme pour obtenir un encadrement de $\dfrac{N(x)}{D(x)}$.

❑ Méthode 3.8.— Comment encadrer une somme

Pour majorer (respectivement minorer, encadrer) la somme $\sum\limits_{k=0}^{n} x_k$:

[1] On considère $k \in [\![0, n]\!]$, on encadre x_k. Ainsi, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $m_k \leqslant x_k \leqslant M_k$.

[2] Puis on ajoute terme à terme toutes ces majorations $\sum\limits_{k=0}^{n} m_k \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n} x_k \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n} M_k$.

Exemple : montrons que pour tout entier naturel non nul $n \in \mathbb{N}^*$, $n \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} k \leqslant n^2$.

[1] Si $k \in [\![1, n]\!]$, alors $1 \leqslant k \leqslant n$.

[2] En sommant terme à terme ces encadrements, il vient $\sum\limits_{k=1}^{n} 1 \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} k \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} n$, soit $n \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} k \leqslant n^2$.

D'après la **proposition 3.4** $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n^2+n}{2}$ est précisément le milieu entre n et n^2.

Mise en œuvre : exercice 3.12 et **exercice 3.14**.

Partie entière

❑ Méthode 3.9.— Comment calculer la partie entière d'un réel

Soit $x \in \mathbb{R}$ un réel. Pour calculer la partie entière de x :

[1] On encadre x entre deux entiers consécutifs :

$$p \leqslant x < p + 1$$

[2] On conclut alors que $\lfloor x \rfloor = p$.

Mise en œuvre : exercice 3.15 et **exercice 3.16**.

■ Trigonométrie

Tableau de valeurs remarquables

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin(x)$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos(x)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\tan(x)$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	

Calculer le cosinus ou le sinus d'un angle donné

❑ Méthode 3.10.— Comment calculer un cosinus ou un sinus

1 À l'aide des règles de calcul, on se ramène au calcul d'une valeur connue.

2 On conclut à l'aide du tableau des valeurs remarquables de cosinus et de sinus.

Exemple : calculons $\cos(x)$ et $\sin(x)$ pour $x = \frac{\pi}{12}$.
On peut noter que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$. Par les formules d'addition, il en résulte :

$$\begin{aligned}
\cos(\tfrac{\pi}{12}) &= \cos(\pi/3)\cos(\pi/4) + \sin(\pi/3)\sin(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}\,(1+\sqrt{3})}{4} \\
\sin(\tfrac{\pi}{12}) &= \sin(\pi/3)\cos(\pi/4) - \cos(\pi/3)\sin(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}\,(\sqrt{3}-1)}{4}.
\end{aligned}$$

Transformer des expressions trigonométriques

❑ Méthode 3.11.— Comment simplifier une expression trigonométrique

Les fonctions trigonométriques possèdent beaucoup de symétries. Grâce à elles, il est souvent possible de simplifier les expressions trigonométriques.

- On utilise les propriétés de périodicité, parité et autres (**proposition 3.16**).
- Il est parfois nécessaire d'utiliser les règles de calcul et le tableau des valeurs remarquables pour conclure. Il s'agit alors de développer (**méthode 3.12**) puis réduire l'expression considérée.

Exemple : simplifions l'expression de $A(x) = \sin(\frac{3\pi}{2} - x) + \cos(\pi + x) + \cos(x + \frac{\pi}{2}) + \sin(x - \frac{\pi}{2})$.

$$\begin{aligned}
A(x) &= \sin(\pi + \frac{\pi}{2} - x) + \cos(\pi + x) + \cos(x + \frac{\pi}{2}) + \sin(x - \frac{\pi}{2}) \\
&= -\sin(\frac{\pi}{2} - x) - \cos(x) + \cos(x + \frac{\pi}{2}) + \sin(x - \frac{\pi}{2}) \\
&= -\cos(x) - \cos(x) - \sin(x) - \cos(x) = -\sin(x) - 3\cos(x)
\end{aligned}$$

Mise en œuvre : exercice 3.17.

❑ Méthode 3.12.— Comment développer une expression trigonométrique

Il s'agit d'exprimer $\cos(nx+my)$ ou $\sin(nx+my)$ comme une expression polynomiale en $\cos(x), \cos(y), \sin(x), \sin(y)$.

$\boxed{1}$ À l'aide des formules d'addition (**proposition 3.17**), on commence par se ramener à des expressions de la forme $\cos(nx), \cos(my), \sin(nx), \sin(my)$.

$\boxed{2}$ Lorsque $n, m \leqslant 2$, on conclut à l'aide des formules de duplication (**proposition 3.18**) :

$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x);\ \sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x).$$

$\boxed{3}$ Pour $n \geqslant 3$ ou $m \geqslant 3$, on se ramène au cas précédent au moyen des formules d'addition ou de duplication.

Exemple : exprimons $\cos(3x)$ et $\sin(3x)$ comme des expressions polynomiales en $\cos(x)$, $\sin(x)$.

$$\begin{aligned}
\cos(3x) &= \cos(x+2x) = \cos(x)\cos(2x) - \sin(x)\sin(2x) = (2\cos^2(x)-1)\cos(x) - 2\sin^2(x)\cos(x)\\
&= 2\cos^3(x) - \cos(x) - 2\cos(x)(1-\cos^2(x)) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)\\
\sin(3x) &= \sin(x+2x) = \sin(x)\cos(2x) + \cos(x)\sin(2x) = \sin(x)(1-2\sin^2(x)) + 2\sin(x)\cos^2(x)\\
&= \sin(x) - 2\sin^3(x) + 2\sin(x)(1-\sin^2(x)) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)
\end{aligned}$$

Mise en œuvre : exercice 3.18.

❑ Méthode 3.13.— Comment linéariser une expression trigonométrique

Contrairement à l'objectif de la méthode précédente, il s'agit ici de transformer une expression polynomiale en $\sin(x)$ et $\cos(x)$ en une combinaison linéaire de $\sin(nx)$ et $\cos(mx)$. Pour cela, on utilise les **formules de linéarisation** suivantes (déduites des formules d'addition et de duplication) valides pour tous réels x et y :

- $\cos^2(x) = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$
- $\sin^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$
- $\cos(x)\sin(x) = \dfrac{\sin(2x)}{2}$
- $\cos(x)\cos(y) = \dfrac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{2}$
- $\sin(x)\sin(y) = \dfrac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}$
- $\sin(x)\cos(y) = \dfrac{\sin(x+y)+\sin(x-y)}{2}$

Remarque : ces formules de linéarisation se déduisent des formules d'addition et de duplication.

Exemple : linéarisons $\cos^3(x)$. On a

$$\begin{aligned}
\cos^3(x) &= \cos(x)\cos^2(x) = \frac{1}{2}\cos(x)(1+\cos(2x)) = \frac{1}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\cos(2x)\cos(x)\\
&= \frac{1}{2}\cos(x) + \frac{1}{4}(\cos(3x)+\cos(x)) = \frac{3}{4}\cos(x) + \frac{1}{4}\cos(3x)
\end{aligned}$$

Mise en œuvre : exercice 3.18.

❑ **Méthode 3.14.— Comment factoriser une expression trigonométrique**
On peut transformer directement une somme de cosinus ou de sinus en produit à l'aide des **formules de factorisation** :

- $\cos(x)+\cos(y) = 2\cos(\frac{x+y}{2})\cos(\frac{x-y}{2})$;
- $\sin(x)+\sin(y) = 2\sin(\frac{x+y}{2})\cos(\frac{x-y}{2})$;
- $\cos(x)-\cos(y) = -2\sin(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{x-y}{2})$;
- $\sin(x)-\sin(y) = 2\cos(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{x-y}{2})$.

Remarque : ces formules de factorisation se déduisent des formules d'addition en posant $p = x+y$, $q = x-y$ de sorte que $x = \dfrac{p+q}{2}, y = \dfrac{p-q}{2}$.

Exemple : factorisons l'expression $g(x) = 2\sin(x)\cos(x) + \sqrt{3}\cos(2x)$.

$$\begin{aligned} g(x) &= 2\sin(x)\cos(x) + \sqrt{3}\cos(2x) = \sin(2x) + \sqrt{3}\cos(2x) \\ &= 2 \times \left[\frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x)\right] = 2 \times \left[\cos(2x)\cos(\frac{\pi}{6}) + \sin(2x)\sin(\frac{\pi}{6})\right] \\ &= 2\cos(2x - \frac{\pi}{6}) \end{aligned}$$

Mise en œuvre : exercice 3.17.

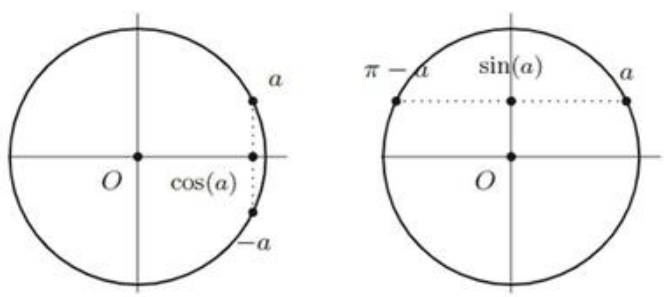
■ Résoudre une équation trigonométrique

En utilisant le cercle trigonométrique et les congruences

Soit $a \in \mathbb{R}$. On cherche les réels x tels que

$$\cos(x) = \cos(a) \tag{3.1}$$
$$\sin(x) = \sin(a) \tag{3.2}$$

Graphiquement, les images $M(x)$ des solutions de (3.1) (respectivement (3.2)) sont les points du cercle unité d'abscisse ou d'ordonnée donnée. Pour chacune de ces équations, il existe donc deux points du cercle unité correspondant à deux « infinités » de solutions réelles.



❑ **Méthode 3.15.— Comment résoudre une équation trigonométrique**
Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour résoudre l'équation trigonométrique (3.1) ou (3.2) :
[1] On représente les images de ces solutions sur le cercle trigonométrique.
[2] On conclut à l'aide de congruences :

- $\cos(x) = \cos(a) \iff x \equiv a[2\pi]$ ou $x \equiv -a[2\pi]$;
- $\sin(x) = \sin(a) \iff x \equiv a[2\pi]$ ou $x \equiv \pi - a[2\pi]$.

Exemple : résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(2x+\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$. On a

$$\cos(2x+\tfrac{\pi}{6}) = -\tfrac{1}{2} \iff \cos(2x+\tfrac{\pi}{6}) = \cos(\tfrac{2\pi}{3}) \iff \left\{\begin{array}{lcl} 2x+\frac{\pi}{6} & \equiv & \frac{2\pi}{3}\ [2\pi] \\ \text{ou} & & \\ 2x+\frac{\pi}{6} & \equiv & -\frac{2\pi}{3}\ [2\pi] \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} 2x & \equiv & \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \\ \text{ou} & & \\ 2x & \equiv & -\frac{5\pi}{6}\ [2\pi] \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & \equiv & \frac{\pi}{4}\ [\pi] \\ \text{ou} & & \\ x & \equiv & -\frac{5\pi}{12}\ [\pi] \end{array}\right.$$

Mise en œuvre : exercice 3.19.

En utilisant une factorisation

❑ Méthode 3.16.— Comment résoudre l'équation $a\cos(x) + b\sin(x) = c$

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $(a,b) \neq (0,0)$. Pour résoudre l'équation $a\cos(x) + b\sin(x) = c$

[1] On factorise par $r = \sqrt{a^2+b^2}$:

$$a\cos(x) + b\sin(x) = c \iff r \times \left[\frac{a}{r}\ \cos(x) + \frac{b}{r}\ \sin(x)\right] = c \tag{3.3}$$

[2] Comme $(\frac{a}{r})^2 + (\frac{b}{r})^2 = 1$, il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(\varphi) = \frac{a}{r}$ et $\sin(\varphi) = \frac{b}{r}$. Par conséquent, (3.3) $a\cos(x) + b\sin(x) = c \iff r\cos(x-\varphi) = c \iff \cos(x-\varphi) = \frac{c}{r}$.

[3] On s'est ainsi ramené à une équation trigonométrique simple.

Exemple : résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation trigonométrique $\cos(x) + \sin(x) = 1$.

[1] Ici $r = \sqrt{2}$. On divise par $\sqrt{2}$.

[2] On obtient

$$\begin{aligned} \cos(x) + \sin(x) = 1 &\iff \tfrac{\sqrt{2}}{2}\cos(x) + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\sin(x) = \tfrac{\sqrt{2}}{2} \\ &\iff \cos(\tfrac{\pi}{4})\cos(x) + \sin(\tfrac{\pi}{4})\sin(x) = \cos(\tfrac{\pi}{4}) \\ &\iff \cos(x-\tfrac{\pi}{4}) = \cos(\tfrac{\pi}{4}) \iff x \equiv \tfrac{\pi}{2}\ [2\pi] \text{ ou } x \equiv 0\ [2\pi] \end{aligned}$$

[3] Finalement, les solutions de l'équation proposée sont $\mathcal{S} = \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Mise en œuvre : exercice 3.20, exercice 3.21.

❑ Méthode 3.17.— Comment résoudre une inéquation trigonométrique

Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour résoudre l'inéquation $\cos(x) \geqslant \cos(a)$ (resp. $\sin(x) \geqslant \sin(a)$) sur un intervalle donné I, on s'aidera d'un schéma :

[1] On place sur le cercle trigonométrique les images des réels a et $-a$ (resp. a et $\pi - a$).

[2] Ils délimitent deux arcs de cercle unité.

- L'un correspond aux images des réels x tels que $\cos(x) \geqslant \cos(a)$ (resp. $\sin(x) \geqslant \sin(a)$).
- L'autre aux réels x tels que $\cos(x) \leqslant \cos(a)$ (resp. $\sin(x) \leqslant \sin(a)$).

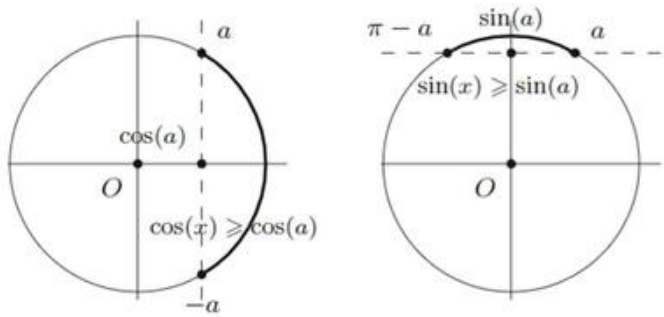
[3] L'ensemble des solutions dans I est une réunion de sous-intervalles de I.

Illustration :

Les figures ci-contre représentent sur le cercle unité, les images des réels $x \in \mathbb{R}$ qui sont solutions des inéquations suivantes :

$$\begin{aligned} \cos(x) &\geqslant \cos(a) \\ \sin(x) &\geqslant \sin(a) \end{aligned}$$

lorsque $a = \frac{\pi}{3}$.



Exemple : résolvons dans $I = [0, 2\pi]$ l'inéquation $2\sin(x) - \sqrt{3} < 0$.

$$2\sin(x) - \sqrt{3} < 0 \iff \sin(x) < \sin(\frac{\pi}{3})$$

$\boxed{1}$ Plaçons sur le cercle trigonométrique les images de $a = \frac{\pi}{3}$ et $\pi - a = \frac{2\pi}{3}$ (voir figure ci-dessus).
$\boxed{2}$ Les images des solutions sur le cercle trigonométrique forment l'arc de cercle inférieur (les extrémités étant exclues).
$\boxed{3}$ Finalement, l'ensemble des solutions dans I est $\mathcal{S} = [0, \frac{\pi}{3}] \cup [\frac{2\pi}{3}, 2\pi]$.

Mise en œuvre : exercice 3.22.

Vrai/Faux

	Vrai	Faux
1. Pour $n \in \mathbb{N}$, $(2n+1)!$ est impair.	☐	☐
2. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$	☐	☐
3. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$	☐	☐
4. Pour $n,p \in \mathbb{N}^\star$, on a : $\displaystyle\frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}=\binom{n}{p}$.	☐	☐
5. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}2^k = 3^n$	☐	☐
6. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^\star$, $(\frac{a}{b} \geqslant 1 \iff a \geqslant b)$.	☐	☐
7. Pour tout réel x, $\cos(x) = 1-2\sin^2(\frac{x}{2})$.	☐	☐
8. $\cos(1)=0$.	☐	☐
9. Dans $[0;2\pi]$, l'équation $\sin(x)=0$ a une unique solution.	☐	☐
10. Pour $n,p \in \mathbb{N}^\star$, on a : $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} k^j = \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} k^j$.	☐	☐

Énoncé des exercices

Calcul de sommes et de produits

Exercice 3.1 : Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, calculer les sommes suivantes.

1. $S_n = \sum_{k=0}^{n} (2^k + 4k + n - 3)$
2. $S_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k 3^{n-k}$
3. $S_n = \sum_{k=0}^{n} k \times k!$

Exercice 3.2 : Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, calculer les sommes suivantes.

1. $S_n = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)$
2. $S_n = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2$
3. $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k$

Exercice 3.3* : À l'aide du changement d'indice indiqué, calculer les sommes suivantes.

1. $S_n = \sum_{k=1}^{n} k2^k$. *On posera* $j = k - 1$.
2. $T_n = \sum_{k=0}^{n} \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$. *On utilisera le changement d'indice* $j = n - k$.

Exercice 3.4 : Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, calculer le produit $P_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.

Exercice 3.5* : Pour $n \geqslant 2$, on considère le produit $P_n = \prod_{k=2}^{n} \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1}$.

1. Démontrer que $P_n = \frac{2}{n(n+1)} \prod_{k=2}^{n} \frac{k^2 + k + 1}{k^2 - k + 1}$.
2. En déduire une expression simplifiée de P_n.

Coefficients binomiaux

Exercice 3.6 : Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose : $A_n = \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k}$ et $B_n = \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k}$.

Calculer $A_n + B_n$ et $A_n - B_n$. En déduire la valeur des sommes A_n et B_n.

Exercice 3.7 : En utilisant la fonction polynomiale $f : x \mapsto (1+x)^n$, calculer les sommes suivantes.

1. $S_1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$
2. $S_2 = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$
3. $S_3 = \sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}$
4. $S_4 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$

Exercice 3.8 : Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k}$.

1. En effectuant le changement d'indice $j = 2n+1-k$, déterminer une autre expression de S_n.
2. En déduire la valeur de $2S_n$, puis celle de S_n.

Exercice 3.9 : formule de Vandermonde.**

1. Démontrer la formule de Vandermonde $\forall n, p, q \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}$.
2. Application : en déduire la valeur des sommes $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}^2$.

■ Sommes doubles

Exercice 3.10* : Calculer les sommes doubles suivantes.

1. $S_n = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} i$
2. $S_n = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} i$
3. $S_n = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} (i+j)$
4. $S_n = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (i+j)^2$
5. $S_n = \sum_{0 \leqslant i,j \leqslant n} \binom{i}{j}$
6. $S_n = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \max(i,j)$

où $\max(i,j)$ désigne le plus grand des entiers i et j.

Exercice 3.11* : Soit n un entier naturel. On considère la somme double $S_n = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=k}^{n} 2^j$.

1. Vérifier que $S_n = n2^{n+1} + 1$.
2. Démontrer que $S_n = \sum_{j=0}^{n} (j+1)2^j$.
3. En déduire que $\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$.
4. Déterminer alors la valeur de la somme double $T_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i+1} k2^{k-1}$.

■ Inégalités

Exercice 3.12 : Démontrer les inégalités suivantes

1. $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $ab \leqslant \frac{1}{2}(a^2+b^2)$
2. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $ab + ac + bc \leqslant a^2 + b^2 + c^2$
3. $\forall a, b \in \mathbb{R}^{+\star}$, $\frac{1}{2}(\ln a + \ln b) \leqslant \ln \frac{a+b}{2}$
4. $\forall a, b \in \mathbb{R}_+$, $|\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leqslant \sqrt{|a-b|}$
5. $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $(a+b)^4 \leqslant 8(a^4+b^4)$

Exercice 3.13 :** Soit a et b deux réels tels que $0 < a \leqslant b$. Démontrer que :

$$\ln\left(1+\frac{a}{b}\right)\ln\left(1+\frac{b}{a}\right) \leqslant (\ln 2)^2.$$

Exercice 3.14 : Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Sans effectuer de récurrence, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (1+x)^n \geqslant 1 + nx.$$

Exercice 3.15 : Démontrez que pour tout nombre réel $x \in \mathbb{R}$,

$$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor x \right\rfloor$$

Exercice 3.16* : Dans cet exercice, n désigne un entier naturel fixé.
1. À l'aide de la formule du binôme, développer $(3+\sqrt{5})^n$ et $(3-\sqrt{5})^n$.
2. En déduire que $(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$ est un entier pair.
3. En déduire que la partie entière de $(3+\sqrt{5})^n$ est un entier impair.

■ Trigonométrie

Exercice 3.17 : Démontrer les égalités suivantes :
1. $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) + \sin(4x) = 4\cos(\frac{x}{2})\cos(x)\sin(\frac{5x}{2})$.
2. $\cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) + \cos(4x) = 4\cos(\frac{x}{2})\cos(x)\cos(\frac{5x}{2})$.

Exercice 3.18 : Linéarisation et opération inverse
1. Linéariser $\cos^2(x)\sin^2(x)$.
2. Linéariser $\cos^3(x)\sin(x)$.
3. Exprimer $\cos(5x)$ en fonction de $\cos(x)$.

Exercice 3.19 : Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:
1. $\cos(3x - \pi/4) = \sqrt{2}/2$
2. $\sin(2x + \pi/4) = -\sqrt{2}/2$
3. $\cos(3x - \pi/4) = \cos(x + \pi/3)$
4. $\sin(x + \pi/3) = \sin(3x - \pi/6)$

Exercice 3.20 : Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in]-\pi, \pi]$:
1. $2\sin(x)\cos(x) + \sqrt{3}\cos(2x) = 0$
2. $2\cos^2(x) + (\sqrt{3}+2)\cos(x) + \sqrt{3} = 0$
3. $1 + \cos(2x) + \cos(4x) = 0$
4. $4\sin^2(x) + 2(1+\sqrt{3})\sin(x) + \sqrt{3} = 0$

Exercice 3.21* :
1. Trouvez une relation simple entre $\cos(x) - \sin(x)$ et $\sin(2x)$.
2. Résolvez sur $\mathbb{R}$ l'équation $\sin(2x) + (1+\sqrt{2})(\cos(x) - \sin(x)) = 1 + \sqrt{2}$.

Exercice 3.22 : Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue $x \in [0, 2\pi[$:
1. $2\sin(x) + 1 < 0$
2. $2\cos(4x) - \sqrt{3} \geqslant 0$
3. $2\cos^2(x) - \cos(x) - 1 < 0$
4. $4\cos^2(x) - 2(\sqrt{2}-1)\cos(x) - \sqrt{2} > 0$

Indications

Ex. 3.1

3. *On pourra écrire $k = k + 1 - 1$ de manière à faire apparaître une somme télescopique.*

Ex. 3.2

Pour la dernière somme, on pourra distinguer les cas n pair ou impair.

Ex. 3.3

2. *En posant $j = n - k$, on donnera une autre expression de T_n ; puis on calculera la valeur de $2T_n$.*

Ex. 3.6

Que valent les sommes $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ *et* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$ *?*

Ex. 3.9

Pour la question 1, on pourra raisonner par récurrence sur p.

Ex. 3.12

Pour la dernière question, on pourra commencer par montrer que $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$.

Ex. 3.13

On pourra utiliser la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$.

Ex. 3.15

Vous pourrez discuter suivant la parité de $\lfloor x \rfloor$.

Ex. 3.16

3. *On donne $\sqrt{5} \approx 2,2$ à 10^{-1} près.*

Ex. 3.17

Il s'agit de factoriser les sommes proposées. On pourra pour cela utiliser les **formules de factorisation** *(***méthode 3.14***).*

Ex. 3.19

Vous appliquerez la **méthode 3.15**.

Ex. 3.20

1. *Vous appliquerez la* **méthode 3.16**.
2. *Vous pourrez effectuer un changement d'inconnue...*

Ex. 3.21

1. *Calculez* $(\cos(x) - \sin(x))^2$.
2. *On pourra effectuer le changement d'inconnue $u = \cos(x) - \sin(x)$.*

Ex. 3.22

Il s'agit de mettre en œuvre la **méthode 3.17**.

Corrigé des vrai/faux

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F	V	F	V	F	F	V	F	F	V

1. C'est vrai pour $n = 0$ ($0! = 1$), et toujours faux pour $n \in \mathbb{N}^\star$ ($(2n+1)! = 2 \times \cdots \times (2n+1)$).

2. C'est vrai, c'est l'identité géométrique appliquée à $(a, -b)$ pour $n = 2$.

3. Ne pas confondre somme et produit. C'est la somme d'une progression géométrique de raison 2 :

$$\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2 \times \frac{1-2^n}{1-2} = 2^{n+1} - 2.$$

La relation est en revanche vraie en changeant la somme en produit :

$$\prod_{k=1}^{n} 2^k = 2 \times 2^2 \times \cdots \times 2^n = 2^{1+2+\cdots+n} = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

4. C'est vrai puisque

$$\frac{n}{p} \times \binom{n-1}{p-1} = \frac{n}{p} \times \frac{(n-1)!}{(p-1)![n-1-(p-1)]!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}.$$

5. Dans la formule du binôme, la sommation commence à 0 et pas à 1 : $3^n = (2+1)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$.

6. C'est faux lorsque b est strictement négatif, $\left(\frac{a}{b} \geqslant 1 \iff a \leqslant b\right)$.

7. D'après la formule de duplication, $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2(a)$. Le résultat en découle en prenant $a = \frac{x}{2}$.

8. D'après le tableau de valeurs remarquables de cos, on a plutôt, $\cos(0) = 1$.

9. C'est faux puisque $\sin(0) = \sin(\pi) = 0$.

10. C'est le **théorème 3.9**. Quand on somme sur un rectangle, on peut intervertir l'ordre des sommations sans se poser de question.

Corrigé des exercices

Exercice 3.1

1. On découpe S_n en trois sommes et on utilise les formules du cours :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k + 4\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n}(n-3) = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} + 4\frac{n(n+1)}{2} + (n-3)(n+1)$$
$$= 2^{n+1} - 1 + 3(n+1)(n-1).$$

La première est la somme d'une progression géométrique de raison 2.

2. On fait apparaître la somme des termes d'une suite géométrique :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k 3^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} 2^k \frac{3^n}{3^k} = 3^n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 3^n \frac{1-(\frac{2}{3})^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}$$
$$= 3^{n+1}\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right] = 3^{n+1} - 2^{n+1}.$$

Attention, ce n'est pas la formule du binôme !

3. L'égalité $k = k+1-1$ permet de faire apparaître une somme télescopique :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}(k+1-1)\times k! = \sum_{k=0}^{n}[(k+1)\times k! - k!] = \sum_{k=0}^{n}[(k+1)! - k!]$$
$$= \sum_{k=0}^{n}(k+1)! - \sum_{k=0}^{n} k! = (1! + \cdots + n! + (n+1)!) - (0! + 1! + \cdots + n!)$$

Ainsi, $S_n = (n+1)! - 0! = (n+1)! - 1$. ▲

*On coupe la somme en deux par linéarité (**proposition 3.1**).*

Exercice 3.2

1. On coupe la somme en deux puis on utilise la **proposition 3.4** :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

2. On développe $(2k-1)^2$ puis on utilise les formules de la **proposition 3.4** :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(4k^2 - 4k + 1) = 4\sum_{k=1}^{n} k^2 - 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$$
$$= 4 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4 \times \frac{n(n+1)}{2} + n$$
$$= \frac{1}{3}[2n(n+1)(2n+1) - 6n(n+1) + 3n] = \frac{1}{3}[4n^3 - n].$$

3. Lorsque n est pair, on a

$$S_n = \underbrace{-1+2}_{1}\underbrace{-3+4}_{1} - \cdots \underbrace{-(n-1)+n}_{1} = 1 \times \frac{n}{2} = \frac{n}{2}$$

On regroupe les termes 2 par 2.

Après regroupement, le dernier terme reste cette fois isolé.

et, lorsque n est impair,

$$S_n = \underbrace{-1+2}_{1}\underbrace{-3+4}_{1}-\cdots\underbrace{-(n-2)+n-1}_{1}-n = 1\times\frac{n-1}{2}-n = -\frac{n+1}{2}.$$

Finalement, $S_n = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$. ▲

Exercice 3.3

1. Le changement d'indice $j = k-1$ donne :

$$S_n = \sum_{j=0}^{n-1}(j+1)2^{j+1} = \sum_{j=0}^{n-1} j2^{j+1} + \sum_{j=0}^{n-1} 2^{j+1} = 2\sum_{j=0}^{n-1} j2^j + 2\sum_{j=0}^{n-1} 2^j.$$

Le terme obtenu pour $j = 0$ est nul.

On reconnaît S_n au dernier terme près.

Dans la deuxième somme, on reconnaît une progression géométrique. Pour la première, on écrit :

$$\sum_{j=0}^{n-1} j2^j = \sum_{j=1}^{n-1} j2^j = \left(\sum_{j=1}^{n} j2^j\right) - n2^n = S_n - n2^n.$$

Par conséquent,

$$S_n = 2(S_n - n2^n) + 2\frac{1-2^n}{1-2} = 2S_n - n2^{n+1} + 2^{n+1} - 2.$$

On en déduit que : $S_n = (n-1)2^{n+1} + 2$.

$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$

2. Le changement d'indice $j = n-k$ permet d'écrire :

$$T_n = \sum_{j=0}^{n} \cos^2\left[\frac{(n-j)\pi}{2n}\right] = \sum_{j=0}^{n} \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{j\pi}{2n}\right) = \sum_{j=0}^{n} \sin^2\left(\frac{j\pi}{2n}\right)$$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

On en déduit la valeur de $2T_n$:

$$\begin{aligned} 2T_n = T_n + T_n &= \sum_{k=0}^{n} \cos^2\frac{k\pi}{2n} + \sum_{k=0}^{n} \sin^2\frac{k\pi}{2n} = \sum_{k=0}^{n}\left(\cos^2\frac{k\pi}{2n} + \sin^2\frac{k\pi}{2n}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1. \end{aligned}$$

Finalement, $T_n = \dfrac{n+1}{2}$. ▲

Exercice 3.4

On factorise puis on sépare ce produit en deux, ce qui permet de faire apparaître deux produits télescopiques :

$$\begin{aligned} P_n &= \prod_{k=2}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{1}{k}\right) = \prod_{k=2}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right) = \prod_{k=2}^{n}\frac{k+1}{k}\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k} \\ &= \left(\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\cdots\times\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\cdots\times\frac{n-1}{n}\right) = \frac{n+1}{2}\times\frac{1}{n} = \frac{n+1}{2n}. \end{aligned}$$

▲

Exercice 3.5

1. Comme $k^3-1=(k-1)(k^2+k+1)$ et $k^3+1=(k+1)(k^2-k+1)$, on a :

$$P_n=\prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)(k^2-k+1)}=\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k+1}\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}.$$

Par ailleurs,

C'est un produit télescopique.

$$\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k+1}=\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}\times\frac{3}{5}\times\cdots\frac{n-3}{n-1}\times\frac{n-2}{n}\times\frac{n-1}{n+1}=\frac{1\times 2}{n\times(n+1)},$$

ce qui montre que $P_n=\dfrac{2}{n(n+1)}\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}$.

2. On écrit $k^2+k+1=(k+1)^2-(k+1)+1$ et on utilise la question précédente :

$$P_n=\frac{2}{n(n+1)}\prod_{k=2}^{n}\frac{(k+1)^2-(k+1)+1}{k^2-k+1}.$$

Cela permet de faire apparaître de nouveau un télescopage :

$$\begin{aligned}P_n&=\frac{2}{n(n+1)}\times\frac{7}{3}\times\frac{13}{7}\times\frac{21}{13}\times\cdots\times\frac{n^2-n+1}{(n-1)^2-(n-1)+1}\times\frac{(n+1)^2-(n+1)+1}{n^2-n+1}\\&=\frac{2}{n(n+1)}\times\frac{(n+1)^2-(n+1)+1}{3}\end{aligned}$$

ce qui montre finalement que $P_n=\dfrac{2(n^2+n+1)}{3n(n+1)}$. ▲

Exercice 3.6

La formule du binôme permet de calculer A_n+B_n et A_n-B_n :

En sommant ou retranchant, on récupère tous les entiers compris entre 0 et n.

$$A_n+B_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=(1+1)^n=2^n$$

$$A_n-B_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=(1-1)^n=0$$

Par conséquent, $A_n=B_n=2^{n-1}$. ▲

Exercice 3.7

Tout d'abord, la fonction f est définie et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. D'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k. \tag{3.4}$$

1. En évaluant cette égalité en 1, on obtient $2^n=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$, soit $S_1=2^n$.

On retrouve le résultat du cours (**formule du binôme** appliquée à $a=b=1$).

La dérivée du terme constant ($k = 0$) de (3.4) est nulle !

2. En dérivant la relation (3.4), il vient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^{k-1}.$$

On évalue alors cette égalité au point 1 : cela donne $S_2 = n2^{n-1}$.

De nouveau, la dérivée du terme constant (obtenu pour $k = 1$) est nulle.

3. On dérive cette fois la relation de la question précédente :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2} &= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} x^{k-2} \\ &= \sum_{k=2}^{n} k^2 \binom{n}{k} x^{k-2} - \sum_{k=2}^{n} k \binom{n}{k} x^{k-2}.\end{aligned}$$

En évaluant cette égalité en 1, on obtient

$$n(n-1)2^{n-2} = \sum_{k=2}^{n} k^2 \binom{n}{k} - \sum_{k=2}^{n} k \binom{n}{k},$$

Ne pas oublier le premier terme.

ou encore $n(n-1)2^{n-2} = S_3 - \binom{n}{1} - (S_2 - \binom{n}{1})$; d'où

$$S_3 = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n2^{n-2}(n-1+2) = n(n+1)2^{n-2}.$$

Les fonctions sont continues sur $[0, 1]$.

4. On va cette fois intégrer et non pas dériver. On intègre la relation (3.4) entre 0 et 1 :

$$\left[\frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1}\right]_0^1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[\frac{1}{k+1} x^{k+1}\right]_0^1,$$

c'est-à-dire $S_4 = \dfrac{2^{n+1} - 1}{n+1}$. ▲

Exercice 3.8

Formule de symétrie

1. Le changement d'indice $j = 2n + 1 - k$ donne :

$$S_n = \sum_{j=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{2n+1-j} = \sum_{j=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{j}$$

2. L'indice j étant muet, on en déduit que :

$$\begin{aligned}2S_n = S_n + S_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} + \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \\ &= (1+1)^{2n+1} = 2^{2n+1}.\end{aligned}$$

Ainsi, $S_n = \dfrac{2^{2n+1}}{2} = 2^{2n}$. ▲

Exercice 3.9

1. On raisonne par récurrence sur p en notant

$$\mathcal{P}(p) : « \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n} ».$$

• **Initialisation :** Tout d'abord, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{0}{k}\binom{q}{n-k} = \binom{0}{0}\binom{q}{n} = \binom{q}{n},$$

Les autres termes de la somme sont nuls puisque $\binom{n}{k} = 0$ pour $k > n$.

ce qui montre que la propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• **Hérédité :** On suppose maintenant que $\mathcal{P}(p)$ est vraie à un certain rang $p \in \mathbb{N}$ fixé :

$$\forall n, q \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}.$$

Grâce à la **formule de Pascal**, on a alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \binom{p+1}{k}\binom{q}{n-k} &= \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{p}{k} + \binom{p}{k-1}\right]\binom{q}{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k-1}\binom{q}{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{p}{k-1}\binom{q}{n-k},
\end{aligned}$$

la dernière inégalité provenant du fait que $\binom{p}{-1} = 0$. On effectue ensuite le changement d'indice $j = k - 1$ dans la deuxième somme :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{p+1}{k}\binom{q}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k} + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{p}{j}\binom{q}{n-1-j}.$$

Mais, d'après l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(p)$ appliquée à n et $n-1$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n} \qquad \text{et} \qquad \sum_{j=0}^{n-1} \binom{p}{j}\binom{q}{n-1-j} = \binom{p+q}{n-1}.$$

La **formule de Pascal** permet alors de conclure :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{p+1}{k}\binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n} + \binom{p+q}{n-1} = \binom{p+q+1}{n},$$

ce qui montre que $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie.

• **Conclusion :** Par récurrence, $\mathcal{P}(p)$ est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$.

2. Pour le calcul de S_n, la formule de Vandermonde appliquée à $p = q = n$ donne :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{n+n}{n} = \binom{2n}{n}.$$

✐ **Formule de symétrie**

Comme $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$, on en déduit que :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}.$$

Pour calculer T_n, on commence par appliquer le changement d'indice $j = n-k$ et on utilise la formule de symétrie :

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}^2 = \sum_{j=0}^{n} (n-j)\binom{n}{n-j}^2 = \sum_{j=0}^{n} (n-j)\binom{n}{j}^2 \\ &= n\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2 - \sum_{j=0}^{n} j\binom{n}{j}^2 = nS_n - T_n. \end{aligned}$$

Par conséquent, $2T_n = nS_n$; d'où $T_n = \dfrac{nS_n}{2} = \dfrac{n}{2}\binom{2n}{n}$. ▲

Exercice 3.10

✐ *On peut séparer les indices : $i = i \times 1$.*

1. On somme sur le rectangle $[\![1,n]\!] \times [\![1,n]\!]$ et les indices sont séparables :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} 1\right) = \frac{n(n+1)}{2} \times n = \frac{n^2(n+1)}{2}.$$

✐ *Avec l'autre ordre de sommation, $S_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} i$.*

2. On somme cette fois sur le triangle $\{(i,j);\ 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n\}$. On a :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} i = \sum_{j=1}^{n} \frac{j(j+1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(j^2+j) = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n} j^2 + \sum_{j=1}^{n} j\right) \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} + \frac{n(n+1)}{4} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}. \end{aligned}$$

3. On somme de nouveau sur le triangle $\{(i,j);\ 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n\}$:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}(i+j) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} i + \sum_{i=1}^{j} j\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{j(j+1)}{2} + j^2\right) \\ &= \frac{3}{2}\sum_{j=1}^{n} j^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j = \frac{3}{2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{2}\frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)^2}{2}. \end{aligned}$$

4. On développe $(i+j)^2$ et on calcule ensuite les trois sommes indexées par le rectangle $[\![1,n]\!] \times [\![1,n]\!]$:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i^2+2ij+j^2) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} 2ij + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} j^2$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} i^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} 1\right) + 2\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} j\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} 1\right)\left(\sum_{j=1}^{n} j^2\right)$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \times n + 2\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 + n \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{n^2(n+1)(7n+5)}{6}.$$

Les indices sont séparables dans les trois sommes à calculer.

5. On somme ici sur le rectangle $[\![0,n]\!] \times [\![0,n]\!]$ et on peut donc écrire :

$$S_n = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\binom{i}{j} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n}\binom{i}{j}.$$

Sur un rectangle, on peut intervertir les symboles sommes sans se poser de question.

Utilisons plutôt la première égalité. Comme $\binom{i}{j} = 0$ pour $j > i$, on a :

$$S_n = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j} = \sum_{i=0}^{n} 2^i,$$

Les termes de la somme intérieure sont nuls pour $j > i$.

la deuxième égalité provenant de la formule du binôme. On reconnaît alors une progression géométrique de raison 2 :

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} 2^i = 1 \times \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = 2^{n+1} - 1.$$

$\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j} = (1+1)^i$

6. On peut décomposer cette somme en trois, en séparant les termes pour lesquels $i < j$, ceux pour lesquels $j > i$ et enfin ceux pour lesquels $i = j$:

$$S_n = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \max(i,j) + \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n} \max(i,j) + \sum_{i=1}^{n} \max(i,i)$$

$$= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} j + \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n} i + \sum_{i=1}^{n} i.$$

Regroupements de termes

Les deux premières sommes sont égales (échange de i et j) et :

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} j = \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} j = \sum_{j=2}^{n} j(j-1) = \sum_{j=2}^{n} j^2 - \sum_{j=2}^{n} j$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1 - \left(\frac{n(n+1)}{2} - 1\right) = \frac{n(n+1)(n-1)}{3}.$$

Sommation sur un triangle

On obtient donc :

$$S_n = 2\frac{n(n+1)(n-1)}{3} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}.$$

De la même manière, on peut calculer la somme double $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \min(i,j)$. ▲

Corrigé

Exercice 3.11

1. On calcule S_n en commençant par la somme intérieure. Pour celle-ci, on reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de raison 2 :

$$\sum_{j=k}^{n} 2^j = 2^k \frac{1-2^{n-k+1}}{1-2} = \frac{2^k - 2^{n+1}}{-1} = 2^{n+1} - 2^k.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=k}^{n} 2^j = \sum_{k=0}^{n}\left(2^{n+1} - 2^k\right) = \sum_{k=0}^{n} 2^{n+1} - \sum_{k=0}^{n} 2^k \\ &= (n+1)2^{n+1} - (2^{n+1} - 2^0) = n2^{n+1} + 1. \end{aligned}$$

Sommation sur un triangle

2. On calcule maintenant S_n en inversant l'ordre des sommations. On a ($k \in [\![0,n]\!]$ et $j \in [\![k,n]\!]$) si et seulement si ($j \in [\![0,n]\!]$ et $k \in [\![0,j]\!]$). Par conséquent,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=k}^{n} 2^j = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{j} 2^j = \sum_{j=0}^{n}(j+1)2^j.$$

Changement d'indice $k = j+1$

3. On vient de trouver deux expressions différentes de S_n, que l'on identifie :

$$\sum_{j=0}^{n}(j+1)2^j = n2^{n+1} + 1 \qquad \text{ou encore} \qquad \sum_{k=1}^{n+1} k2^{k-1} = n2^{n+1} + 1.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} &= \sum_{k=1}^{n+1} k2^{k-1} - (n+1)2^n = n2^{n+1} + 1 - (n+1)2^n \\ &= 2^n[2n - (n+1)] + 1 = (n-1)2^n + 1. \end{aligned}$$

4. On applique le résultat de la question précédente (en remplaçant n par $i+1$) :

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i+1} k2^{k-1} = \sum_{i=1}^{n}(i2^{i+1} + 1) = \sum_{i=1}^{n}(i2^2 \times 2^{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} 1 \\ &= 4\sum_{i=1}^{n} i2^{i-1} + n = 4[(n-1)2^n + 1] + n, \end{aligned}$$

la dernière égalité découlant aussi de la question précédente. Par conséquent, $T_n = 2^{n+2}(n-1) + 4 + n$. ▲

Exercice 3.12

1. Cette inégalité équivaut à $a^2 + b^2 - 2ab \geqslant 0$, ce qui est vrai puisque :

$$a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2 \geqslant 0.$$

2. D'après la question précédente, on a, pour $x, y \in \mathbb{R}$, $xy \leqslant \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

Alors :

$$ab + ac + bc \leqslant \frac{1}{2}(a^2 + b^2) + \frac{1}{2}(a^2 + c^2) + \frac{1}{2}(b^2 + c^2),$$

c'est-à-dire $ab + ac + bc \leqslant a^2 + b^2 + c^2$.

3. Comme $\frac{1}{2}(\ln a + \ln b) = \frac{1}{2}\ln(ab) = \ln\sqrt{ab}$, l'inégalité équivaut à montrer que $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$, ou encore $a + b - 2\sqrt{ab} \geqslant 0$. Or,

$$a + b - 2\sqrt{ab} = \sqrt{a}^2 + \sqrt{b}^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} = \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geqslant 0,$$

ce qui montre que $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$. Ainsi, $\frac{1}{2}(\ln a + \ln b) \leqslant \ln\frac{a+b}{2}$.

4. Quitte à échanger a et b, on peut supposer que $a \leqslant b$ et on veut alors montrer que $\sqrt{a} - \sqrt{b} \leqslant \sqrt{a-b}$. Comme les deux membres sont positifs, cette inégalité est équivalente à $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \leqslant \sqrt{a-b}^2$, soit :

Pour $x, y \geqslant 0$, $x \leqslant y \Leftrightarrow x^2 \leqslant y^2$.

$$a - 2\sqrt{ab} + b \leqslant a - b,$$

ou encore $b \leqslant \sqrt{ab}$. Or, $a \geqslant b$ donc $ab \geqslant b^2$, d'où $\sqrt{ab} \geqslant b$. Finalement, on a bien démontré l'inégalité $\sqrt{a} - \sqrt{b} \leqslant \sqrt{a-b}$.

5. On a $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, avec $2ab \leqslant a^2 + b^2$ d'après la question **1**. On en déduit que $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2 + b^2)$. En élevant cette inégalité au carré (les deux membres sont positifs), on a alors :

$$(a+b)^4 \leqslant 4(a^2 + b^2)^2.$$

Mais, de nouveau, on a :

Question 1, appliquée à a^2 et b^2.

$$(a^2 + b^2)^2 \leqslant 2[(a^2)^2 + (b^2)^2].$$

Finalement, $(a+b)^4 \leqslant 4 \times 2(a^4 + b^4)$, ce qui prouve l'inégalité attendue. ▲

Exercice 3.13

Introduisons la fonction f définie par $f(x) = \frac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$. Comme a et b sont strictement positifs, f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et, pour $x > 0$:

ln est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$

$$f'(x) = \frac{\frac{a}{1+ax}\ln(1+bx) - \frac{b}{1+bx}\ln(1+ax)}{\ln^2(1+bx)} = \frac{g(x)}{(1+ax)(1+bx)\ln^2(1+bx)},$$

avec $g(x) = a(1+bx)\ln(1+bx) - b(1+ax)\ln(1+ax)$. On a $g(0) = 0$ et :

g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

$$\forall x > 0,\ g'(x) = ab\ln(1+bx) + ab - ba\ln(1+ax) - ba = ab\ln\left(\frac{1+bx}{1+ax}\right) \geqslant 0,$$

ce qui montre que g est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Par conséquent, g est positive sur $\mathbb{R}_+$. Comme f' est du signe de g, on en déduit que f est croissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$. Pour $a, b \in \mathbb{R}^{+\star}$ avec $a \leqslant b$, on a $\frac{1}{a} \geqslant \frac{1}{b} > 0$, donc (par croissance de f) :

$g(0) = 0$ et g est croissante.

$f(\frac{1}{a}) \geqslant f(\frac{1}{b})$

$$\frac{\ln(1 + a \times \frac{1}{a})}{\ln(1 + b \times \frac{1}{a})} \geqslant \frac{\ln(1 + a \times \frac{1}{b})}{\ln(1 + b \times \frac{1}{b})} ;$$

soit $(\ln 2)^2 \geqslant \ln\left(1 + \frac{a}{b}\right)\ln\left(1 + \frac{b}{a}\right)$. ▲

Exercice 3.14

Formule du binôme *appliquée à $a = 1$ et $b = x$.*

L'inégalité est trivialement vraie pour $n = 0$ (elle s'écrit $1 \geqslant 1$). Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, la formule du binôme donne :

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = \binom{n}{0} x^0 + \binom{n}{1} x^1 + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^k = 1 + nx + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

Or x est positif, donc la somme $\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^k$ l'est aussi. Ainsi, $(1+x)^n \geqslant 1+nx$. ▲

Exercice 3.15

Conformément à l'indication fournie, discutons suivant la parité de l'entier $\lfloor x \rfloor$.

- Supposons que $\lfloor x \rfloor = 2n$ est un entier pair. On a donc

$$2n \leqslant x < 2n+1$$

En divisant par 2 cet encadrement, nous obtenons $n \leqslant \frac{x}{2} < n + \frac{1}{2}$. En particulier

$$n \leqslant \frac{x}{2} < n+1$$

D'où, par unicité de la partie entière de $\dfrac{x}{2}$, il vient $\left\lfloor \dfrac{x}{2} \right\rfloor = n$.

Ajoutons $\frac{1}{2}$ à chaque membre de cet encadrement, nous obtenons : $n + \frac{1}{2} \leqslant \frac{x+1}{2} < n+1$. En particulier

$$n \leqslant \frac{x+1}{2} < n+1$$

L'unicité de la partie entière nous permet d'en déduire que $\left\lfloor \dfrac{x+1}{2} \right\rfloor = n$.

Ainsi, si $\lfloor x \rfloor = 2n$ est pair, alors

$$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = n + n = 2n = \lfloor x \rfloor$$

- Supposons que $\lfloor x \rfloor = 2n+1$ est un entier impair. De l'encadrement

$$2n+1 \leqslant x < 2n+2 \tag{3.5}$$

On tire successivement $n + \frac{1}{2} \leqslant \dfrac{x}{2} < n+1$ et $n+1 \leqslant \frac{x+1}{2} < n + \frac{3}{2}$, ce qui entraîne que $\left\lfloor \dfrac{x}{2} \right\rfloor = n$ et $\left\lfloor \dfrac{x+1}{2} \right\rfloor = n+1$. Ainsi, si $\lfloor x \rfloor = 2n+1$ est impair, alors

$$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = n + (n+1) = 2n+1 = \lfloor x \rfloor$$

- Par disjonction de cas, nous avons établi que $\left\lfloor \dfrac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{x+1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$. ▲

Exercice 3.16

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.

1. La **formule du binôme** donne

$$\begin{aligned}
(3+\sqrt{5})^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} (\sqrt{5})^k \\
&= \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} 3^{n-k} (\sqrt{5})^k + \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k} 3^{n-k} (\sqrt{5})^k \\
(3-\sqrt{5})^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} (-\sqrt{5})^k \\
&= \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} 3^{n-k} (\sqrt{5})^k - \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k} 3^{n-k} (\sqrt{5})^k
\end{aligned}$$

2. Ajoutons membre à membre ces égalités, il vient :

$$\begin{aligned}
(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n &= 2 \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} 3^{n-k} (\sqrt{5})^k \\
&= 2 \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} 3^{n-2k} (\sqrt{5})^{2k} \\
&= 2 \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} 3^{n-2k} 5^k
\end{aligned}$$

Sous cette forme, il apparaît clairement que $(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$ égale au double d'une somme d'entiers naturels : il s'agit donc d'un entier pair.

3. D'après la question précédente, il existe un entier naturel $N \in \mathbb{N}$ tel que $(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n = 2N$. De plus, l'indication numérique prouve que $0 < 3-\sqrt{5} < 1$. Par compatibilté de l'ordre avec la multiplication, il s'ensuit que $0 < (3-\sqrt{5})^n < 1$. Comme $(3+\sqrt{5})^n = 2N - (3-\sqrt{5})^n$, il en résulte l'encadrement

$$2N - 1 < (3+\sqrt{5})^n < 2N$$

Comme $\lfloor (3+\sqrt{5})^n \rfloor$ est l'unique entier $k \in \mathbb{Z}$ vérifiant l'encadrement

$$k \leqslant (3+\sqrt{5})^n < k+1$$

il vient

$$\lfloor (3+\sqrt{5})^n \rfloor = 2N - 1$$

Il s'agit donc d'un nombre entier impair. ▲

Exercice 3.17

1. Utilisons les **formules de factorisation** : Méthode 3.14

$$\begin{aligned}
&\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) + \sin(4x) = \sin(x) + \sin(3x) + \sin(2x) + \sin(4x) \\
&= 2\cos(x)\sin(2x) + 2\cos(x)\sin(3x) = 4\cos(x)\big[\sin(2x) + \sin(3x)\big] \\
&= 4\cos(x)\cos(x/2)\sin(5x/2)
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
&\cos(x)+\cos(2x)+\cos(3x)+\cos(4x)=\cos(x)+\cos(3x)+\cos(2x)+\cos(4x)\\
&=2\cos(x)\cos(2x)+2\cos(x)\cos(3x)=4\cos(x)\big[\cos(2x)+\cos(3x)\big]\\
&=4\cos(x)\cos(x/2)\cos(5x/2)
\end{aligned}$$

▲

Exercice 3.18

On utilise les **formules de linéarisation**, *énoncées dans la* **méthode 3.13**.

Mettons en œuvre la **méthode 3.13** :

1. On commence par linéariser le produit cos sin :

$$\cos^2(x)\sin^2(x) \quad = \quad \big(\cos(x)\sin(x)\big)^2=\big(\frac{1}{2}\sin(2x)\big)^2=\frac{1}{4}\sin^2(2x)$$

Pour conclure on linéarise le $\sin^2$, il vient $\cos^2(x)\sin^2(x)=\frac{1}{8}\big(1-\cos(4x)\big)$.

2. $$\begin{aligned}\cos^3(x)\sin(x)&=\frac{1}{2}\cos^2(x)\sin(2x)=\frac{1}{4}\big(1+\cos(2x)\big)\sin(2x)\\&=\frac{1}{4}\sin(2x)+\frac{1}{4}\sin(2x)\cos(2x)=\frac{1}{4}\sin(2x)+\frac{1}{8}\sin(4x)\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\cos(5x)&=\cos(4x)\cos(x)-\sin(4x)\sin(x)\\
&=\big[2\cos^2(2x)-1\big]\cos(x)-2\sin(2x)\cos(2x)\sin(x)\\
&=\big[2(2\cos^2x-1)^2-1\big]\cos x-4\cos x\cos(2x)\sin^2x\\
&=\big[8\cos^5x-8\cos^3x+\cos x\big]-4\cos x(2\cos^2x-1)(1-\cos^2x)\\
&=\big[8\cos^5x-8\cos^3x+\cos x\big]-\big[-8\cos^5x+12\cos^3x-4\cos x\big]\\
&=16\cos^5x-20\cos^3x+5\cos x
\end{aligned}$$

▲

Exercice 3.19

Pour résoudre ces équations trigonométriques, nous suivons la **méthode 3.15**. Pour cela, on s'aide du tableau de valeurs usuelles pour les fonctions sinus et cosinus, rappelé page 74.

1.

$$\begin{aligned}
(1) \quad &\iff \quad \cos(3x-\pi/4)=\sqrt{2}/2 \iff \cos(3x-\pi/4)=\cos(\pi/4)\\
&\iff \left\{\begin{array}{l}3x-\pi/4\equiv\pi/4\ [2\pi]\\ \text{ou}\\ 3x-\pi/4\equiv-\pi/4\ [2\pi]\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}3x\equiv\pi/2\ [2\pi]\\ \text{ou}\\ 3x\equiv 0\ [2\pi]\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{l}x\equiv\pi/6\ [\frac{2\pi}{3}]\\ \text{ou}\\ x\equiv 0\ [\frac{2\pi}{3}]\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble recherché est $\mathcal{S}=\{\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}\}\cup\{\frac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}\}$.

2.

$$\begin{aligned}
(2) \quad &\iff \quad \sin(2x+\pi/4)=-\sqrt{2}/2 \iff \sin(2x+\pi/4)=\sin(-\pi/4)\\
&\iff \left\{\begin{array}{l}2x+\pi/4\equiv-\pi/4\ [2\pi]\\ \text{ou}\\ 2x+\pi/4\equiv 5\pi/4\ [2\pi]\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}x\equiv-\pi/4\ [\pi]\\ \text{ou}\\ x\equiv\pi/2\ [\pi]\end{array}\right.
\end{aligned}$$

L'ensemble recherché est $\mathcal{S} = \{-\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

3.

$$(3) \iff \cos(3x - \pi/4) = \cos(x + \pi/3) \iff \begin{cases} 3x - \pi/4 \equiv x + \pi/3\ [2\pi] \\ \text{ou} \\ 3x - \pi/4 \equiv -x - \pi/3\ [2\pi] \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x \equiv 7\pi/12\ [2\pi] \\ \text{ou} \\ 4x \equiv -\pi/12\ [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv 7\pi/24\ [\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv -\pi/48\ [\frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

L'ensemble solution est $\mathcal{S} = \{\frac{7\pi}{24} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\frac{\pi}{48} + k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\}$.

4.

$$(4) \iff \sin(x + \pi/3) = \sin(3x - \pi/6) \iff \begin{cases} x + \pi/3 \equiv 3x - \pi/6\ [2\pi] \\ \text{ou} \\ x + \pi/3 \equiv 7\pi/6 - 3x\ [2\pi] \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x \equiv \pi/2\ [2\pi] \\ \text{ou} \\ 4x \equiv 5\pi/6\ [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv \pi/4\ [\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv 5\pi/24\ [\pi/2] \end{cases}$$

En ce cas, $\mathcal{S} = \{\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{5\pi}{24} + k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\}$. ▲

Exercice 3.20

1. Pour résoudre cette équation, nous allons d'abord simplifier l'expression au moyen de la formule de duplication des sinus et de la **méthode 3.16**. Il vient

$$(1) \iff \sin(2x) + \sqrt{3}\cos(2x) = 0 \iff \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}\sin(2x) = 0$$

$$\iff \cos(2x - \pi/6) = \cos(\pi/2) \iff \begin{cases} 2x - \pi/6 \equiv \pi/2\ [2\pi] \\ \text{ou} \\ 2x - \pi/6 \equiv -\pi/2\ [2\pi] \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x \equiv 2\pi/3\ [2\pi] \\ \text{ou} \\ 2x \equiv -\pi/3\ [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv \pi/3\ [\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv -\pi/6\ [\pi] \end{cases}$$

2. Cette équation porte sur des puissances successives de $\cos(x)$, on effectue le changement d'inconnue $y = \cos(x)$. Il vient

$$(2) \iff 2\cos^2(x) + (\sqrt{3} + 2)\cos(x) + \sqrt{3} = 0$$

$$\iff \begin{cases} y = \cos(x) \\ 2y^2 + (\sqrt{3} + 2)y + \sqrt{3} = 0 \end{cases}$$

Pour résoudre l'équation polynomiale, utilisons les formules du second degré. Le discriminant $\Delta = (\sqrt{3} + 2)^2 - 8\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 2)^2 > 0$. Par conséquent, le trinôme a deux racines réelles $y_1 = -1$ et $y_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Finalement

$$(2) \iff \begin{cases} \cos(x) = -1 \\ \text{ou} \\ \cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv \pi\ [2\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv \pm 5\pi/6\ [2\pi] \end{cases}$$

*Avec la formule de duplication (**proposition 3.18**) il vient :*

$\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$,

d'où l'on tire que

$1 + \cos(2a) = 2\cos^2(a)$.

3. Pour résoudre cette équation trigonométrique, nous allons utiliser d'abord une formule de factorisation :

$$\begin{aligned}
(3) \quad &\iff \quad 2\cos^2(2x) + \cos(2x) = 0 \iff \cos(2x)\big(1 + 2\cos(2x)\big) = 0 \\
&\iff \begin{cases} \cos(2x) = 0 \\ \text{ou} \\ \cos(2x) = -\frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} 2x \equiv \pi/2\ [\pi] \\ \text{ou} \\ 2x \equiv \pm 2\pi/3\ [2\pi] \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x \equiv \pi/4\ [\frac{\pi}{2}] \\ \text{ou} \\ x \equiv \pm\pi/3\ [\pi] \end{cases}
\end{aligned}$$

4. Cette fois, l'équation ne porte que sur des puissances de $\sin(x)$, on effectue le changement d'inconnue $y = \sin(x)$. Il vient :

$$\begin{aligned}
(4) \quad &\iff \quad 4\sin^2(x) + 2(1+\sqrt{3})\sin(x) + \sqrt{3} = 0 \\
&\iff \begin{cases} y = \sin(x) \\ 4y^2 + 2(1+\sqrt{3})y + \sqrt{3} = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Le discriminant du trinôme est $\Delta = \big(2(\sqrt{3}-1)\big)^2$. Les formules du deuxième degré donnent alors $y_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $y_2 = -\frac{1}{2}$. Par suite

$$(4) \iff \begin{cases} \sin(x) = \sin(-\pi/3) \\ \text{ou} \\ \sin(x) = \sin(-\pi/6) \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv -\pi/3\ [2\pi] \text{ ou } x \equiv 4\pi/3\ [2\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv -\pi/6\ [2\pi] \text{ ou } x \equiv 7\pi/6\ [2\pi] \end{cases}$$

Finalement $\mathcal{S} = \{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{4\pi}{3} + 2k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\frac{\pi}{6} + 2k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{7\pi}{6} + 2k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$. ▲

Exercice 3.21

1. Conformément à l'indication, calculons $(\cos(x) - \sin(x))^2$. Il vient

$$(\cos(x) - \sin(x))^2 = \cos^2(x) - 2\sin(x)\cos(x) + \sin^2(x)$$

Or d'après la relation de trigonométrie fondamentale, $\cos^2 + \sin^2 = 1$ et la formule de duplication, donne $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$. Finalement $(\cos(x) - \sin(x))^2 = 1 - 2\sin(2x)$, soit encore $\sin(2x) = 1 - (\cos(x) - \sin(x))^2$.

2. D'après la première question, on a

$$\begin{aligned}
&\sin(2x) + (1+\sqrt{2})\,(\cos(x) - \sin(x)) = 1 + \sqrt{2} \qquad (3.6) \\
\iff\ &1 - (\cos(x) - \sin(x))^2 + (1+\sqrt{2})\,(\cos(x) - \sin(x)) = 1 + \sqrt{2} \\
\iff\ &(\cos(x) - \sin(x))^2 - (1+\sqrt{2})(\cos(x) - \sin(x)) + \sqrt{2} = 0
\end{aligned}$$

1 est racine évidente de l'équation

$u^2 - (1+\sqrt{2})u + \sqrt{2} = 0$.

On en déduit la factorisation

$u^2 - (1+\sqrt{2})u + \sqrt{2} = (u-1)(u-\sqrt{2})$.

Pour résoudre l'équation (3.6), nous allons effectuer le changement d'inconnue $u = \cos(x) - \sin(x)$. Il vient :

$$\begin{aligned}
(3.6) \quad &\iff \begin{cases} u = \cos(x) - \sin(x) \\ u^2 - (1+\sqrt{2})u + \sqrt{2} = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} u = \cos(x) - \sin(x) \\ u = 1 \text{ ou } u = \sqrt{2} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \cos(x) - \sin(x) = 1 \\ \text{ou} \\ \cos(x) - \sin(x) = \sqrt{2} \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, grâce à ce changement d'inconnue, nous nous sommes ramenés à la résolution de deux équations trigonométriques plus classiques. On applique la **méthode 3.16**. On observe que

$$\cos(x) - \sin(x) = \sqrt{2}\big(\cos(\frac{\pi}{4})\cos(x) - \sin(\frac{\pi}{4})\sin(x)\big) = \sqrt{2}\cos(x + \frac{\pi}{4}).$$

Ainsi

$$(3.6) \iff \begin{cases} \cos(x+\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{ou} \\ \cos(x+\frac{\pi}{4}) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \cos(x+\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) \\ \text{ou} \\ \cos(x+\frac{\pi}{4}) = \cos(0) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+\frac{\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi] \\ x+\frac{\pi}{4} \equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi] \\ x+\frac{\pi}{4} \equiv 0\ [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv 0\ [2\pi] \\ x \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi] \\ x \equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi] \end{cases}$$

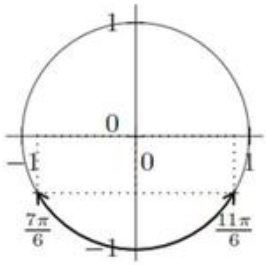
Finalement, l'ensemble recherché est
$\mathcal{S} = \{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$. ▲

Exercice 3.22

Nous appliquons la **méthode 3.17**.

1. (1) $\iff \sin(x) < -\frac{1}{2}$.

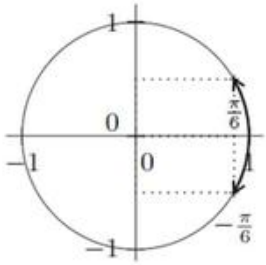
Pour résoudre (1) représentons sur le cercle trigonométrique les points d'ordonnée inférieure à $-\frac{1}{2}$. Ils forment un arc de cercle. Ce sont tout simplement les images des solutions de cette inéquation sur le cercle trigo. On en déduit que



$$\mathcal{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \Big]2k\pi + \frac{7\pi}{6}, 2k\pi + \frac{11\pi}{6}\Big[.$$

2. Procédons de la même manière pour la deuxième inéquation.

$$\begin{aligned} (2) &\iff 2\cos(4x) - \sqrt{3} \geqslant 0 \\ &\iff \cos(4x) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\iff 4x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \Big]2k\pi - \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{\pi}{6}\Big[\end{aligned}$$



Ainsi, $\mathcal{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \Big]k\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{24}, k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{24}\Big[$.

3. Pour cette inéquation, nous commençons par effectuer le changement d'inconnue $y = \cos(x)$ afin de nous ramener à une inéquation polynomiale du second degré :

1 est racine évidente du polynôme $2y^2 - y - 1$, l'autre racine est $-\frac{1}{2}$.

$$(3) \iff \begin{cases} y = \cos(x) \\ 2y^2 - y - 1 < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \cos(x) \\ (y-1)(2y+1) < 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = \cos(x) \\ -\frac{1}{2} < y < 1 \end{cases} \iff -\frac{1}{2} < \cos(x) < 1$$

On s'est ainsi ramené à la résolution d'inéquations classiques. Nous pouvons conclure en appliquant la **méthode 3.17**, il vient comme pour les deux premières inéquations trigonométriques :

$$\mathcal{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]2k\pi - \frac{2\pi}{3}, 2k\pi\right[\cup \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]2k\pi, 2k\pi + \frac{2\pi}{3}\right[.$$

4. Cette inéquation ne porte que sur des puissances de $\cos(x)$, on effectue de nouveau le changement d'inconnue $y = \cos(x)$.

$$(4) \iff \begin{cases} y = \cos(x) \\ 4y^2 - 2(\sqrt{2}-1)y - \sqrt{2} > 0 \end{cases}$$

Pour étudier le signe du trinôme, on calcule son discriminant. Ici $\Delta = 4\big((\sqrt{2}-1)^2 + 4\sqrt{2}\big) = 4(\sqrt{2}+1)^2$ est strictement positif. Il existe donc deux racines réelles distinctes :

$$y_1 = \frac{2(\sqrt{2}-1) - 2(\sqrt{2}+1)}{8} = -\frac{1}{2} \text{ et } y_2 = \frac{2(\sqrt{2}-1) + 2(\sqrt{2}+1)}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Finalement

$$(4) \iff \cos(x) < -\frac{1}{2} \text{ ou } \cos(x) > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

On applique alors la **méthode 3.17** pour conclure :

$$\mathcal{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]2k\pi + \frac{2\pi}{3}, 2k\pi + \frac{4\pi}{3}\right[\cup \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]2k\pi - \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{\pi}{4}\right[.$$

▲

Chapitre 4

Nombres complexes

UN MATHÉMATICIEN

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) fait preuve, dès le plus jeune âge, d'aptitudes intellectuelles exceptionnelles. En 1801, il découvre par de savants calculs l'astéroïde Cérès et publie un ouvrage fondamental sur la théorie des nombres ! Par la suite, il explore de nombreuses branches des mathématiques, ouvrant chaque fois des perspectives nouvelles. Il utilise les nombres complexes pour déterminer les polygones réguliers constructibles à la règle et au compas.

Un peu d'histoire

En 1545, Jérôme Cardan publie une formule de résolution des équations du troisième degré. Quelle ne fut pas la surprise de constater que dans certains cas, des racines réelles étaient obtenues par l'intermédiaires de racines de nombres négatifs qui se compensaient finalement. Son compatriote Rafaele Bombelli a alors l'idée d'introduire de nouveaux nombres en 1572. Qualifiés d'imaginaires par Descartes, ces nombres sont progressivement utilisés tout au long du XVIIIe siècle et Leonhard Euler en découvre de nombreuses propriétés.

Au début du XIXe siècle, le savant suisse Jean-Robert Argand en donne une représentation plane. Peu après Carl Friedrich Gauss les définit de manière rigoureuse et les appelle nombres complexes car ils dépendent de deux nombres réels.

Objectifs

les incontournables

- Savoir manipuler les écritures algébrique et exponentielle des nombres complexes :
  - pour simplifier une expression complexe ;
  - pour déterminer si un nombre complexe est réel.
- Utiliser les nombres complexes en trigonométrie :
  - pour linéariser une expression trigonométrique ;
  - pour établir une formule trigonométrique ;
  - pour calculer $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$ en fonction de $\cos t$ et $\sin t$;
  - pour calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kt)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(kt)$.
- Savoir résoudre une équation polynomiale, notamment :
  - déterminer les racines n-ièmes d'un nombre complexe ;
  - calculer les racines carrées d'un nombre complexe, présenté sous forme algébrique ou exponentielle ;
  - résoudre les équations polynomiales de degré 2.
- Transformer $a\cos t + b\sin t$ en $A\cos(t-\theta)$.
- Savoir résoudre quelques problèmes géométriques dans le plan en passant dans $\mathbb{C}$ et notamment :
  - savoir interpréter géométriquement le module et un argument de $\dfrac{c-b}{c-a}$ et en déduire la traduction de l'alignement et l'orthogonalité au moyen d'affixes ;
  - savoir reconnaître et utiliser les transformations $z \mapsto az + b$.

et plus si affinités

- Résoudre des équations algébriques de degré supérieur à 2, en se ramenant à une équation plus simple.
- Résoudre des équations du type $a\cos t + b\sin t = c$, en passant dans $\mathbb{C}$ ou par transformation.
- Factoriser une expression du type $e^{i\alpha t} \pm e^{i\beta t}$.

Résumé de cours

Notation algébrique des nombres complexes

Présentation de $\mathbb{C}$

Conformément au programme, on admet l'existence d'un ensemble, noté $\mathbb{C}$ muni d'une addition et d'une multiplication, notées $+$ et $\times$ comme dans $\mathbb{R}$, tel que :

Théorème-Définition 4.1.— Propriétés fondamentales de $\mathbb{C}$ —.

- $\mathbb{C}$ contient l'ensemble des réels et un élément i tel que $i^2 = -1$.
- Pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe un couple de réels $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, unique, tel que $z = x+i\times y = x+y\times i$.
- Tout nombre réel x s'écrit $x + i \times 0$ ou $x + 0 \times i$.
- Pour tous nombres réels x, x', y, y', on a :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} (x+iy)+(x'+iy') & = & (x+x')+i(y+y') \\ (x+iy)\times(x'+iy') & = & (xx'-yy')+i(xy'+x'y) \end{array}}$$

Définition : *Soit $z \in \mathbb{C}$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $z = x + iy$.*

- *Le nombre réel x est appelé la* ***partie réelle*** *de z, on note $x = \mathfrak{Re}\, z$.*
- *Le nombre réel y est appelé la* ***partie imaginaire*** *de z, on note $y = \mathfrak{Im}\, z$.*

Théorème 4.2.— Unicité de l'écriture d'un nombre complexe en notation algébrique —.

$$\boxed{\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \quad z = z' \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \mathfrak{Re}\, z & = & \mathfrak{Re}\, z' \\ \mathfrak{Im}\, z & = & \mathfrak{Im}\, z' \end{array} \right.}$$

Conjugué et module d'un nombre complexe

Définition : *Le* ***conjugué*** *du nombre complexe $z = a + ib$, où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ est $\overline{z} = a - ib$.*

Proposition 4.3.— Propriétés de la conjugaison —. Pour tout couple $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ de complexes,

- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$;
- $\overline{\overline{z}} = z$;
- $\mathfrak{Re}\,(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$;
- si $z' \neq 0$, $\overline{z/z'} = \overline{z}/\overline{z'}$;
- $\overline{z.z'} = \overline{z}\overline{z'}$;
- $\mathfrak{Im}\,(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$.

Corollaire 4.4.— Caractérisation des nombres réels, imaginaires purs —. Soit $z \in \mathbb{C}$ un nombre complexe. Alors :

- z est réel $\iff \mathfrak{Im}\,(z) = 0 \iff z = \overline{z}$;
- z est imaginaire pur $\iff \mathfrak{Re}\,(z) = 0 \iff z = -\overline{z}$.

Définition : *Le* ***module*** *du nombre complexe $z = a + ib$, où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ est le réel positif ou nul défini par $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$.*

Proposition 4.5.— Propriétés du module —. Pour tout couple $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ de complexes,

- $|z.z'| = |z|\,|z'|$
- $|z/z'| = |z|/|z'|$ si $z' \neq 0$;
- $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$
- $|z - z'| \geqslant \big||z| - |z'|\big|$

Remarque : $|z + z'| = |z| + |z|'$ si, et seulement si, il existe un réel $\lambda > 0$ tel que $z' = \lambda z$.

Le plan complexe

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est le plan muni d'un repère orthonormal direct $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. À tout nombre complexe $z = x + iy$, où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on associe le point M de $\mathcal{P}$ tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$. On dit que M est l'**image du complexe** z et que z est l'**affixe du point** M. On peut associer aussi à z le vecteur $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$. On dit que z est l'affixe du vecteur $\vec{u}$.

Calculs algébriques dans $\mathbb{C}$

Les règles de calcul usuelles dans $\mathbb{R}$ et le **théorème 4.1** permettent de conduire les calculs dans $\mathbb{C}$.

Théorème 4.6.— Formules sommatoires —. Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, $n \in \mathbb{N}$:

- **Identité géométrique :** $a^n - b^n = (a - b) \times \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a^k\, b^{n-1-k}$
- **Formule du binôme :** $(a + b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

■ Nombres complexes de module 1

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Exponentielle imaginaire pure

Définition : *Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on appelle **exponentielle imaginaire d'angle** θ, et on note $e^{i\theta}$ le complexe $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.*

Proposition 4.7.— Représentation des nombres complexes de module 1 —. Pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{U}$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$, unique à 2π-près, tel que $z = e^{i\theta}$.

Théorème 4.8.— Règles de calcul pour l'exponentielle imaginaire —. Soit $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, alors :

- $e^{i0} = 1$
- $e^{-i\theta} = 1/e^{i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$
- $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'}$
- $e^{i(\theta-\theta')} = e^{i\theta}/e^{i\theta'}$

Formules d'Euler et Moivre

Théorème 4.9.— Pour tout réel $\theta \in \mathbb{R}$ et tout entier relatif $n \in \mathbb{Z}$,

- **Euler :** $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$;
- **Moivre :** $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$, soit $\big(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\big)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.

■ Notation exponentielle ou trigonométrique des nombres complexes

Proposition 4.10.— Forme trigonométrique —. Soit $z \in \mathbb{C}^\star$ un nombre complexe non nul. Il existe un couple de réels $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}$ tel que $z = \rho e^{i\theta} = \rho\big(\cos\theta + i\sin\theta\big)$.

Définition : *Si $z \in \mathbb{C}^\star$ s'écrit $z = \rho e^{i\theta}$, alors nécessairement $\rho = |z|$. On appelle* ***un argument*** *de z, et on note* $\arg(z)$ *tout nombre réel tel que $z = |z|e^{i\arg(z)}$.*

Interprétation : soit M l'image dans le plan complexe d'un complexe non nul $z = \rho e^{i\theta}$. Alors $\rho = |z|$ est la longueur du vecteur $\overrightarrow{OM}$ et θ est une mesure modulo 2π de l'angle orienté $(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM})$.

Théorème 4.11.— Défaut d'unicité de l'écriture en notation exponentielle —.

$$\boxed{\forall (z, z') \in \mathbb{C}^\star \times \mathbb{C}^\star, \quad z = z' \iff \begin{cases} |z| & = & |z'| \\ \arg(z) & \equiv & \arg(z')\,[2\pi] \end{cases}}$$

Proposition 4.12.— Propriétés des arguments —. Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^\star \times \mathbb{C}^\star$ et $n \in \mathbb{Z}$. Alors

- $\arg(z.z') \equiv \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$;
- $\arg(z/z') \equiv \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$;
- $\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$;
- $\arg(z^n) \equiv n\arg(z)\ [2\pi]$.

Définition : *Soit $z = x + iy$ en notation algébrique. On définit l'***exponentielle de** *z par* $\exp(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x\big(\cos y + i\sin y\big)$.
Les règles de calcul pour les fonctions exponentielles réelle et imaginaire pure, s'étendent à la **fonction exponentielle complexe**. On a notamment : $\forall (z,\, z') \in \mathbb{C}^2,\ e^z e^{z'} = e^{z+z'}$.

■ Racines n-ièmes d'un complexe

Définition : *On appelle* ***racine n-ième de l'unité*** *tout complexe z vérifiant $z^n = 1$. L'ensemble des racines n-ièmes de l'unité est noté $\mathbb{U}_n$.*

Théorème 4.13.— Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$. Notons pour $k \in \mathbb{Z}$, $z_k = \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)$. Alors

$$\boxed{\mathbb{U}_n = \{z_k;\ k \in \mathbb{Z}\} = \{z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}\}}$$

Exemples : $\mathbb{U}_1 = \{1\}$, $\mathbb{U}_2 = \{-1,\, 1\}$, $\mathbb{U}_3 = \{1,\, j,\, j^2\}$, $\mathbb{U}_4 = \{1,\, i,\, -1,\, -i\}$, où $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Proposition 4.14.— Racines n-ièmes d'un complexe non nul quelconque —. Tout nombre complexe non nul $\omega \in \mathbb{C}^\star$, possède n racines n-ième distinctes. Plus précisément, si $\omega = \rho e^{i\theta}$, avec $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}$, ses racines n-ième sont les complexes définis par :

$$\boxed{\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ z_k(\omega) = \rho^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}}$$

Proposition 4.15.— Si $z \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}$. Alors $1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = 0$.

■ Applications en trigonométrie

À l'aide des complexes, on démontre ou on retrouve les formules de trigonométrie.

Lemme 4.16.— Factorisation d'une somme d'exponentielles —. Soit $(p,q) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$\boxed{\bullet\ e^{ip} + e^{iq} = 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) e^{i\frac{p+q}{2}} \qquad \bullet\ e^{ip} - e^{iq} = 2i\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) e^{i\frac{p+q}{2}}}$$

On déduit de ces propriétés, les formules de trigonométrie suivantes.

Proposition 4.17.— Transformations de sommes en produits

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \bullet\ \cos p + \cos q & = & 2\cos\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2} \\ \bullet\ \cos p - \cos q & = & -2\sin\frac{p-q}{2}\sin\frac{p+q}{2} \end{array} \quad \begin{array}{lcl} \bullet\ \sin p + \sin q & = & 2\cos\frac{p-q}{2}\sin\frac{p+q}{2} \\ \bullet\ \sin p - \sin q & = & 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2} \end{array}}$$

Théorème-Définition 4.18.— Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, avec $(a,b) \neq (0,0)$, il existe $(A,\theta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a\cos(t) + b\sin(t) = A\cos(t-\theta)$. $A = \sqrt{a^2+b^2}$ est appelé **l'amplitude** et θ la **phase**.

■ Équations algébriques

Définition : *Soit $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des complexes. La fonction $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ qui à tout réel $z \in \mathbb{C}$ associe $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$ est appelée une* ***fonction polynomiale****.*

Vocabulaire : *$a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont les* ***coefficients*** *de la fonction polynomiale P. Si de plus $a_n \neq 0$, on dit que P est de* ***degré*** *n.*

Définition : *Soit $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction polynomiale à coefficients complexes.*

- *On appelle* ***racine*** *de P — on dit aussi* ***zéro*** *de f — tout nombre $a \in \mathbb{C}$ tel que $P(a) = 0$.*
- *On dit que P est* ***divisible*** *par $z - a$ s'il existe une fonction polynomiale $Q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z-a) \times Q(z)$.*

Théorème 4.19.— Soit $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction polynomiale, $a \in \mathbb{C}$.

$$\boxed{a \text{ est racine de } P \textit{ si et seulement si } P \text{ est divisible par } z - a.}$$

Proposition 4.20.— Soit $a \in \mathbb{C}^\star$, b, et $c \in \mathbb{C}$. Posons $\Delta = b^2 - 4ac$ et désignons par δ l'une des racines carrées complexes de Δ. Alors l'équation du deuxième degré $az^2 + bz + c = 0$ possède deux solutions (distinctes ou confondues) qui sont données par :

$$\boxed{z_1 = \frac{-b-\delta}{2a} \qquad z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}}$$

De plus, pour tout $z \in \mathbb{C}$, nous avons la factorisation $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.

Corollaire 4.21.— Somme et produit des racines —. Soit $a \in \mathbb{C}^\star$, b, et $c \in \mathbb{C}$. Les racines z_1, z_2 distinctes ou confondues de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ vérifient $\begin{cases} z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \\ z_1 \times z_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$.

■ Nombres complexes et géométrie plane

Proposition 4.22.— Correspondance complexes / grandeurs géométriques —.

- Si $A(a)$ et $B(b)$ sont deux points, le module $|b - a|$ correspond à la distance AB.
- Si $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ et $D(d)$ sont quatre points distincts, un argument $\arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right)$ est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ (modulo 2π).

Proposition 4.23.— Application $z \mapsto a \cdot z + b$ —. L'application $f : z \mapsto a \cdot z + b$ correspond :

- lorsque $a = 1$, à la translation de vecteur d'affixe b ;
- lorsque $a \neq 1$, à la similitude directe autour du point d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$ (solution de l'équation $f(z) = z$) d'angle $\arg a$ et de rapport $|a|$.

Proposition 4.24.— Application $z \mapsto \overline{z}$ —. L'application $f : z \mapsto \overline{z}$ est la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

Méthodes

Notations algébrique, trigonométrique et exponentielle

Quand utiliser une représentation plutôt qu'une autre

Lorsque vous devez représenter un nombre complexe, pour effectuer un calcul algébrique ou résoudre un problème, vous avez le choix entre deux types de représentation.

Méthode 4.1.— Comment choisir la bonne représentation

• La notation algébrique est la notation par défaut des nombres complexes. Elle est particulièrement utile :

- pour calculer une somme ;
- pour simplifier une expression dans laquelle interviennent un complexe z et son conjugué $\overline{z}$;
- représenter l'image de ce complexe à l'aide de ses coordonnées cartésiennes.

• La notation trigonométrique (ou exponentielle) fait le lien entre nombres complexes et trigonométrie. Elle est donc principalement utile :

- pour établir des formules de trigonométrie ;
- pour calculer un produit, un quotient ;
- pour élever rapidement à une puissance à l'aide de la formule de Moivre ;
- en géométrie pour exprimer distances et angles.

Passer d'une représentation à une autre

Un nombre complexe peut être présenté sous forme algébrique, trigonométrique ou exponentielle. On passe sans problème d'une écriture à l'autre :

Méthode 4.2.— Comment passer de notation algébrique à trigonométrique

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe non nul présenté en notation algébrique.

[1] On détermine le module $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ de z.

[2] Le nombre complexe $\frac{z}{\rho} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + i\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ est un nombre complexe de module 1. Il s'écrit donc $\dfrac{z}{\rho} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

[3] On détermine θ comme étant solution du système suivant $\left\{\begin{array}{lcl} \cos(\theta) & = & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin(\theta) & = & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{array}\right.$.

[4] Finalement, $z = \rho\cos(\theta) + i\rho\sin(\theta) = \rho\, e^{i\theta}$.

Exemple : déterminons les représentations trigonométriques de $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = \sqrt{3} + i$.

[1] On a $|1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $|\sqrt{3} + i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$.

[2] On factorise z_1 et z_2 par leurs modules : $1 + i = \sqrt{2} \times (\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})$, $\sqrt{3} + i = 2 \times (\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2})$.

$\boxed{3}$ Finalement, on trouve des arguments θ_1 et θ_2 de ces complexes par identification :
$\begin{cases} \cos\theta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ donc $\theta_1 = \dfrac{\pi}{4}$ convient. D'autre part $\begin{cases} \cos\theta_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$ d'où $\theta_2 = \dfrac{\pi}{6}$ convient.

$\boxed{4}$ Finalement, $z_1 = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = 2(\cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6)) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Mise en œuvre : exercice 4.1 et **exercice 4.2**.

> ❑ **Méthode 4.3.— Comment passer de notation trigonométrique à algébrique**
> Soit $z = \rho e^{i\theta}$ un nombre complexe non nul présenté en notation exponentielle, *i.e.* $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Par définition, $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. En développant, on obtient directement
> $$z = \rho e^{i\theta} = \rho\cos(\theta) + i\rho\sin(\theta)$$

Exemple : déterminons l'écriture algébrique de $\dfrac{(1+i)^3}{(\sqrt{3}+i)^2}$. Pour cela notons qu'il s'agit d'un quotient de nombre complexes dont on connaît des arguments. On passe donc d'abord en écriture exponentielle : $(1+i)^3 = (\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^3 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $(\sqrt{3}+i)^2 = (2e^{i\frac{\pi}{6}})^2 = 4\,e^{i\frac{\pi}{3}}$. Ainsi,

$$\frac{(1+i)^3}{(\sqrt{3}+i)^2} = \frac{2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}{4\,e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{3})} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$$

■ Calculs algébriques dans $\mathbb{C}$

Parties réelles, imaginaires

> ❑ **Méthode 4.4.— Comment déterminer la partie réelle d'un nombre complexe**
> - On peut mettre z sous forme algébrique et identifier sa partie réelle.
> - On peut utiliser son conjugué : $\mathfrak{Re}\, z = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$.
> - Si $z = z_1 + z_2$, on a $\mathfrak{Re}\, z = \mathfrak{Re}\, z_1 + \mathfrak{Re}\, z_2$.
> - Si $z = kw$, avec $k \in \mathbb{R}$, alors $\mathfrak{Re}\, z = k\mathfrak{Re}\, w$.

Remarques :

- La partie réelle d'un produit n'est pas le produit des parties réelles en général !
- Des propriétés analogues existent pour le calcul de la partie imaginaire.

> ❑ **Méthode 4.5.— Comment savoir si un nombre est réel, imaginaire pur**
> Soit $z \in \mathbb{C}$ un nombre complexe. En fonction du contexte, plusieurs caractérisations du fait que z est réel (imaginaire pur) peuvent être utilisées :
>
> - $z \in \mathbb{R} \iff \mathfrak{Im}\,(z) = 0$
> $\iff z = \overline{z}$
> $\iff z = 0$ ou $\arg(z) \equiv 0\ [\pi]$
>
> - $z \in i\mathbb{R} \iff \mathfrak{Re}\,(z) = 0$
> $\iff z = -\overline{z}$
> $\iff z = 0$ ou $\arg(z) \equiv \pi/2\ [\pi]$

Exemples : donnons deux exemples qui développent deux cheminements différents.

1. Déterminons les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ pour lesquelles le complexe $z_n = (1+i)^n$ soit réel. Comme z_n est sous forme d'une puissance n-ième, le mieux est de passer à la forme trigonométrique de $1+i$. On écrit $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et donc comme z_n est évidemment non nul,

$$\arg(z_n) \equiv 0[\pi] \iff n\arg(1+i) \equiv 0\ [\pi] \iff n\,\frac{\pi}{4} \equiv 0\ [\pi] \iff n \equiv 0\ [4]$$

C'est-à-dire que n doit être un multiple de 4.

2. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$ et $Z = \dfrac{z-1}{z+1}$, on veut déterminer maintenant z de telle manière que Z soit imaginaire pur. Pour cela, on écrit que Z est imaginaire pur si et seulement si $Z = -\overline{Z}$, relation qui s'écrit, de manière équivalente par $\dfrac{z-1}{z+1} = -\dfrac{\overline{z}-1}{\overline{z}+1}$ c'est-à-dire

$$z\overline{z} - \overline{z} + z - 1 = -z\overline{z} + z - \overline{z} + 1 \iff z\overline{z} = 1.$$

Et on en déduit que Z est imaginaire pur si et seulement si z est élément de $\mathbb{U}$ qui doit être bien entendu différent de -1.

Mise en œuvre : exercice 4.7.

Module, argument, conjugué, puissance et inverse

Méthode 4.6.— Comment déterminer module ou argument d'un complexe

- Lorsqu'on souhaite déterminer module **et** arguments, il s'agit de mettre z sous forme trigonométrique ou exponentielle et d'identifier directement (**méthode 4.2**).
- Lorsqu'on souhaite seulement déterminer le module **ou** un argument de z, on peut utiliser les compatibilités avec le produit, le quotient et la puissance (**proposition 4.5**, **proposition 4.12**).

Méthode 4.7.— Comment déterminer le conjugué d'un nombre complexe

C'est généralement très simple !

- Si $z = x + iy$ en notation algébrique, alors, $\overline{x+iy} = x - iy$.
- Si $z = \rho e^{i\theta}$ en notation exponentielle, alors, $\overline{z} = \rho e^{-i\theta}$.
- Si z est obtenu par opérations algébriques (somme, différence, produit, inverse ou puissance) $\overline{z}$ est obtenu par ces mêmes opérations sur les conjugués d'après la **proposition 4.3**.

Méthode 4.8.— Comment déterminer la puissance n-ième d'un complexe

Soit $z \in \mathbb{C}$ un nombre complexe et $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel.

1. On présente z sous forme exponentielle $z = \rho e^{i\theta}$.
2. Dans ce cas, on écrit $z^n = \rho^n e^{in\theta}$.

Exemple : on peut repartir de l'exemple précédent de la **méthode 4.5** en écrivant immédiatement $(1+i)^n = (\sqrt{2})^n e^{in\pi/4}$.

Mise en œuvre : exercice 4.6 et **exercice 4.7**.

> ❑ **Méthode 4.9.— Comment déterminer l'inverse d'un complexe non nul**
> Soit $z \in \mathbb{C}^\star$ un nombre complexe non nul.
> - Si $z = x + iy$ en notation algébrique, alors, en multipliant numérateur et dénominateur par son conjugué, on obtient : $\dfrac{1}{x+iy} = \dfrac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \dfrac{x-iy}{x^2+y^2}$.
> - Comme $z\,\overline{z} = |z|^2$, on a $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.
> - Si $z = \rho e^{i\theta}$ en notation exponentielle, alors, $\dfrac{1}{\rho e^{i\theta}} = \rho^{-1} e^{-i\theta}$.

Mise en œuvre : exercice 4.1.

■ Simplifier une expression complexe

> ❑ **Méthode 4.10.— Comment simplifier une somme de deux complexes**
> - Si z est une somme ou une différence de complexes conjugués, on utilise
> $$z = Z + \overline{Z} = 2\mathfrak{Re}\,(Z) \text{ ou } z = Z - \overline{Z} = 2i\mathfrak{Im}\,(Z).$$
> - Si z est une somme de complexes de module 1, on utilise le **lemme 4.16**.

Exemple : si θ est fixé dans $[0, \pi]$, on considère la somme $z = 1 + \cos\theta + i\sin\theta$ et on écrit successivement $z = 1 + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{-\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = 2e^{i\frac{\theta}{2}}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

Mise en œuvre : exercice 4.6.

> ❑ **Méthode 4.11.— Comment simplifier l'expression d'un quotient de complexes**
> - On peut écrire numérateur et dénominateur sous forme trigonométrique et utiliser les règles sur le module et l'argument d'un quotient.
> - On peut multiplier numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur.
> - On peut combiner les deux méthodes précédentes.

Mise en œuvre : exercice 4.1 et **exercice 4.2**.

Exemple : simplifions le complexe $z = \dfrac{1+\cos a + i\sin a}{\sqrt{1+\sin 2a} + i\sqrt{1-\sin 2a}}$ avec $0 < a < \pi/4$. Notons $num(z)$ et $denom(z)$ le numérateur et le dénominateur du complexe z. On a, en utilisant le développement précédent, $num(z) = 1 + \cos a + i\sin a = 2e^{i\frac{a}{2}}\cos\left(\frac{a}{2}\right)$. Pour le dénominateur, on observe que $1 = \cos^2 a + \sin^2 a$ et $\sin 2a = 2\sin a\cos a$. On peut réécrire le dénominateur sous la forme

$$\begin{aligned}
denom(z) &= \sqrt{1+\sin 2a} + i\sqrt{1-\sin 2a} \\
&= \sqrt{\cos^2 a + \sin^2 a + 2\sin a\cos a} + i\sqrt{\cos^2 a + \sin^2 a - 2\sin a\cos a} \\
&= \sqrt{(\cos a + \sin a)^2} + i\sqrt{(\cos a - \sin a)^2} = |\cos a + \sin a| + i|\cos a - \sin a| \\
&= \cos a + \sin a + i(\cos a - \sin a) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - a\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - a\right)\right) = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4}-a)}
\end{aligned}$$

Au passage, bien retenir cette méthode de simplification d'une somme ou d'une différence d'un cosinus et sinus du même angle car cela reviendra encore (en particulier pour certains calculs de primitives). Ainsi, $z = \dfrac{2e^{i\frac{a}{2}}\cos\left(\frac{a}{2}\right)}{\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4}-a)}}$ et cela donne $z = \sqrt{2}\cos\left(\frac{a}{2}\right)e^{i\left(\frac{3a}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}$.

■ Simplifier une expression trigonométrique

❑ **Méthode 4.12.— Comment linéariser** $(\cos^p x)(\sin^q x)$**, où** $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ **et** $x \in \mathbb{R}$
Ceci revient à écrire cette expression E, comme combinaison linéaire de termes de la forme $\cos(kx)$ et $\sin(lx)$, avec $(k, l) \in \mathbb{N}^2$.

[1] On remplace $\cos(x)$ par $\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ et $\sin(x)$ par $\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$.

[2] On développe $\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^p$ et $\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^q$ par la **formule du binôme de Newton**.

[3] L'expression obtenue étant réelle, son développement est formé d'une combinaison linéaire de termes de la forme $e^{ikx}+e^{-ikx} = 2\cos(kx)$ ou $i(e^{ilx}-e^{-ilx}) = 2\sin(lx)$, avec $(k, l) \in \mathbb{N}^2$.

Mise en œuvre : exercice 4.10.

Exemple : linéarisons l'expression $\cos^3(x)$.

[1] On écrit $\cos^3(x) = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3$.

[2] Développons à l'aide de l'**identité remarquable** $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

[3] Il vient $\cos^3(x) = \frac{1}{8}\left(e^{i3x}+e^{-i3x}+3e^{ix}+3e^{-ix}\right) = \frac{1}{8}(2\cos(3x)+6\cos(x)) = \frac{1}{4}(\cos(3x)+3\cos(x))$.

Donnons aussi $\sin^3(x) = \dfrac{1}{4}(-\sin(3x) + 3\sin(x))$ et nous vous invitons à retrouver ce résultat en calquant la méthode.

❑ **Méthode 4.13.— Comment développer** $\cos(px)$ **ou** $\sin(px)$
Soit p est un entier naturel et $x \in \mathbb{R}$. On souhaite écrire $\cos(px)$ ou $\sin(px)$ comme combinaison linéaire de termes de la forme $(\cos^k x)(\sin^l x)$, où $(k, l) \in \mathbb{N}^2$.

[1] On remarque qu'on a les égalités $\cos(px) = \mathfrak{Re}\left((\cos x + i\sin x)^p\right)$ et $\sin(px) = \mathfrak{Im}\left((\cos x + i\sin x)^p\right)$.

[2] On développe $(\cos x + i\sin x)^p$ à l'aide de la formule du binôme.

[3] Enfin, on identifie soit la partie réelle, soit la partie imaginaire selon que l'on veuille $\cos(px)$ ou $\sin(px)$.

Exemple : écrivons $\sin(5x)$ en fonction de différentes puissances de $\sin x$. On écrit

$$\begin{aligned}\sin(5x) &= \mathfrak{Im}\left((\cos(x)+i\sin(x))^5\right)\\ &= \mathfrak{Im}\left(\cos^5 x + 5i\cos^4 x\sin x - 10\cos^3 x\sin^2 x - 10i\cos^2 x\sin^3 x + 5\cos x\sin^4 x + i\sin^5 x\right)\\ &= 5\cos^4(x)\sin(x) - 10\cos^2(x)\sin^3(x) + \sin^5(x)\end{aligned}$$

et en utilisant $\cos^2(x) = 1-\sin^2(x)$ puis en développant $\cos^4(x) = (1-\sin^2(x))^2$, on a

$$\sin(5x) = 5\sin(x) - 20\sin^3(x) + 16\sin^5(x)$$

L'expression est bien ici une fonction polynomiale en $\sin(x)$.

Mise en œuvre : exercice 4.10.

> ❑ **Méthode 4.14.— Comment simplifier une somme trigonométrique**
> Pour simplifier une somme trigonométrique S_n, l'idée est d'utiliser un complexe Z_N (qui s'écrit lui aussi sous forme de somme) dont la partie réelle ou la partie imaginaire est la somme de départ à simplifier. Souvent
> $\boxed{1}$ On simplifie Z_n au moyen d'une identité géométrique ou d'une formule du binôme (**théorème 4.6**)
> $\boxed{2}$ Pour conclure, on identifie la partie réelle ou imaginaire de Z_n pour obtenir S_n.

Exemple : appliquons cette méthode pour simplifier la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n}\cos(k)$. Pour cela,

$\boxed{1}$ Posons $Z_n = \sum_{k=0}^{n} e^{ik}$ de sorte que $S_n = \mathfrak{Re}\,(Z_n)$.

$\boxed{2}$ D'après l'identité géométrique, $Z_n = \dfrac{1-e^{i(n+1)}}{1-e^i} = \dfrac{e^{i\frac{n+1}{2}}}{e^{i\frac{1}{2}}} \times \dfrac{-2i\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)}{-2i\sin\left(\frac{1}{2}\right)} = e^{i\frac{n}{2}} \times \dfrac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)}$.

$\boxed{3}$ En conclusion, $S_n = \cos\left(\dfrac{n}{2}\right)\dfrac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)}$.

Mise en œuvre : exercice 4.18 et **exercice 4.19.**

■ Racines n-ièmes

> ❑ **Méthode 4.15.— Comment déterminer les racines n-ièmes de 1**
> - On connaît parfaitement les racines carrées, cubiques et quatrièmes de 1.
>
> $$\mathbb{U}_2 = \{1,-1\} \quad \mathbb{U}_3 = \{1,j,j^2\} \quad \mathbb{U}_4 = \{1,i,-1,-i\}$$
>
> - Pour $n \geqslant 5$, on explicite $\omega_n = e^{i2\pi/n}$. Les n racines n-ièmes distinctes de 1 sont $1, \omega_n, \omega_n^2, \omega_n^3, \omega_n^4, \ldots \omega_n^{n-1}$. Avec les notations du cours :
> $$\mathbb{U}_n = \{1, \omega_n, \omega_n^2, \ldots, \omega_n^{n-1}\}.$$

Méthodes

❑ Méthode 4.16.— Comment déterminer les racines n-ièmes de a

Soit $a \in \mathbb{C}^\star$, $n \in \mathbb{N}$. Pour déterminer les n racines n-ièmes distinctes de a :

$\boxed{1}$ On détermine l'expression exponentielle de a : $a = |a|e^{i\arg a}$

$\boxed{2}$ On détermine une racine n-ième ζ_0 particulière de a. Le plus simple $\zeta_0 = \sqrt[n]{|a|}\, e^{i\,\frac{\arg a}{n}}$

$\boxed{3}$ On détermine les racines n-ièmes de 1, c'est-à-dire $\omega_n = e^{i2\pi/n}$ et ses puissances.

$\boxed{4}$ On multiplie ζ_0 par toutes les racines n-ièmes de 1.

Les racines n-ièmes de a sont : $\zeta_0, \zeta_0\omega_n, \zeta_0\omega_n^2, \ldots, \zeta_0\omega_n^{n-1}$.

Exemple : déterminons l'ensemble des racines troisièmes de $a = 8(\sqrt{2} - i\sqrt{6})$.

$\boxed{1}$ Calcul de l'écriture exponentielle de a : $a = 8(\sqrt{2} - i\sqrt{6}) = 16\sqrt{2}(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = (2\sqrt{2})^3 e^{-i\pi/3}$.

$\boxed{2}$ Recherche d'une racine cubique particulière : $\zeta_0 = 2\sqrt{2}e^{-i\pi/9}$.

$\boxed{3}$ La racine troisième primitive de 1 est $\omega_3 = j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\boxed{4}$ Les racines cubiques de a sont $\zeta_0 = 2\sqrt{2}e^{-i\pi/9}, j\zeta_0 = 2\sqrt{2}e^{5i\pi/9}, j^2\zeta_0 = 2\sqrt{2}e^{11i\pi/9}$.

Mise en œuvre : exercice 4.12, exercice 4.13 et **exercice 4.14**.

❑ Méthode 4.17.— Comment calculer les racines carrées en notation algébrique

Soit $a = \alpha + i\beta$ un nombre complexe non nul présenté sous forme algébrique. Je cherche les 2 racines carrées **opposées** de a sous forme algébrique : $z = x + iy$. (x, y) sont les solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2 - y^2 & = & \alpha \\ x^2 + y^2 & = & \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \\ 2xy & = & \beta \end{array}\right. .$$

Exemple : recherchons les racines carrées de $a = 3 - 4i$ sous forme algébrique.

$$\begin{aligned}
(x+iy)^2 = a &\iff x^2 - y^2 + 2ixy = 3 - 4i \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} x^2 - y^2 = 3 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{9+16} \\ 2xy = -4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x^2 - y^2 = 3 \\ x^2 + y^2 = 5 \\ 2xy = -4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 2x^2 = 8 \\ 2y^2 = 2 \\ 2xy = -4 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} x^2 = 4 \\ y^2 = 1 \\ 2xy = -4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = \pm 2 \\ y = \pm 1 \\ 2xy = -4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = 2 \text{ et } y = -1 \\ \text{ou} \\ x = -2 \text{ et } y = 1 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Par conséquent, les racines carrées de a sont $2 - i$ et $-2 + i$.

Mise en œuvre : exercice 4.14.

■ Résolution d'équations algébriques dans $\mathbb{C}$

❑ **Méthode 4.18.— Comment résoudre (E) : $az^2 + bz + c = 0$, $(a, b, c) \in \mathbb{C}^\star \times \mathbb{C}^2$**

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$:

- si $\Delta = 0$, l'équation (E) a pour unique solution $z = -\dfrac{b}{2a}$;
- si $\Delta \neq 0$, l'équation (E) a deux solutions distinctes $z = \dfrac{-b+\delta}{2a}$ et $z = \dfrac{-b-\delta}{2a}$, où δ est une racine carrée de Δ.

Exemple : soit (E) : $2z^2-(9i+1)z-7+11i = 0$. On calcule $\Delta = (1+9i)^2-8(-7+11i) = -24-70i$. Puis l'on détermine les racines carrées de Δ en employant la méthode algébrique, c'est-à-dire en cherchant des réels x et y tels que $-24-70i = (x+iy)^2$.

Les deux racines carrées de Δ sont $5-7i$ et $-5+7i$ et les racines de (E) sont $4i-1$ et $\dfrac{1}{2}(3+i)$.

Mise en œuvre : exercice 4.15, exercice 4.16.

❑ **Méthode 4.19.— Comment résoudre (E_n) : $az^{2n} + bz^n + c = 0$**

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^\star \times \mathbb{C}^2$ et n un entier supérieur ou égal à 2. Pour résoudre (E_n) :

$\boxed{1}$ On pose $Z = z^n$ et on résout l'équation (E) du second degré $aZ^2 + bZ + c = 0$.

$\boxed{2}$ Puis :

- si $\Delta = b^2-4ac \neq 0$, alors (E) a deux solutions distinctes z_1 et z_2. On résout ensuite les deux équations $z^n = z_1$ et $z^n = z_2$. On obtient alors $2n$ solutions ;
- si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, alors (E) a une solution z_1. On résout ensuite l'équation $z^n = z_1$ et on obtient alors n solutions doubles.

Mise en œuvre : exercice 4.17.

Donnons maintenant une méthode pour se « débrouiller » avec une équation polynomiale de degré plus élevé que 2 en attendant le cours sur les polynômes dans quelques semaines.

❑ **Méthode 4.20.— Comment résoudre (E_n) : $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$**

Soit $(a_0, a_1, ..., a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$, $n \geqslant 3$, pour résoudre (E_n)

- On peut chercher si (E_n) a une solution évidente, notée α, du genre $0, 1, -1, i, -i$ par exemple et développer $(z-\alpha)(z^{n-1} + b_{n-2}z^{n-2} + \cdots + b_1z + b_0)$ avec $(b_0, b_1, ..., b_{n-2}) \in \mathbb{C}^{n-1}$ puis identifier à $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0$. On en déduit les complexes $b_0, ..., b_{n-1}$, on est ramené à une équation de degré inférieur.
- On peut aussi imaginer que (E_n) possède une solution réelle ou une solution imaginaire pure, remplacer alors cette solution $z = x$ ou $z = ix$ avec $x \in \mathbb{R}$ dans (E_n). On sépare partie réelle et partie imaginaire ce qui nous fait deux équations à la place d'une au départ. Il reste maintenant à s'en sortir avec ces deux équations.

❑ **Méthode 4.21.— Comment utiliser les complexes en géométrie plane.**
Soit $A(a), B(b)$ et $C(c)$ trois points distincts. On rappelle que l'affixe de $\overrightarrow{AB}$ est $b-a$ et la norme de $\overrightarrow{AB}$ est $|b-a|$.

- Le triangle (ABC) est aplati si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont liés, c'est-à-dire si et seulement si les trois points sont alignés. En termes d'affixes, c'est :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}^\star, c-a=\lambda(b-a) \iff \frac{c-a}{b-a}=\frac{\overline{c}-\overline{a}}{\overline{b}-\overline{a}}.$$

- Le triangle (ABC) est rectangle en A dans le sens direct si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont issus l'un de l'autre par une rotation d'angle $\pi/2$.
  En termes d'affixes, c'est :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^\star, c-a=i\lambda(b-a) \iff \frac{c-a}{b-a}=-\frac{\overline{c}-\overline{a}}{\overline{b}-\overline{a}}.$$

  Si, de plus le triangle est isocèle en A, on a $\lambda=1$.
- Le triangle (ABC) est équilatéral dans le sens direct si et seulement si $AB=AC$ et si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ font un angle de $\pi/3$, c'est-à-dire qu'ils sont issus l'un de l'autre par une rotation d'angle $\pi/3$.
  En termes d'affixes, on a : $c-a=e^{i\pi/3}(b-a)$.

Exemple : on considère un quadrilatère $[ABCD]$ de sens direct. On construit quatre carrés C_1, C_2, C_3 et C_4 de centres respectifs P, Q, R et S qui s'appuient extérieurement respectivement sur les côtés $[AB], [BC], [CD]$ et $[DA]$ du quadrilatère $ABCD$. Ainsi, par exemple, $[AB]$ est un des côtés du carré C_1. On note a, b, c, d, p, q, r et s les affixes respectives des points A, B, C, D, P, Q, R et S dans le plan complexe. Comme $ABCD$ est de sens direct et que le point P est le centre du carré C_1, il est clair que A est l'image de B par la rotation de centre P et d'angle $\pi/2$. On a alors :

$$a-p=i(b-p) \Rightarrow p=\frac{a-ib}{1-i}.$$

Raisonnant « par permutation circulaire » ou en refaisant trois fois le même raisonnement :

$$q=\frac{b-ic}{1-i}, r=\frac{c-id}{1-i}, s=\frac{d-ia}{1-i} \Rightarrow \frac{s-q}{r-p}=\frac{d-b+i(c-a)}{c-a+i(b-d)}=i.$$

Nous allons démontrer maintenant le **théorème de Von Aubel** : les diagonales du quadrilatère $[PQRS]$ sont perpendiculaires et de même longueur. En effet, comme $s-q=i(r-p)$, on en déduit déjà que les droites (PR) et (QS) sont perpendiculaires, puis comme $\left|\frac{s-q}{r-p}\right|=1$, on a : $PR=QS$ et les diagonales du quadrilatère $PQRS$ ont la même longueur.

Mise en œuvre : exercice 4.21 et **exercice 4.22**.

Vrai/Faux

	Vrai	Faux
1. i est égal à sa partie imaginaire.	☐	☐
2. On peut très bien avoir l'égalité $\lvert z+z'\rvert = \lvert z\rvert + \lvert z'\rvert$ sans que z et z' soient obligatoirement liés par un réel.	☐	☐
3. Deux complexes dont la somme et le produit sont réels, sont réels.	☐	☐
4. $\forall (a,\, b) \in \mathbb{C}^2$, $(a+ib=0 \Rightarrow a=b=0)$.	☐	☐
5. Le nombre complexe 0 est de module et d'argument nuls.	☐	☐
6. Deux complexes de même module dont la différence des arguments est 2π sont égaux.	☐	☐
7. Si $z \in \mathbb{C}^\star$, alors $-z$ a pour argument $\pi + \arg(z)$ et z^n avec $n \in \mathbb{N}$ a pour argument $n + \arg(z)$.	☐	☐
8. Si $z \in \mathbb{C}^\star$, il admet deux racines carrées opposées $\sqrt{\lvert z\rvert}e^{i(\arg(z))/2}$ et $-\sqrt{\lvert z\rvert}e^{i(\arg(z))/2}$	☐	☐
9. Soit z un nombre complexe de module égal à 1. Alors, il existe un entier $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que le nombre complexe z soit une racine n-ième de l'unité.	☐	☐
10. Les racines carrées du complexe i sont $\sqrt{i}$ et $-\sqrt{i}$.	☐	☐
11. Les racines cubiques de l'unité sont 1, $j = e^{i\pi/3}$ et $\overline{j} = e^{-i\pi/3}$.	☐	☐
12. Si $n \in \mathbb{N}^\star$, les n racines n-ièmes de z complexe non nul, s'obtiennent en multipliant une racine n-ième particulière de z par les n racines n-ièmes de 1.	☐	☐
13. Si l'équation $ax^2+bx+c=0$ d'inconnue x et de constantes a, b et c complexes, admet pour solution le complexe z, alors $\overline{z}$ est aussi solution.	☐	☐
14. On a l'implication : $e^z = -1 \Rightarrow z = i\pi$.	☐	☐

Énoncé des exercices

Notations algébrique et trigonométrique

Exercice 4.1 : Mettre les nombres complexes sous la forme demandée.

1. Sous forme exponentielle $z_1 = \dfrac{3}{1-i}$, $z_2 = \dfrac{(1+i)^3}{1-i} + \dfrac{(1-i)^4}{(1-i)^2}$, $z_3 = \dfrac{(\sqrt{6}-i\sqrt{2})(1+i)}{1-i}$.

2. Sous forme algébrique $z_4 = \dfrac{3+6i}{3-4i}$, $z_5 = \left(\dfrac{1+i}{2-i}\right)^2 + \dfrac{1-7i}{4+3i}$, $z_6 = \dfrac{2+5i}{1-i} + \dfrac{2-5i}{1+i}$.

Exercice 4.2 : Soit $u = \frac{1}{2}(\sqrt{6} - i\sqrt{2})$, $v = 1 - i$.

1. Présenter u et v sous forme exponentielle.

2. En déduire une présentation exponentielle de u/v, puis les valeurs exactes de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.

Exercice 4.3 : Écrire sous forme trigonométrique $z = (1 + i\tan\theta)^2$, où $\theta \in [0, \pi/2[$.

Calculs algébriques

Exercice 4.4 : Soit $u = -3 - 3i$ et $v = \sqrt{3} + i$.

1. Déterminer le module et un argument de u et v.

2. En déduire le module et un argument de uv et u/v.

Exercice 4.5 : Démontrer que pour tous u et v dans $\mathbb{C}$, $|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2\,(|u|^2 + |v|^2)$.

Exercice 4.6 : Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Simplifier

1. $z_1 = \left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^n$; **2.** $z_2 = \left((\sqrt{3}-1) + i(1+\sqrt{3})\right)^n + \left((\sqrt{3}-1) - i(1+\sqrt{3})\right)^n$.

Exercice 4.7 : Pour quelles valeurs de n, le complexe $\left(\dfrac{(1-i\sqrt{3})^5}{(1-i)^3}\right)^n$ est-il un réel positif ?

Exercice 4.8* : Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Montrer l'implication $e^{ix} + e^{iy} + e^{iz} = 0 \Rightarrow e^{i2x} + e^{i2y} + e^{i2z} = 0$

D'après Concours Mines-Ponts MP

Applications en trigonométrie

Exercice 4.9 : Calculer $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ en utilisant des formules trigonométriques. En déduire une expression simple de $\left(\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^8$.

Exercice 4.10 : Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Linéariser $\cos^2(x)\sin^2(x)$ et $\sin^4(x)\cos(x)$.

2. Exprimer $\cos(5x)$ en fonction de $\cos(x)$.

Exercice 4.11 : Résoudre de deux manières : (E) : $\cos(x) + \sin(x) = 1$.

■ Racines n-ièmes

Exercice 4.12 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^5 = 1$. **2.** $z^7 = 1 + i\sqrt{3}$. **3.** $z^6\overline{z} = 1$.

Exercice 4.13 :

1. Présenter sous forme exponentielle $u = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$, et $v = \dfrac{1-i}{1+i\sqrt{3}}$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $z^6 = u$ et $z^4 = v$.

Exercice 4.14 : Calculer les racines quatrièmes de $28 - 96i$.

■ Équations polynomiales dans $\mathbb{C}$

Exercice 4.15 : Résoudre l'équation $iz^2 + (i+3)z + 2 - 2i = 0$.

Exercice 4.16 : Résoudre l'équation $z^3 - (5+3i)z^2 + (7+16i)z + 3 - 21i = 0$.

Exercice 4.17 : Soit n un entier non nul fixé, résoudre (E), $(1+z)^{2n} = (1-z)^{2n}$ puis calculer le produit des racines non nulles.

■ Calcul de sommes

Exercice 4.18 : Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \not\equiv 0[2\pi]$ et $n \in \mathbb{N}^\star$.

On note $C(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ et $S(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$. Montrer que

$$C(x) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\ \cos\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \text{ et } S(x) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\ \sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Exercice 4.19 : Soit $(a, x) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}^\star$.

1. Calculer $S_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos(a + kx)$.

2. En déduire $S_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos^3(kx)$.

■ Applications en géométrie plane

Exercice 4.20 : Soit la similitude f de centre P d'affixe $2 - 3i$, d'angle $\dfrac{\pi}{4}$, de rapport $3\sqrt{2}$.

1. Si M est un point d'affixe z, déterminer l'affixe z' de $f(M)$.

2. Déterminer l'image par f de la droite d'équation $y = x + 1$.

Exercice 4.21 : Soit $z \in \mathbb{C}^\star$. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ du plan complexe tels que les points d'affixes z, z^2 et $1/z$ sont alignés.

Exercice 4.22* : Soient U, V et W trois points d'affixes respectives u, v et w.

1. Démontrer que le triangle (UVW) est équilatéral de sens direct si et seulement si, en posant $j = e^{i2\pi/3}$, $u - v = -j^2(w - v)$. En déduire que le triangle (UVW) est équilatéral de sens direct si et seulement si $u + jv + j^2w = 0$.

Dans la suite, ABC est un triangle quelconque de sens direct et on construit les points P, Q et R tels que $(BPC), (CQA)$ et (ARB) soient des triangles équilatéraux de sens direct. Ainsi, ces trois triangles s'appuient extérieurement chacun sur un des côtés $[AB], [AC]$ et $[BC]$. On note maintenant $U(u), V(v)$ et $W(w)$ les centres de gravité respectivement des triangles $(BPC), (CQA)$ et (ARB).

2. Comparer $a + b + c$ et $u + v + w$. En déduire que le triangle (UVW) a même centre de gravité que (ABC).

3. Montrer que le triangle (UVW) est équilatéral. *Théorème de Napoléon Bonaparte.*

Indications

Ex. 4.4

On appliquera ici la **méthode 4.6**.

Ex. 4.6

1. *Choisissez la bonne représentation pour le nombre complexe* $\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}$.

2. *On pourra utiliser les formules de factorisation (***méthode 3.14***) :* $\cos(\pi/6) + \cos(2\pi/3) = 2\cos(5\pi/12)\cos(\pi/4)$ *et* $\sin(\pi/6) + \sin(2\pi/3) = 2\sin(5\pi/12)\cos(\pi/4)$.

Ex. 4.7

Vous avez pensé à la forme trigonométrique ? Cela tombe bien, nous aussi !

Ex. 4.8

Commencer par montrer que l'on peut se ramener au cas $x = 0$ *et il faudra alors montrer que*

$$1 + e^{iy'} + e^{iz'} = 0 \Rightarrow 1 + e^{i2y'} + e^{i2z'} = 0,$$

où y' *et* z' *sont exprimés en fonction de* y, z *et* x. *On montrera ensuite que* $1 + e^{iy'} + e^{iz'} = 0$ *permet de conclure que* $e^{iy'}$ *et* $e^{iz'}$ *sont conjugués. La balle est alors dans votre camp !*

Ex. 4.9

Les valeurs à trouver de $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ *et* $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ *ne font pas partie des formules à connaître. Servez vous de vos souvenirs en trigonométrie puis pensez à Abraham De Moivre !*

Ex. 4.11

On peut penser effectivement à deux méthodes, la première consiste à passer en complexes en posant $z = e^{ix}$ *et la deuxième est d'utiliser la* **méthode 3.16**.

Ex. 4.14

Une racine carrée d'une racine carrée est une racine quatrième ! À bon entendeur, salut !

Ex. 4.16

La résolution des équations du troisième degré est bien entendu hors programme. Ceci dit, en prévision du cours sur les polynômes, il faut commencer à apprendre à résoudre ce type d'équation mais en étant très guidé ! Allez, on vous le dit : il y a une racine imaginaire pure ! Vous remplacerez z par ix, avec $x \in \mathbb{R}$ dans l'équation puis vous séparerez la partie réelle et la partie imaginaire. Cela permet d'obtenir x et donc une racine. Reportez vous ensuite à la méthode **méthode 4.20**.

Ex. 4.17

On posera $Z = \dfrac{1+z}{1-z}$.

Ex. 4.21

La condition d'alignement aboutit à une égalité avec des z et des $\overline{z}$. Ne poser pas $z = x + iy$ de suite. Commencer par mettre $z - \overline{z}$ en facteur pour simplifier l'égalité. Enfin, on se rappellera le cours de première où l'on a vu une équation de cercle à partir de son centre et de son rayon.

Ex. 4.22

1. *Il s'agit d'exploiter le fait que si le triangle (UVW) est équilatéral de sens direct, alors le point U est l'image de W par la rotation de centre V et d'angle $\pi/3$. Il faut alors en déduire une égalité sur les affixes. Allez voir la* **méthode 4.21**. *On utilisera aussi le fait que $1 + j + j^2 = 0$.*

2. *Le centre de gravité (on dit aussi isobarycentre) des points A, B et C est l'unique point G tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$. On vérifie que le centre de gravité G du triangle de sommets $A(a), B(b), C(c)$ a pour affixe $(a + b + c)/3$.*

Corrigé des vrai/faux

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
F	F	F	F	F	V	F	V	F	F	F	V	F	F

1. Attention, une partie imaginaire est un réel !
3. Soit S la somme de deux complexes z_1 et z_2 et P son produit. Les deux complexes sont solutions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$, on peut le voir en développant $(x - z_1)(x - z_2)$. On a le résultat. Il suffit de considérer l'équation $x^2 + x + 1 = 0$ dont les racines sont j et j^2. On a $S = -1$ et $P = 1$. Pourtant j et j^2 ne sont pas réels.
4. Prendre $a = 1$ et $b = i$. L'assertion est donc fausse. Pourtant si on impose à a et b d'être réels, elle serait vraie !
5. 0 n'a pas d'argument, devons-nous l'écrire ? Ben oui, on l'a écrit !
6. Dès que la différence des arguments est un multiple de 2π, si leurs modules sont les mêmes, ils sont égaux. L'assertion est vraie.
9. Par exemple, $e^{i\pi^2} \in \mathbb{U}$ et il n'existe pas $(k, n) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $e^{i2\pi/n} = e^{i\pi^2}$.
10. Ne jamais écrire $\sqrt{i}$. L'assertion n'a donc pas de sens. Elle est considérée comme fausse.
11. Attention, $j = e^{i2\pi/3}$.
13. C'est faux sauf si a, b et c sont réels.
14. Il y a une infinité de solutions ! En effet, si on pose $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on peut écrire $e^{x+iy} = e^x e^{iy} = -1 = e^{i\pi}$ et cela donne $x = 0$ et $y = \pi + 2k\pi$. Les solutions de l'équation sont tous les complexes de la forme $z = i(\pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Erreurs classiques

- Oublier d'écrire (ou de vérifier) que z doit être non nul avant de considérer $\arg(z)$.
- Prendre la partie imaginaire d'un complexe en gardant i en facteur.
- Écrire $|z| = z\overline{z}$ à la place de $|z|^2 = z\overline{z}$.
- Oublier que $|z + z'| = |z| + |z'|$ est équivalent à l'existence de $\lambda > 0$ tel que $z' = \lambda z$.
- Donner l'impression de découvrir $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ pour la première fois et ne pas avoir le réflexe d'écrire que $\overline{j} = j^2$ et $1 + j + j^2 = 0$.
- Écrire $\sqrt{z}$ pour désigner la racine carrée de z, ce qui ne veut strictement rien dire car il y a en général deux racines carrées distinctes.
- Oublier, quand on calcule les racines n-ièmes d'un complexe non nul, d'ajouter $2k\pi$ à l'argument de ce dernier avant de diviser par n.
- Oublier que si les trois quantités a, b, c sont réelles, l'équation $az^2 + bz + c = 0$ dans le cas où $\Delta < 0$, admet deux solutions complexes conjuguées.
- Dire par contre que l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet deux solutions complexes conjuguées dans le cas où l'une au moins des trois quantités a, b, c n'est pas réelle.

Corrigé des exercices

Exercice 4.1

1. La notation exponentielle est bien adaptée au calcul des produits et des quotients (**méthode 4.1**). Par conséquent, nous allons d'abord représenter les différents facteurs sous forme exponentielle.

• À l'aide de la **méthode 4.2**, on obtient aisément que $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$. À l'aide des règles de calcul avec l'exponentielle complexe, il s'ensuit que $z_1 = \frac{3}{\sqrt{2}}e^{i\pi/4}$.

Faites un petit schéma du cercle trigonométrique, pour retrouver les angles à partir de leur cosinus et sinus.

• Comme $1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ et $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$, on peut écrire

$$\begin{aligned} z_2 &= \frac{(1+i)^3}{1-i} + \frac{(1-i)^4}{(1-i)^2} = 2\,\frac{\left(e^{i\pi/4}\right)^3}{e^{-i\pi/4}} + 2\left(e^{-i\pi/4}\right)^2 \\ &= 2\,\frac{e^{3i\pi/4}}{e^{-i\pi/4}} + 2e^{-2i\pi/4} = 2e^{i\pi} + 2e^{-i\pi/2} = 2(-1-i) = 2\sqrt{2}e^{5i\pi/4}. \end{aligned}$$

On se rappelle que $e^{i\pi} = -1, e^{-i\pi/2} = -i$

• Déterminons d'abord l'écriture trigonométrique de $\sqrt{6} - i\sqrt{2}$. On met en œuvre la **méthode 4.2** :

$\boxed{1}$ On a $|\sqrt{6} - i\sqrt{2}| = \sqrt{(\sqrt{6})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

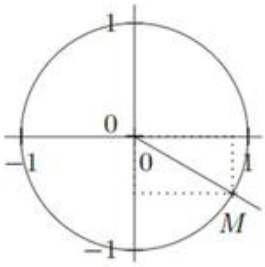
$\boxed{2}$ On factorise $\sqrt{6} - i\sqrt{2}$ par son module $\sqrt{6} - i\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \times (\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2})$.

$\boxed{3}$ Finalement, on trouve un argument de $\sqrt{6} - i\sqrt{2}$ par identification :

Sur le cercle trigo, on sait placer les points dont l'une des coordonnées est égale à $\pm\frac{1}{2}$ ou à ± 1. Même si c'est très peu dans l'absolu, en pratique cela suffit toujours !

Un argument θ de $\sqrt{6} - i\sqrt{2}$ vérifie

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta) &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$



L'angle $\theta = -\dfrac{\pi}{6}$ convient.

Finalement, $z_3 = \dfrac{2\sqrt{2}e^{-i\pi/6}\ \sqrt{2}e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}e^{-i\pi/4}} = 2\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6})} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$.

On utilise ici les **règles de calcul** *pour les exponentielles imaginaires,* **théorème 4.8**.

2. Pour déterminer la notation algébrique d'un quotient complexe, nous multiplions numérateur et dénominateur par son conjugué afin de faire apparaître au dénominateur, un nombre réel : le module au carré du dénominateur. Il vient

$$\begin{aligned} z_4 &= \frac{3+6i}{3-4i} = \frac{(3+6i)(3+4i)}{|3-4i|^2} = \frac{(9-24)+i(12+18)}{9+16} = \frac{-15+30i}{25} \\ &= -\frac{3}{5} + i\frac{6}{5} \\ z_5 &= \frac{2i}{3-4i} + \frac{1-7i}{4+3i} = \frac{-2}{3i+4} + \frac{1-7i}{4+3i} = \frac{-1-7i}{4+3i} = \frac{(-1-7i)(4-3i)}{|4+3i|^2} \\ &= \frac{-25-25i}{25} = -1-i \end{aligned}$$

Pour z_6 on peut observer que les deux termes sont conjugués, ainsi

$$\begin{aligned} z_6 &= \frac{2+5i}{1-i} + \overline{\left(\frac{2+5i}{1-i}\right)} = 2\Re\mathfrak{e}\left(\frac{2+5i}{1-i}\right) = 2\Re\mathfrak{e}\left(\frac{(2+5i)(1+i)}{|1-i|^2}\right) \\ &= 2\Re\mathfrak{e}\left(\frac{-3+7i}{2}\right) = -3 \end{aligned}$$

▲

Exercice 4.2

1. Nous appliquons la **méthode 4.2** pour présenter u et v en notation trigonométrique, puis exponentielle. Il vient $u = \sqrt{2}e^{-i\pi/6}$ et $v = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$.

2. D'après les **règles de calcul** pour les exponentielles imaginaires, nous avons

On détermine les expressions trigo et algébrique de $\frac{u}{v}$.

- d'une part $\dfrac{u}{v} = \dfrac{\sqrt{2}e^{-i\pi/6}}{\sqrt{2}e^{-i\pi/4}} = e^{i(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6})} = e^{i\frac{\pi}{12}} = \cos(\pi/12) + i\sin(\pi/12)$ et
- d'autre part $\dfrac{u}{v} = \frac{1}{2}\,\dfrac{(\sqrt{6}-i\sqrt{2})(1+i)}{|1-i|^2} = \frac{1}{4}\left[(\sqrt{6}+\sqrt{2}) + i(\sqrt{6}-\sqrt{2})\right]$.

En identifiant parties réelle et imaginaire, il en résulte :

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \qquad \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

▲

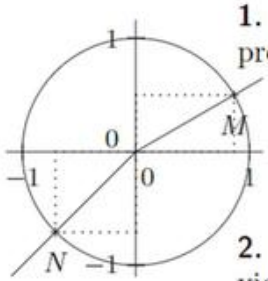
Exercice 4.3

En écrivant que $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$, il vient :

$$z = (1+i\tan\theta)^2 = \left(1+i\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2 = \left(\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2\theta}\,e^{2i\theta}.$$

Comme $\cos^2\theta$ est un réel strictement positif, il s'agit bien de l'écriture trigonométrique de z. ▲

Exercice 4.4



1. Pour déterminer module et argument de u et v, nous allons en donner une présentation trigonométrique. La **méthode 4.2** s'applique :

$$\begin{aligned} u &= -3-3i = 3\sqrt{2}\,(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}) = 3\sqrt{2}\,e^{5i\pi/4} \\ v &= \sqrt{3}+i = 2\,(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}) = 2e^{i\pi/6}. \end{aligned}$$

2. En appliquant les **règles de calcul** pour les exponentielles imaginaires, il vient :

$$\begin{aligned} uv &= 3\sqrt{2}\,e^{5i\pi/4} \times 2e^{i\pi/6} = 6\sqrt{2}e^{-7i\pi/12}; \\ u/v &= \frac{3\sqrt{2}}{2}\,\frac{e^{5i\pi/4}}{e^{i\pi/6}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}\,e^{13i\pi/12}. \end{aligned}$$

▲

Exercice 4.5

Soit $(u,v) \in \mathbb{C}^2$. Pour exprimer le module au carré de $u+v$ et $u-v$, nous exploitons directement la définition :

Par définition,

$$|z|^2 = z \times \overline{z}$$

$$\begin{aligned}
|u+v|^2 + |u-v|^2 &= (u+v)\,\overline{(u+v)} + (u-v)\,\overline{(u-v)} \\
&= (u+v)\,(\overline{u}+\overline{v}) + (u-v)\,(\overline{u}-\overline{v}) \\
&= u\overline{u} + u\overline{v} + v\overline{u} + v\overline{v} + u\overline{u} - u\overline{v} - v\overline{u} + v\overline{v} \\
&= 2(|u|^2 + |v|^2) + u\overline{v} + \overline{u}v - u\overline{v} - v\overline{u} \\
&= 2\big(|u|^2 + |v|^2\big)
\end{aligned}$$

▲

Exercice 4.6

Suivant la **méthode 4.1**, pour simplifier l'expression de la puissance d'un complexe, on va le représenter sous forme exponentielle. On pourra alors facilement calculer sa puissance n-ième.

1. $1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3}$, $1 - i = \sqrt{2}\,e^{-i\pi/4}$. D'où $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i} = \sqrt{2}e^{7i\pi/12}$. D'après la **formule de Moivre**, il s'ensuit que

$$z_1 = (\sqrt{2})^n\ e^{7in\pi/12}$$

La formule de Moivre **théorème 4.9** *est très naturelle :*

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

2. On remarque que $\big(\sqrt{3}-1\big) + i\big(1+\sqrt{3}\big)$ et $\big(\sqrt{3}-1\big) - i\big(1+\sqrt{3}\big)$ sont conjugués. Par les propriétés de la conjugaison (**proposition 4.3**), il en résulte que leurs puissances n-ième sont elles aussi conjuguées. Ainsi,

$$\begin{aligned}
z_2 &= \Big((\sqrt{3}-1) + i(1+\sqrt{3})\Big)^n + \Big((\sqrt{3}-1) - i(1+\sqrt{3})\Big)^n \\
&= 2\mathfrak{Re}\left[\Big((\sqrt{3}-1) + i(1+\sqrt{3})\Big)^n\right]
\end{aligned}$$

D'après la **méthode 4.4**, *on a*

$$z + \overline{z} = 2\mathfrak{Re}\,(z)$$

Exprimons $(\sqrt{3}-1) + i(1+\sqrt{3})$ sous forme exponentielle. Pour ce faire, l'indication fournie est précieuse !

$$\begin{aligned}
\big(\sqrt{3}-1\big) + i\big(1+\sqrt{3}\big) &= \sqrt{3} + i - 1 + i\sqrt{3} = 2\big(e^{i\pi/6} + e^{2i\pi/3}\big) \\
&= 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] + 2i\left[\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] \\
&= 4\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\ \left[\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right] = 2\sqrt{2}\ e^{i\frac{5\pi}{12}}
\end{aligned}$$

*L'***exercice 4.6** *donne une méthode générale pour factoriser les sommes d'exponentielles imaginaires.*

D'après les formules de Moivre, il s'ensuit que

$$z_2 = 2\mathfrak{Re}\left[\big(2\sqrt{2}\big)^n\ e^{i5n\pi/12}\right] = 2\big(2\sqrt{2}\big)^n\ \cos\frac{5n\pi}{12}.$$

▲

Exercice 4.7

On écrit, tout d'abord à l'aide de la **formule de Moivre** :

$$\begin{aligned}
(1-i\sqrt{3})^5 &= \big(2e^{-i\frac{\pi}{3}}\big)^5 = 32e^{-i\frac{5\pi}{3}} \\
(1-i)^3 &= \big(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\big)^3 = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}
\end{aligned}$$

D'après les **règles de calcul** avec l'exponentielle imaginaire, il s'ensuit que $\dfrac{(1-i\sqrt{3})^5}{(1-i)^3} = 8\sqrt{2}e^{-11i\pi/12}$. D'après les **propriétés des arguments**, le complexe $\left(\dfrac{(1-i\sqrt{3})^5}{(1-i)^3}\right)^n$ a pour argument $-\dfrac{11n\pi}{12}$. Ainsi

$$\begin{aligned} z \in \mathbb{R}^{+\star} &\iff -\frac{11\pi}{12} \equiv 0\ [2\pi] \\ &\iff 11n \equiv 0\ [24] \end{aligned}$$

Finalement, le nombre $\left(\dfrac{(1-i\sqrt{3})^5}{(1-i)^3}\right)^n$ est un réel positif si et seulement si $11n$ est divisible par 24. Comme l'entier 11 est premier, n doit être un multiple de 24. ▲

Exercice 4.8

On factorise par e^{ix} et : $e^{ix}+e^{iy}+e^{iz} = e^{ix}\left(1+e^{i(y-x)}+e^{i(z-x)}\right) = 0$. Si l'on pose $y' = y-x$ et $z' = z-x$, on a : $1+e^{iy'}+e^{iz'} = 0$, ce qui permet de conclure que $\sin(y') = -\sin(z')$ donc $e^{iy'}$ et $e^{iz'}$ sont soit conjugués, soit opposés. Ce cas conduit à $1 = 0$ et il ne reste donc que le cas où ils sont conjugués. On a : $1+e^{iy'}+e^{-iy'} = 0 \Rightarrow 1+e^{iy'}+\left(e^{iy'}\right)^2 = 0$.

L'équation $X^2+X+1=0$ admet pour solutions j et j^2.

Comme y' et z' jouent un rôle symétrique (tiens, on le dit souvent cela !), on pose $e^{iy'} = j$, $e^{iz'} = j^2$ et : $1+(e^{iy'})^2+(e^{iz'})^2 = 1+j^2+j = 0$, soit $1+e^{i2y'}+e^{i2z'} = 1+e^{i2(y-x)}+e^{i2(z-x)} = 0$ et en multipliant par e^{i2x}, on a bien le résultat. ▲

Exercice 4.9

Formules de linéarisation

En fouillant au fin fond de nos souvenirs, on y découvre :

$$\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \text{ et } \sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Par conséquent,

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^8 = \left(2\cos\frac{\pi}{8}+2i\sin\frac{\pi}{8}\right)^8 = \left(2e^{i\frac{\pi}{8}}\right)^8 = 2^8e^{i\pi} = -256.$$

▲

Exercice 4.10

Pour transformer ces expressions trigonométriques, on peut soit utiliser les formules de trigonométrie (**méthode 3.13**, **méthode 3.12**), ou bien avoir recours aux complexes (**méthode 4.12**, **méthode 4.13**).

1. Commençons par linéariser $\cos^2(x)\sin^2(x)$ à l'aide de formules de trigonométrie circulaire :

$$\begin{aligned} \cos^2(x)\sin^2(x) &= \frac{\sin^(2x)}{4} = \frac{1}{4}\frac{1-\cos(4x)}{2} \\ &= \frac{1}{8}-\frac{1}{8}\cos(4x) \end{aligned}$$

Pour linéariser $\sin^4(x)\cos(x)$, mettons en œuvre la **méthode 4.12**. On remplace $\cos(x)$ par $\frac{1}{2}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)$ et $\sin(x)$ par $\frac{1}{2i}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)$. À l'aide de la **formule du binôme**, il vient :

$$\begin{aligned}
\sin^4 x\cos x &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^4\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)\\
&= \frac{1}{32}\left(e^{i4x}-4e^{i2x}+6-4e^{-2ix}+e^{-i4x}\right)\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\\
&= \frac{1}{32}\left(e^{i5x}+e^{-i5x}\right)-\frac{3}{32}\left(e^{i3x}+e^{-i3x}\right)+\frac{1}{16}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\\
&= \frac{1}{16}\cos(5x)-\frac{3}{16}\cos(3x)+\frac{1}{8}\cos(x).
\end{aligned}$$

2. On met en œuvre la **méthode 4.13**. On observe que $\cos 5x = \Re\mathfrak{e}\, e^{i5x} = \Re\mathfrak{e}\left[\cos x + i\sin x\right]^5$. Or

$$\begin{aligned}
\left[\cos x + i\sin x\right]^5 &= \cos^5 x + 5i\cos^4 x\sin x - 10\cos^3 x\sin^2 x\\
&\quad -10i\cos^2\sin^3 x + 5\cos x\sin^4 x + i\sin^5 x
\end{aligned}$$

En ne gardant que la partie réelle, il vient :

$$\begin{aligned}
\cos(5x) &= \cos^5 x - 10\cos^3 x\sin^2 x + 5\cos x\sin^4 x\\
&= \cos^5 x - 10\cos^3 x(1-\cos^2 x) + 5\cos x(1-\cos^2 x)^2\\
&= 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x
\end{aligned}$$

▲

Exercice 4.11

Si on applique la première méthode, on obtient : $z + z^{-1} - i\left(z - z^{-1}\right) = 1 \Rightarrow (1-i)z^2 - 2z + 1 + i = 0$. Ici $\Delta = -4 = 4i^2$ et les deux solutions de la dernière équation sont $z_1 = i$ et $z_2 = 1$. On est ramené aux deux systèmes

$$\begin{cases}\cos(x) = 0\\ \sin(x) = 0\end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases}\cos(x) = 0\\ \sin(x) = 1\end{cases}$$

ce qui donne deux familles de solutions, $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ ou $x = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Attention, la méthode peut coincer dans le cas où (E) n'a pas de solution. Alors $\Delta > 0$ et il n'existe en général pas de racine complexe de module 1.

Si l'on applique la deuxième méthode, on écrit : $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos(x - \pi/4)$. (E) donne $\cos(x - \pi/4) = 1/\sqrt{2}$, c'est-à-dire $\cos(x - \pi/4) = \cos(\pi/4)$. Cela entraîne qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$, tel que $x - \pi/4 = \pi/4 + 2k\pi$ ou $x - \pi/4 = -\pi/4 + 2k\pi$. On retrouve nos solutions. ▲

Exercice 4.12

1. Les racines 5ièmes de 1 sont $\mathbb{U}_5 = \{1, e^{2i\pi/5}, e^{4i\pi/5}, e^{6i\pi/5}, e^{8i\pi/5}\}$.

2. Il s'agit de déterminer les racines 7-ièmes de $a = 1 + i\sqrt{3}$. On applique la **méthode 4.16**.

$\boxed{1}$ $a = 2e^{i\pi/3}$

$\boxed{2}$ Une racine 7-ième particulière est $\zeta_0 = \sqrt[7]{2}e^{i\pi/21}$

$\boxed{3}$ Les racines septièmes de 1 sont

$$\mathbb{U}_7 = \{1, e^{6i\pi/21}, e^{12i\pi/21}, e^{18i\pi/21}, e^{24i\pi/21}, e^{30i\pi/21}, e^{36i\pi/21}\}$$

$\boxed{4}$ Les racines septièmes de a sont

$$\mathcal{S} = \{\{\sqrt[7]{2}e^{\frac{i\pi}{21}}, e\sqrt[7]{2}^{\frac{7i\pi}{21}}, \sqrt[7]{2}e^{\frac{13i\pi}{21}}, \sqrt[7]{2}e^{\frac{19i\pi}{21}}, \sqrt[7]{2}e^{\frac{25i\pi}{21}}, \sqrt[7]{2}e^{\frac{31i\pi}{21}}, \sqrt[7]{2}e^{\frac{37i\pi}{21}}\}$$

3. Raisonnons par équivalences

$$z^6\overline{z} = 1 \iff \left\{\begin{array}{rcl} |z|^7 & = & 1 \\ z^6\overline{z} & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} |z| & = & 1 \\ z^6\overline{z} & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} |z| & = & 1 \\ z^5 & = & 1 \end{array}\right. \iff z^5 = 1$$

Ainsi, les solutions de l'équation proposée sont simplement les racines cinquièmes de 1. ▲

Exercice 4.13

On ne repasse pas sous forme algébrique afin de déterminer leur écriture trigonométrique.

1. On observe que u et v sont des quotients de nombres complexes dont on connaît les écritures exponentielles.

$$u = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}} = e^{2i\pi/3} \qquad v = \frac{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-7i\pi/12}$$

2. On met en œuvre la **méthode 4.16**.

- Déterminons les racines sixièmes de u :

$\boxed{1}$ $u = e^{2i\pi/3}$

$\boxed{2}$ Une racine sixième particulière de u est $u_0 = e^{i\pi/9}$.

$\boxed{3}$ Les racines sixièmes de 1 sont $\mathbb{U}_6 = \{1, e^{3i\pi/9}, e^{6i\pi/9}, e^{9i\pi/9}, e^{12i\pi/9}, e^{15i\pi/9}\}$.

$\boxed{4}$ Les racines sixièmes de u sont

$$\mathcal{S} = \{e^{i\pi/9}, e^{4i\pi/9}, e^{5i\pi/9}, e^{10i\pi/9}, e^{13i\pi/9}, e^{16i\pi/9}\}$$

- Déterminons les racines quatrièmes de v :

$\boxed{1}$ $v = \dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-7i\pi/12}$.

$\boxed{2}$ Une racine quatrième particulière de v est donc $v_0 = \dfrac{1}{\sqrt[8]{2}}\, e^{-7i\pi/48}$.

$\boxed{3}$ Les racines quatrièmes de l'unité sont $\mathbb{U}_4 = \{1, e^{24i\pi/48}, e^{48i\pi/48}, e^{72i\pi/48}\}$.

$\boxed{4}$ les racines quatrièmes de v sont donc

$$\mathcal{S} = \{\frac{1}{\sqrt[8]{2}}\, e^{-7i\pi/48}, \frac{1}{\sqrt[8]{2}}\, e^{17i\pi/48}, \frac{1}{\sqrt[8]{2}}\, e^{41i\pi/48}, \frac{1}{\sqrt[8]{2}}\, e^{65i\pi/48}\}$$

▲

Exercice 4.14

Pour déterminer les 4 racines quatrièmes de $a = 28 - 96i$, nous recherchons une racine quatrième particulière ζ_0 de a. On obtiendra alors l'ensemble des racines quatrièmes de a en multipliant ζ_0 par toutes les racines quatrièmes de l'unité.

• On peut remarquer que $28-96i = 4(7-24i)$. Déterminons une racine carrée de $7-24i$ en notation algébrique. On applique la **méthode 4.17** : on cherche $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(x+iy)^2 = 7-24i$. On débouche sur : $\left\{\begin{array}{rcl} x^2 - y^2 & = & 7 \\ x^2 + y^2 & = & 25 \\ xy & < & 0 \end{array}\right.$.

D'où $x^2 = 16$ et $y^2 = 9$. Comme $xy < 0$, il reste deux solutions $-4 + 3i$ et $4 - 3i$. Finalement, les racines carrées de $28 - 96i$ sont $-8 + 6i$ et $8 - 6i$.

• On cherche à présent les racines carrées de $-8+6i$. On cherche donc $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(x+iy)^2 = -8+6i$. On débouche sur : $\left\{\begin{array}{rcl} x^2 - y^2 & = & -8 \\ x^2 + y^2 & = & 10 \\ xy & > & 0 \end{array}\right.$. D'où $x^2 = 1$ et $y^2 = 9$. Comme $xy > 0$, il reste deux solutions $1 + 3i$ et $-1 - 3i$.

• Ainsi, $\zeta_0 = 1 + 3i$ est une racine quatrième particulière de $a = 28 - 96i$. Finalement, les racines quatrièmes de a sont $\{1+3i, -1-3i, -3+i, 3-i\}$. ▲

Exercice 4.15

Le discriminant est $\Delta = -2i$, on trouve pour racines carrées de Δ, la valeur $1 - i$ et son opposé. Les solutions de l'équation sont $-1 + i$ et $2i$. ▲

Exercice 4.16

On pose $z = ix$, où $x \in \mathbb{R}$ et en remplaçant dans l'équation puis en séparant partie réelle et partie imaginaire, $\left\{\begin{array}{rcl} 5x^2 - 16x + 3 & = & 0 \\ -x^3 + 3x^2 + 7x - 21 & = & 0 \end{array}\right.$.

On exploite la première équation, elle a deux solutions 3 et 1/5. Une seule vérifie l'autre équation , c'est 3. Conclusion : $3i$ est solution de (E). Il existe donc a, b, c trois complexes tels que

$$z^3 - (5 + 3i)z^2 + (7 + 16i)z + 3 - 21i = (z - 3i)(az^2 + bz + c)$$

Après identification, on trouve $a = 1, c = 7 + i$ et $b = -5$. Il nous reste une équation du second degré de discriminant $\Delta = -3 - 4i$. Ses racines carrées sont $1 - 2i$ et son opposé. On trouve pour solutions de l'équation du seconde degré $2 + i$ et $3 - i$. Finalement, $\mathcal{S} = \{3i, 2 + i, 3 - i\}$. ▲

Exercice 4.17

Comme 1 n'est pas solution de (E), l'équation (E) devient : $Z^{2n} = 1$ en posant $Z = \dfrac{1+z}{1-z}$. Les racines $2n$-ièmes de 1 sont $e^{i\frac{k\pi}{n}}$ avec $k \in \{0, ..., 2n-1\}$.

$\dfrac{1+z}{1-z} = e^{i\frac{k\pi}{n}} \iff z\left(e^{i\frac{k\pi}{n}} + 1\right) = e^{i\frac{k\pi}{n}} - 1$ avec k entier dans $\{0, ..., 2n-1\}$.

✎ *En arrangeant, $z = i\tan\dfrac{k\pi}{2n}$ avec $k \neq n$ dans $\{0, ..., 2n-1\}$*

Il n'y a pas de solution pour $k = n$.On a : $z = \dfrac{e^{i\frac{k\pi}{n}} - 1}{e^{i\frac{k\pi}{n}} + 1}$ avec k entier différent de n et compris entre 0 et $2n - 1$. Cela fait $2n - 1$ solutions. ▲

Corrigé

Exercice 4.18

Plutôt que de calculer directement $C(x)$ et $S(x)$, nous avons intérêt à passer en complexes suivant la **méthode 4.14** : calculons donc

$$E(x) = \sum_{k=0}^{n} e^{ikx}.$$

D'après les formules de **Moivre**, l'identité géométrique et les formules d'**Euler**, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} E(x) &= \sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \frac{e^{i(n+1)x}-1}{e^{ix}-1} = \frac{e^{i(n+1)x/2}}{e^{ix/2}} \frac{e^{i(n+1)x/2}-e^{-i(n+1)x/2}}{e^{ix/2}-e^{-ix/2}} \\ &= \frac{\sin(n+1)x/2}{\sin(x/2)} e^{inx/2)} \end{aligned}$$

Finalement, comme $C(x) = \mathfrak{Re}\, E(x)$ et $S(x) = \mathfrak{Im}\, E(x)$, nous obtenons :

$$C(x) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\ \cos\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \text{ et } S(x) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\ \sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

▲

Exercice 4.19

Soit $(a, x) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}^\star$.

1. Remarquons que S_1 est la partie réelle de la somme de nombres complexes $\mathfrak{S} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i(a+kx)}$. Or d'après la **formule de Moivre**

$$\mathfrak{S} = e^{ia} \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{ix}\right)^k$$

▸ Si x est congru à 0 modulo 2π, cette somme se réduit à ne^{ia}, et dans ce cas, S_1 vaut $n \cos a$.

▸ i $x \not\equiv 0[2\pi]$. En ce cas, l'identité géométrique donne

$$\mathfrak{S} = e^{ia} \frac{e^{inx}-1}{e^{ix}-1} = e^{ia} e^{i\frac{n-1}{2}x} \frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}$$

En ce cas, $S_1 = \dfrac{\cos(a + \frac{n-1}{2}x)\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}$.

2. Linéarisons $\cos^3 x$. Il vient : $\cos^3(x) = \dfrac{3}{4}\cos(x) + \dfrac{1}{4}\cos(3x)$. On obtient la valeur de S_2 en appliquant le résultat de la première question à x et à $3x$ (en prenant $a = 0$). ▲

Exercice 4.20

Le centre est le seul point invariant de la similitude.

1. On obtient $z' = az + b$ avec $a = 3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 3(1+i)$.
De plus, $b = (2-3i) - a(2-3i) = -13$.
On rappelle qu'une similitude directe de centre Ω, d'angle θ et de rapport k, est la composée (commutative) d'une rotation de centre Ω et d'angle θ et de l'homothétie de centre Ω et de rapport k.

2. On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$. On remarque rapidement que :

$$x' = 3(x-y) - 13 \text{ et } y' = 3(x+y).$$

Si $y = x+1$ alors $x - y = -1$ et $x' = -16$. ▲

L'image de la droite est encore une droite.

Exercice 4.21

On note $N(z^2)$ et $P(1/z)$. On remarque que si $z = 1$, les trois points M, N et P sont confondus donc alignés. Si $z = 1/z$, on retrouve le cas $z = 1$, déjà traité et le cas $z = -1$ qui entraîne que M et P sont confondus et encore une fois les trois points M, N, P sont alignés. Si $z = z^2$, on retrouve $z = 1$ et $z = 0$. Ce dernier cas est impossible.

Il ne faut pas oublier dans la discussion de traiter à part les cas où certains points sont égaux. Sinon, on écrit des rapports dont le dénominateur peut être nul !

On suppose $z \notin \{-1, 1\}$. Les trois points M, N et P sont alignés si et seulement si $\dfrac{\frac{1}{z} - z}{z^2 - z}$ est réel. On écrit ce rapport sous la forme : $\dfrac{1-z^2}{z^3 - z^2} = \dfrac{-1-z}{z^2}$.

La condition est : $\dfrac{1+z}{z^2} \in \mathbb{R} \iff \dfrac{1+z}{z^2} = \dfrac{1+\overline{z}}{\overline{z}^2}$.

Cette relation s'écrit : $z\overline{z}^2 + \overline{z}^2 = \overline{z}z^2 + z^2$. On l'écrit :

$$z\overline{z}(\overline{z} - z) + (\overline{z}^2 - z^2) = 0 \Rightarrow (\overline{z} - z)(|z|^2 + z + \overline{z}) = 0.$$

- Si $z = \overline{z}$, $z \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.
- Si $z \neq \overline{z}$, on pose $z = x + iy$ et on obtient $x^2 + y^2 + 2x = 0$. On l'écrit $(x+1)^2 + y^2 = 1$ et on reconnaît le cercle C de centre $(-1, 0)$ et de rayon 1, auquel on enlève le point O. ▲

Le lieu cherché est finalement la réunion de l'axe des réels et du cercle C, privé de O.

Exercice 4.22

1. Si le triangle (UVW) est équilatéral de sens direct, alors le point U est l'image de W par la rotation de centre V et d'angle $\pi/3$ et on a :
$u - v = e^{i\pi/3}(w - v)$. Comme $-j^2 = e^{i\pi/3}$, on a : $u - v = -j^2(w - v)$.
Réciproquement, il est clair que si $u - v = e^{i\pi/3}(w - v)$, U est l'image de W par la rotation de centre V et d'angle $\pi/3$ et (UVW) est équilatéral direct.
Puis, comme $1 + j + j^2 = 0$, on développe :

$$-j^2(w - v) = (1 + j)(w - v) = w - v + jw - jv = u - v \iff$$
$$w + jw - jv - u = 0 \iff j^2 w + jv + u = 0.$$

2. Par hypothèse, on peut écrire :

$$a - w = j(b - w),\ b - u = j(c - u),\ c - v = j(a - v).$$

Il reste à additionner les trois égalités et on obtient : $a + b + c - (u + v + w) = j(a + b + c - (u + v + w)) \Rightarrow a + b + c - (u + v + w) = 0$. D'où :

$$a + b + c = u + v + w.$$

Le triangle (UVW) est donc de même centre de gravité que (ABC).

3. Des égalités de la question précédente, on en déduit que :

$$w = \frac{a - jb}{1 - j},\ u = \frac{b - jc}{1 - j},\ v = \frac{c - ja}{1 - j}.$$

Il reste : $u + jv + j^2 w = \dfrac{a - jb + jb - j^2 c + j^2 c - a}{1 - j} = 0.$ ▲

Donc le triangle (UVW) est équilatéral.

Corrigé

Chapitre 5

Systèmes linéaires

UN MATHÉMATICIEN

Gabriel Cramer étudie la philosophie et les mathématiques avant d'obtenir une chaire de mathématiques à l'académie de Genève. Dans les années qui suivent, il rencontre les grands mathématiciens de son époque tels Jean Bernoulli, Alexis Clairaut et Abraham de Moivre. Il publie en 1750 un traité intitulé *Introduction à l'analyse des courbes algébriques* dans lequel on retrouve la méthode de résolution des systèmes qui porte son nom.

Un peu d'histoire

L'introduction des coordonnées par Descartes a permis d'étudier une courbe en partant de son équation, c'est-à-dire une relation que vérifient les coordonnées de tous ses points, et seulement eux, en général de la forme $f(x,y)=0$.

Plusieurs mathématiciens parmi lesquels Colin Maclaurin, Gabriel Cramer et Étienne Bézout ont étudié les intersections de telles courbes. Ceci les a conduits à des systèmes linéaires que ces savants ont tenté de résoudre. Maclaurin a élaboré une méthode de résolution des systèmes ayant deux ou trois inconnues et autant d'équations que reprend Cramer dans le cas général. Alexandre Vandermonde poursuit ces recherches et introduit la notion de déterminant. L'étude des systèmes linéaires s'inscrit désormais dans le cadre de l'algèbre linéaire qui s'est élaboré tout au long du XIXe siècle.

Objectifs

les incontournables

- Savoir transformer un système linéaire en un système triangulaire supérieur ou échelonné par lignes.
- Savoir résoudre un système linéaire dont le nombre de lignes et de colonnes n'excède pas 3 :
  - avec la méthode du pivot de Gauss.
- Savoir utiliser la résolution d'un système linéaire pour :
  - déterminer l'intersection de droites dans le plan ;
  - déterminer l'intersection de droites ou (et) de plans dans l'espace.

et plus si affinités

- Résoudre un système linéaire avec des paramètres.
- Déterminer le rang d'un système linéaire pour pouvoir classifier l'ensemble de solutions.

Résumé de cours

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Généralités sur les systèmes d'équations linéaires

Définition : *On appelle* ***système d'équations linéaires*** *un système du type :*

$$(S) \quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 & (L_1) \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 & (L_2) \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots & \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n & (L_n) \end{cases}$$

- *Pour $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,p]\!]$, les nombres $a_{i,j} \in \mathbb{K}$ sont appelés les* ***coefficients*** *du système.*
- *Pour $i \in [\![1,n]\!]$ les nombres $b_i \in \mathbb{K}$ forment ce que l'on appelle le* ***second membre****.*
- *Pour $j \in [\![1,p]\!]$ les x_j sont les* ***inconnues*** *du système.*
- *On dit que (S) est un* ***système de n équations linéaires à p inconnues****.*

Remarque : les coefficients $(a_{i,j})$ sont indexés par les couples $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$. Le premier indice i est le numéro de la ligne (L_i). Le deuxième indice j repère la colonne, c'est-à-dire l'inconnue devant laquelle le coefficient apparaît.

Vocabulaire : *lorsque les b_i sont* ***tous nuls****, on dit que le système (S) est* ***homogène****. Dans le cas général, on appelle* ***système homogène associé à*** *(S), et on note (S_o), le système de mêmes coefficients que (S) et avec second membre nul.*

Définition : *Soit (S) un système de n équations linéaires à p inconnues. On appelle* ***solution*** *du système (S) tout p-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que les n équations de (S) soient vérifiées. Résoudre le système (S) consiste à déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions.*

- *Un système dont l'ensemble des solutions est vide est dit* ***incompatible****.*
- *Un système possédant au moins une solution est dit* ***compatible****.*

Remarque : un système homogène est toujours compatible car le p-uplet $(0, \ldots, 0)$ est solution évidente.

Résolution des systèmes d'équations linéaires

Opérations élémentaires sur les lignes d'un système

Définition : *Deux systèmes (S_1) et (S_2) sonts dits* ***équivalents*** *s'ils ont le même ensemble de solutions. On note cette relation*

$$(S_1) \iff (S_2).$$

Théorème-Définition 5.1.— Opérations élémentaires sur les lignes d'un système —. On obtient un système équivalent à (S) lorsqu'on effectue les **opérations élémentaires** suivantes :

- **échanger l'ordre des lignes** L_i et L_j $\qquad (L_i \leftrightarrow L_j)$;
- **multiplier la ligne** L_i **par une constante non nulle** $\lambda_i \in \mathbb{K}^\star$ $\qquad (L_i \leftarrow \lambda_i\, L_i)$;
- **ajouter à la ligne** L_i **un multiple d'une autre ligne** L_j $(i \neq j)$ $\qquad (L_i \leftarrow L_i + \lambda_j L_j)$.

Résolution de systèmes triangulaires

Définition : *Un système (S) de n équations à n inconnues est dit* ***triangulaire supérieur*** *lorsque*

$$\big(\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2\big), \quad \big(i > j \Rightarrow a_{i,j} = 0\big).$$

Ainsi, un système triangulaire supérieur de n équations à n inconnues s'écrit sous la forme :

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ & & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & a_{n,n}x_n & = & b_n \end{array} \right.$$

Remarque : on définit de façon analogue les systèmes triangulaires inférieurs.

Théorème 5.2.— Soit (S) un système triangulaire de n équations à n inconnues. Alors

(S) possède une unique solution
si et seulement si
tous les coefficients diagonaux de (T) sont non nuls.

Résolution de systèmes échelonnés

Définition : *Un système (S) de n équations à p inconnues est dit* ***échelonné*** *s'il existe $r \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant r \leqslant \min(n,p)$ tel que (S) s'écrive sous la forme :*

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} \boldsymbol{a_{1,1}}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,r}x_r + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ \boldsymbol{a_{2,2}}x_2 + \cdots + a_{2,r}x_r + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \ddots \qquad \vdots \quad \vdots \\ \boldsymbol{a_{r,r}}x_r + \cdots + a_{r,p}x_p = b_r \end{array}\right\} \quad r \text{ équations principales} \\ \left.\begin{array}{r} 0 = b_{r+1} \\ \vdots \quad \vdots \\ 0 = b_n \end{array}\right\} \quad n-r \text{ équations auxiliaires} \end{array} \right.$$

où les coefficients diagonaux $\boldsymbol{a_{1,1}}, \boldsymbol{a_{2,2}}, \ldots, \boldsymbol{a_{r,r}}$ sont non nuls.

Vocabulaire :

- *Les coefficients $a_{1,1}, \ldots, a_{r,r}$ sont appelés les* ***pivots****.*
- *Les inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_r$ sont appelées les* ***inconnues principales****.*
- *Les inconnues $x_{r+1}, \ldots, x_p$ sont appelées les* ***variables auxiliaires*** *ou* ***paramètres****.*
- *r s'appelle le* ***rang du système*** *(E).*

Théorème 5.3.— Soit (S) un système échelonné de n équations, à p inconnues, de rang r. Alors

(S) est compatible si et seulement si les $n-r$ équations auxiliaires sont vérifiées.

Dans ce cas,

- (S) possède une unique solution si et seulement si $r = p$;
- (S) possède une infinité de solutions si et seulement si $r < p$.

Résolution d'un système linéaire : cas général

Le cas particulier des systèmes échelonnés est le plus important. En effet :

Théorème 5.4.— Algorithme du pivot de Gauss —.

Tout système de n équations linéaires à p inconnues est équivalent à un système échelonné.

Proposition 5.5.— Tout système de n équations linéaires à p inconnues possède

- **ou bien** une infinité de solutions ;
- **ou bien** aucune solution ;
- **ou bien** une unique solution.

Structure de l'ensemble des solutions d'un système linéaire

Proposition 5.6.— Structure de $\mathcal{S}_o$ —. Soit (S) un système de n équations linéaires à p inconnues. On note $\mathcal{S}_o$ l'ensemble des solutions du système homogène associé.

- $(0, \ldots, 0)$ appartient à $\mathcal{S}_o$.
- $\forall x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathcal{S}_o$, $\forall y = (y_1, \ldots, y_p) \in \mathcal{S}_o$, $x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_p + y_p) \in \mathcal{S}_o$.
- $\forall x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathcal{S}_o$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \cdot x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_p) \in \mathcal{S}_o$.

Proposition 5.7.— Structure de $\mathcal{S}$ —. Soit (S) un système compatible de n équations linéaires à p inconnues. Soit $x^\circ = (x_1^\circ, \ldots, x_p^\circ) \in \mathbb{K}^p$ une solution particulière de (S).
Notons $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}_o$ les ensembles des solutions de (S) et du système homogène associé (S_o). Alors

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{K}^p, \quad x \in \mathcal{S} \iff x - x^\circ \in \mathcal{S}_o}$$

soit en d'autres termes $\mathcal{S} = x^\circ + \mathcal{S}_o$.

■ Systèmes de Cramer

Définition : *Un système de n équations linéaires à n inconnues possédant une unique solution est appelé un* ***système de Cramer****.*

Proposition 5.8.— Soit (S) un système de n équations à n inconnues.

(S) est de Cramer
si et seulement si
(S) est équivalent à un système triangulaire à coefficients diagonaux tous non nuls.

Théorème 5.9.— Soit (S) un système de n équations linéaires à n inconnues. Les assertions suivantes sont équivalentes :

$\Updownarrow$
- (S) possède une unique solution, c'est-à-dire (S) est de Cramer.
- (S_o) possède une unique solution.

Méthodes

Résolution des systèmes linéaires

Soit (S) un système de n équations linéaires à p inconnues :

$$(S)\quad \begin{cases} a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2+\cdots+a_{1,j}x_j+\cdots+a_{1,p}x_p=b_1 & (L_1)\\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad \vdots & \\ a_{i,1}x_1+a_{i,2}x_2+\cdots+a_{i,j}x_j+\cdots+a_{i,p}x_p=b_i & (L_i)\\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad \vdots & \\ a_{n,1}x_1+a_{n,2}x_2+\cdots+a_{n,j}x_j+\cdots+a_{n,p}x_p=b_n & (L_n)\end{cases}$$

Équivalence de systèmes d'équations linéaires

La résolution d'un système d'équations linéaires peut s'effectuer par la **méthode de substitution**. Il s'agit tout simplement de résoudre l'une des équations en l'une des inconnues : par exemple (L_n) permet d'exprimer x_p en fonction de $x_1,\ldots,x_{p-1}$. On remplace alors x_p par cette expression dans les autres équations.
En pratique, cette méthode n'est utilisée que pour des systèmes très simples, lorsque n et p sont inférieurs ou égaux à 2.

Plus généralement, on utilise des **opérations élémentaires sur les lignes** du système (**théorème 5.1**). En combinant ces opérations élémentaires, on voit qu'il est possible de remplacer une ligne L_i par une combinaison linéaire de lignes, pourvu que la ligne L_i figure dans cette combinaison.

Résolution d'un système triangulaire

Soit (S) est un système triangulaire à coefficients diagonaux non nuls :

$$(S)\quad \begin{cases} \boldsymbol{a_{1,1}}x_1+a_{1,2}x_2+\cdots+a_{1,k}x_k+\cdots+a_{1,n}x_n &=b_1\\ \qquad\qquad \boldsymbol{a_{2,2}}x_2+\cdots+a_{2,k}x_k+\cdots+a_{2,n}x_n &=b_2\\ \qquad\qquad\qquad \ddots \qquad\qquad \vdots \quad \vdots & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \boldsymbol{a_{i,i}}x_i+\cdots+a_{i,n}x_n &=b_i\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ddots \quad \vdots \quad \vdots & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \boldsymbol{a_{n,n}}x_n &=b_n\end{cases}$$

On sait, d'après le **théorème 5.2** qu'il admet une solution unique.

> ❑ **Méthode 5.1.— Comment résoudre un système triangulaire**
> Pour résoudre un système triangulaire, on procède par remontée :
> [1] Résoudre la dernière équation, $x_n=\frac{b_n}{a_{n,n}}$
> [2] Remonter à l'avant-dernière en substituant à x_n sa valeur. Ainsi, l'avant-dernière équation est une équation du premier degré en x_{n-1} que l'on résout
> [3] Remonter à la $(n-2)^{\text{ième}}$ équation en substituant aux inconnues x_n et x_{n-1} les valeurs obtenues, etc...

Résolution d'un système échelonné

Soit (S) un système échelonné de n équations à p inconnues de rang r, avec $0 \leqslant r \leqslant \min(n,p)$:

$$(S)\quad \begin{cases} \boldsymbol{a_{1,1}}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,r}x_r + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 & (L_1) \\ \boldsymbol{a_{2,2}}x_2 + \cdots + a_{2,r}x_r + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 & (L_2) \\ \ddots \qquad \vdots \qquad \vdots & \\ \boldsymbol{a_{r,r}}x_r + \cdots + a_{r,p}x_p = b_r & (L_r) \\ 0 = b_{r+1} & (L_{r+1}) \\ \vdots \qquad \vdots & \\ 0 = b_n & (L_n) \end{cases}$$

Méthode 5.2.— Comment résoudre un système échelonné

Dans le **théorème 5.3**, les rôles des équations principales $(L_1), \ldots, (L_r)$ et des équations auxiliaires (ou de compatibilité) $(L_{r+1}), \ldots, (L_n)$ sont bien distincts.

- S'il y a (au moins) une équation auxiliaire non compatible le système n'a pas de solutions : $\mathcal{S} = \emptyset$.
- Si toutes les équations auxiliaires sont satisfaites, le système est compatible. Deux cas se donnent :
  - **Le système est de rang maximal p.**
    En ce cas, il n'y a pas de variables auxiliaires. Le système est équivalent à un système triangulaire $p \times p$ à coefficients diagonaux non nuls. Par conséquent, on résout par remontée et on obtient une unique solution.
  - **Le système est de rang strictement inférieur à p.**
    En ce cas, il y a $p-r$ variables auxiliaires. L'ensemble des solutions est infini et paramétré par ces $p-r$ variables libres. On les *passe* au second membre et on résout en fonction de ces paramètres le système triangulaire $r \times r$ à coefficients diagonaux non nuls par remontée.

Exemple : résolvons dans $\mathbb{R}^4 = \{(x,y,z,w)\}$ les systèmes échelonnés suivants :

$$(S_1)\begin{cases} 2x + y - 2z + 3w = 1 \\ 7y + 4z - 5w = 6 \\ 0 = -8. \end{cases} \quad (S_2)\begin{cases} 2x + y - 2z + 3w = 1 \\ 7y + 4z - 5w = 6 \\ 2z + w = 3 \\ w = 1 \end{cases} \quad (S_3)\begin{cases} 2x + y - 2z + 3w = 1 \\ 7y + 4z - 5w = 6 \\ 2z + w = 3 \end{cases}$$

1. (S_1) admet une équation auxiliaire incompatible. Par conséquent, $\mathcal{S}_1 = \emptyset$.
2. (S_2) est triangulaire à coefficients diagonaux tous non nuls, il admet une unique solution obtenue par remontée $\mathcal{S}_2 = \left\{\left(-\frac{1}{2}, 1, 1, 1\right)\right\}$.
3. (S_3) est un système échelonné de rang 3. Il n'y a pas d'équation auxiliaire donc il est compatible. Il y a une variable libre, w. On la passe au second membre et on résout par remontée :

$$\begin{cases} \mathbf{2}x + y - 2z + 3w = 1 \\ \mathbf{7}y + 4z - 5w = 6 \\ \mathbf{2}z + w = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 - \frac{5}{2}w \\ y = w \\ z = \frac{3}{2} - \frac{w}{2} \end{cases}$$

Ainsi $\mathcal{S}_3 = \left\{\left(2 - \frac{5}{2}w, w, \frac{3}{2} - \frac{1}{2}w, w\right) ;\ w \in \mathbb{R}\right\}$.

L'algorithme de Gauss (pivot total)

Soit (S) un système de n équations à p inconnues, à coefficients non tous nuls.

$$(S) \quad \begin{cases} a_{1,1}\,x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 & (L_1) \\ a_{2,1}\,x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 & (L_2) \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ a_{n,1}\,x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n & (L_n) \end{cases}$$

La méthode du pivot de Gauss permet dans tous les cas de ramener la résolution du système (S) à celle d'un système échelonné (E).

❑ Méthode 5.3.— Comment échelonner un système d'équations linéaires

Pour échelonner (S) à l'aide de la méthode du pivot (total) de Gauss :

$\boxed{1}$ On commence par repérer un coefficient non nul, appelé **pivot**. Un tel pivot $(a_{i,j})$ existe par hypothèse.

$\boxed{2}$ Par échange de lignes et éventuellement permutation des inconnues, on *ramène* le pivot en première position. On a ainsi obtenu l'équivalence (avec $a_{1,1}^{(1)} \neq 0$)

$$(S) \iff \begin{cases} \mathbf{a_{1,1}^{(1)}}\,x_1 + a_{1,2}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{1,p}^{(1)}x_p = b_1^{(1)} & (L_1) \\ \boxed{\begin{array}{l} a_{2,1}^{(1)}\,x_1 + a_{2,2}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{2,p}^{(1)}x_p = b_2^{(1)} \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n,1}^{(1)}\,x_1 + a_{n,2}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{n,p}^{(1)}x_p = b_n^{(1)} \end{array}} & (S^{(1)}) \end{cases}$$

$\boxed{3}$ On échelonne le système en **éliminant** l'inconnue x_1 du système $(S^{(1)})$ au moyen d'opérations élémentaires avec la ligne du pivot. Par exemple, on peut effectuer pour $i \in [\![2, n]\!]$ l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i - \dfrac{a_{i_1}^{(1)}}{a_{1,1}^{(1)}} L_1$.

On se ramène ainsi à un système du type :

$$(S) \iff \begin{cases} \mathbf{a_{1,1}^{(1)}}\,x_1 + a_{1,2}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{1,p}^{(1)}x_p = b_1^{(1)} & (L_1) \\ \boxed{\begin{array}{r} a_{2,2}^{(2)}x_2 + \cdots + a_{2,p}^{(2)}x_p = b_2^{(2)} \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n,2}^{(2)}x_2 + \cdots + a_{n,p}^{(2)}x_p = b_n^{(2)} \end{array}} & (S^{(2)}) \end{cases}$$

$\boxed{4}$ Deux cas se présentent :

- si le système $S^{(2)}$ a tous ses coefficients nuls, le système est échelonné ;
- sinon, on applique la procédure ci-dessus, à partir de $\boxed{1}$ au système $(S^{(2)})$ et ainsi de suite ...

En pratique :

1. On n'effectue une permutation des inconnues que lorsque c'est indispensable.
2. Il peut être commode d'encadrer les pivots successifs (ils seront indiqués en gras ici).
3. On arrête l'algorithme de Gauss dès qu'apparaît une équation auxiliaire incompatible.

❑ **Méthode 5.4.— Comment résoudre un système d'équations linéaires**

Des opérations élémentaires *évidentes* sur les lignes permettent-elles de trouver un système équivalent beaucoup plus simple ? Sinon, dans tous les cas, la résolution de (S) s'effectue en deux étapes :

$\boxed{1}$ La **méthode du pivot de Gauss** (**méthode 5.3**) permet de se ramener par opérations élémentaires sur les lignes à un système échelonné, (S).

$\boxed{2}$ On résout alors (S) à l'aide de la **méthode 5.2** .

Exemple : on considère le système de 4 équations à 3 inconnues (S) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 & (L_1) \\ x + 3y + z = 11 & (L_2) \\ 2x + 5y - 4z = 13 & (L_3) \\ 4x + 11y = 37 & (L_4) \end{cases}$.

Résolvons (S) à l'aide de la méthode du pivot de Gauss.

$\boxed{1}$

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{rrr|l} x & +2y & -3z = 4 & L_1 \\ x & +3y & +z = 11 & L_2 \\ 2x & +5y & -4z = 13 & L_3 \\ 4x & +11y & = 37 & L_4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrr|l} \mathbf{1}\,x & +2y & -3z = 4 & \\ & \mathbf{1}\,y & +4z = 7 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ & y & +2z = 5 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ & 3y & +12z = 21 & L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrr|l} \mathbf{1}\,x & +2y & -3z = 4 & \\ & \mathbf{1}\,y & +4z = 7 & \\ & & \mathbf{1}\,z = 1 & L_3 \leftarrow (1/2)(L_2 - L_3) \\ & & 0 = 0 & L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2 \end{array}\right.$$

$\boxed{2}$ Ainsi, (S) est équivalent à un système échelonné compatible de rang 3. Par remontée, il vient :

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{rrr} x & +2y & -3z = 4 \\ & y & +4z = 7 \\ & & z = 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{array}\right.$$

Par conséquent, (S) admet pour unique solution le triplet $(1, 3, 1)$.

Mise en œuvre : exercice 5.1, exercice 5.3.

■ Résoudre et discuter un système d'équations linéaires à paramètres

Lorsque les paramètres apparaissent au second membre

❑ **Méthode 5.5.— Comment résoudre un système à second membre paramétré**

$\boxed{1}$ On applique à la lettre la **méthode 5.3** pour se ramener à un système échelonné.

$\boxed{2}$ Ensuite la **méthode 5.2** permet de guider la discussion.

- Si $r = n$, alors le système a une solution unique si $n = p$ ou une infinité de solutions si $n < p$. Ces solutions dépendent des valeurs des paramètres.
- Si $r < n$, il y a $n - r$ équations de compatibilités $b_{r+1} = 0, \ldots, b_n = 0$. Comme les seconds membres b_i dépendent des paramètres, il convient de discuter sur la valeur des paramètres. (S) n'a de solutions que si les relations de compatibilité sont vérifées, donc pour certaines valeurs des paramètres.

Exemple : soit $(S)\left\{\begin{array}{ll} x-3y+7z & =a \\ x+2y-3z & =b \\ 7x+4y-z & =c \end{array}\right.$, où a, b et c sont trois paramètres réels.

$\boxed{1}$ On commence par échelonner le système (S)

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{rrr|l} \mathbf{1}x & -3y & +7z=a & L_1 \\ x & +2y & -3z=b & L_2 \\ 7x & +4y & -z=c & L_3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrr|l} \mathbf{1}x & -3y & +7z=a & L_1 \\ & 5y & -10z=-a+b & L_2 \leftarrow L_2-L_1 \\ & 25y & -50z=-7a+c & L_3 \leftarrow L_3-7L_1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrr|l} \mathbf{1}x & -3y & +7z=a & L_1 \\ & \mathbf{1}y & -2z=-a/5+b/5 & L_2 \leftarrow \frac{1}{5}L_2 \\ & & 0z=-2a-5b+c & L_3 \leftarrow L_3-5L_2 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrr|l} \mathbf{1}x & & +z=2a/5+3b/5 & L_1 \leftarrow L_1+3L_2 \\ & \mathbf{1}y & -2z=-a/5+b/5 & L_2 \\ & & 0z=-2a-5b+c & L_3 \end{array}\right.$$

$\boxed{2}$ D'où la discussion suivante :

- Si $-2a-5b+c \neq 0$, le système (de rang $r=2<n=3$) n'a pas de solution.
- Si $-2a-5b+c=0$, le système (toujours de rang $r=2$) a une infinité de solutions. La variable z devient une inconnue auxiliaire. L'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S}=\left\{\left(-z+\tfrac{2}{5}a+\tfrac{3}{5}b, 2z-\tfrac{1}{5}a+\tfrac{1}{5}b, z\right),\ z\in\mathbb{R}\right\}.$$

Mise en œuvre : exercice 5.4.

Lorsque les paramètres apparaissent au premier membre

Dans ce cas, il y a parfois des situations où l'on ne peut être certain de la non nullité des coefficients. Nous serons donc contraints de discuter plusieurs cas. La bonne méthode c'est de retarder au maximum cette discussion.

> ❑ **Méthode 5.6.— Comment résoudre un système à coefficients paramétrés**
>
> $\boxed{1}$ Par opérations élémentaires sur les lignes du système, on triangularise le système. À la différence du pivot de Gauss, il se peut que les coefficients de la diagonale principale s'annulent pour certaines valeurs du (des) paramètre(s).
>
> $\boxed{2}$ On distingue plusieurs cas pour les valeurs des paramètres suivant qu'elles annulent, ou pas, les coefficients de la diagonale principale.

Exemple : résolvons le système homogène $(S_m)\left\{\begin{array}{rcl} (1-m)x+2y-z & = & 0 \\ -2x-(3+m)y+3z & = & 0 \\ x+y-(2+m)z & = & 0 \end{array}\right.$.

$\boxed{1}$ On triangularise le système.

$$(S_m) \iff \left\{\begin{array}{rrrl|l} (1-m)x & +2y & -z & =0 & L_1 \\ -2x & -(3+m)y & +3z & =0 & L_2 \\ x & +y & -(2+m)z & =0 & L_3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrl|l} x & +y & -(2+m)z & =0 & L_1 \leftrightarrow L_3 \\ -2x & -(3+m)y & +3z & =0 & L_2 \\ (1-m)x & +2y & -z & =0 & L_1 \leftrightarrow L_1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrl|l} x & +y & -(2+m)z & =0 & L_1 \\ & -(1+m)y & -(1+2m)z & =0 & L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ & (1+m)y & +(1-m-m^2)z & =0 & L_3 \leftarrow L_3 + (m-1)L_1 \end{array}\right.$$

$$(S_m) \iff \left\{\begin{array}{rrrl|l} x & +y & -(2+m)z & =0 & L_1 \\ & -(1+m)y & -(1+2m)z & =0 & L_2 \\ & & -(m^2+3m)z & =0 & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array}\right.$$

$\boxed{2}$ Ce dernier système est triangulaire, il est temps de rentrer dans la discussion.

▸ Si $m+1 \neq 0$, c'est-à-dire si $m \neq -1$, on fait les opérations : $L_2 \leftarrow \dfrac{1}{-1-m} L_2$ et $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$, ce qui donne :

$$(S_m) \iff \left\{\begin{array}{rrrl} x & & -(3+5m+m^2)/(1+m)z & =0 \\ & y & +(1+2m)/(1+m)z & =0 \\ & & -(3m+m^2)z & =0 \end{array}\right.$$

▸ Si $m \in \{-3, 0\}$, la dernière équation disparaît et (S_m) est de rang 2. Notons $\mathcal{S}_m$ l'ensemble des solutions de (S_m). On a alors :

$$\mathcal{S}_m = \left\{\left(\frac{3+5m+m^2}{1+m}z, \frac{-1-2m}{1+m}z, z\right),\ z \in \mathbb{R}\right\}.$$

▸ Si $m \notin \{-3, -1, 0\}$, (S_m) est de rang 3, il n'y a plus d'inconnue auxiliaire et la dernière équation donne $z = 0$. Puis, en remontant, on a $y = 0$ et $x = 0$.

$$\mathcal{S}_m = \{(0,0,0)\}.$$

▸ Finalement, si $m = -1$, on a :

$$(S_{-1}) \iff \left\{\begin{array}{rrrl} x & +y & -z & =0 \\ & & z & =0 \\ & & 2z & =0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrl} x & +y & -z & =0 \\ & & z & =0 \\ & & 0 & =0 \end{array}\right.$$

Ce système est échelonné et de rang 2. On a $z = 0$ et $x = -y$ ce qui donne :

$$\mathcal{S}_{-1} = \{(-y, y, 0),\ y \in \mathbb{R}\}.$$

On a encore une infinité de solutions.

Mise en œuvre : exercice 5.5, exercice 5.6.

■ Intersections en géométrie du plan et de l'espace

Cette partie est essentiellement basée sur des souvenirs de Terminale, mis au service de la résolution de systèmes linéaires.

• Dans le plan, une droite $\mathcal{D}$ passant par $M_0(x_0, y_0)$ et de vecteur directeur (non nul) $\vec{u}(\alpha, \beta)$ est l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que : $\exists t \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{u}$, que l'on peut écrire aussi : $M = M_0 + t\vec{u}$.

• Dans l'espace, une droite $\mathcal{D}$ passant par $M_0(x_0, y_0, z_0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ est l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que : $\exists\, t \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{u}$, que l'on peut écrire aussi : $M = M_0 + t\vec{u}$.

• Dans l'espace, un plan $\mathcal{P}$ passant par $M_0(x_0, y_0, z_0)$ et de couple de vecteurs directeurs (non colinéaires) $\vec{u}_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), \vec{u}_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ est l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que $\exists(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{M_0M} = t_1\vec{u}_1 + t_2\vec{u}_2$.

En traduisant ces égalités vectorielles en coordonnées, on obtient les

Systèmes d'équations paramétriques

d'une droite du plan	d'une droite de l'espace	d'un plan de l'espace
$\begin{cases} x = x_0 + \alpha\, t \\ y = y_0 + \beta\, t \end{cases}$	$\begin{cases} x = x_0 + \alpha\, t \\ y = y_0 + \beta\, t \\ z = z_0 + \gamma\, t \end{cases}$	$\begin{cases} x = x_0 + t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2 \\ y = y_0 + t_1\beta_1 + t_2\beta_2 \\ z = z_0 + t_1\gamma_1 + t_2\gamma_2 \end{cases}$

❑ **Méthode 5.7.— Comment passer des équations paramétriques aux cartésiennes**

Qu'il s'agisse d'une droite du plan ou de l'espace, ou bien d'un plan de l'espace, la méthode générale est la même :

1 On considère le(s) paramètre(s) t (ou t_1, t_2) comme inconnue(s) du système d'équations paramétriques.

2 On échelonne le système d'inconnue(s) t (ou t_1, t_2) à l'aide de la **méthode 5.3**.

▸ Pour une droite du plan, comme le vecteur directeur est non nul, le système est de rang 1, il admet donc une équation de compatibilité : c'est l'équation cartésienne de $\mathcal{D}$!

▸ Pour une droite de l'espace, comme le vecteur directeur est non nul, le système est de rang 1, il admet donc deux équations de compatibilité : c'est le système d'équations cartésiennes de $\mathcal{D}$!

▸ Pour un plan de l'espace, comme les vecteurs directeurs sont non colinéaires, le système est de rang 2, il admet donc une équation de compatibilité : c'est l'équation cartésienne de $\mathcal{P}$!

Exemple : on considère dans l'espace les trois points : $A(-1,\ 2,\ 1), B(1,\ -6,\ -1), C(2,\ 2,\ 2)$. Vérifions d'abord que les points A, B et C définissent un plan $\mathcal{P}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}(2, -8, -2)$ et $\overrightarrow{AC}(3, 0, 1)$ ne sont pas colinéaires car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles. Les points A, B, C n'étant pas alignés, définissent bien un plan $\mathcal{P}$. Un repère de $\mathcal{P}$ est $\left(A,\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$, et par conséquent un point $M(x, y, z)$ appartient à $\mathcal{P}$ si et seulement s'il existe des réels t_1 et t_2 tels que $\overrightarrow{AM} = t_1\overrightarrow{AB} + t_2\overrightarrow{AC}$.

$\boxed{1}$ $\mathcal{P}$ a donc pour système d'équations paramétriques (S) $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & -1+2t_1+3t_2 \\ y & = & 2-8t_1 \\ z & = & 1-2t_1+t_2 \end{array}\right.$.

$\boxed{2}$ On échelonne ce système d'inconnues t_1 et t_2 par la méthode du **pivot de Gauss**. Il vient

$$\left\{\begin{array}{rcrcl|l} 2t_1 & + & 3t_2 & = & x+1 & (L_1) \\ 8t_1 & & & = & 2-y & (L_2) \\ 2t_1 & - & t_2 & = & 1-z & (L_3) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcl|l} \mathbf{8}t_1 & & & = & 2-y & L_1 \leftarrow L_2 \\ & & 12t_2 & = & 4x+y+2 & L_2 \leftarrow 4L_1 - L_2 \\ & & 4t_2 & = & -2-y+4z & L_3 \leftarrow L_2 - 4L_3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcl|l} \mathbf{8}t_1 & & & = & 2-y & \\ & & \mathbf{12}t_2 & = & 4x+y+2 & \\ & & 0 & = & 4x+4y-12z+8 & L_3 \leftarrow L_2 - 3L_3 \end{array}\right.$$

Ce système n'est compatible que si $x+y-3z+2=0$, c'est une équation du plan $\mathcal{P}$.

> ❑ **Méthode 5.8.— Comment déterminer l'intersection de plans dans l'espace**
> Supposons connues des équations cartésiennes de deux plans. Un point $M(x,y,z)$ appartient à l'intersection de ces plans si et seulement si ses coordonnées vérifient le système linéaire formé des deux équations cartésiennes. On échelonne ce système.
> - S'il est de rang 2, l'intersection est une droite (on dit que les deux plans sont sécants).
> - Sinon, (les plans sont parallèles) l'intersection est vide ou le plan commun.

Exemple : on sait qu'une équation du plan $\mathcal{P}$ de l'exemple précédent est $x+y-3z+2=0$. Soit le plan Π d'équation $x-3y+z-4=0$. Les plans Π et $\mathcal{P}$ sont-ils sécants ?
On échelonne le système (S) $\left\{\begin{array}{l} x+y-3z+2=0 \\ x-3y+z-4=0 \end{array}\right.$. On obtient $(S) \iff \left\{\begin{array}{r} x+y-3z+2=0 \\ 4y-4z+6=0 \end{array}\right.$.
Le système est de rang 2. $\Pi \cap \mathcal{P}$ est une droite, notée $\mathcal{D}$. Il y a une variable libre, z. On la passe au second membre et on résout par remontée.

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2z-\frac{1}{2} \\ y & = & z-\frac{3}{2} \end{array}\right.$$

On remarque que le point $A(\frac{1}{2},-1,\frac{1}{2}) \in \mathcal{D}$ et que le vecteur $\vec{u}(2,1,1)$ dirige $\mathcal{D}$.

> ❑ **Méthode 5.9.— Comment déterminer l'intersection d'une droite et d'un plan**
> Supposons connues un système d'équations cartésiennes d'une droite $\mathcal{D}$ et une équation d'un plan $\mathcal{P}$. $M(x,y,z)$ appartient à $\mathcal{P} \cap \mathcal{D}$ si et seulement si ses coordonnées vérifient le système linéaire formé des trois équations. On échelonne ce système à l'aide de la **méthode 5.3** :
> - S'il est de rang 3, l'intersection est un point.
> - Sinon, l'intersection est l'ensemble vide ou la droite $\mathcal{D}$.

Mise en œuvre : exercice 5.10.

Vrai/Faux

	Vrai	Faux
1. Soit p et n deux entiers non nuls. Un système linéaire de n équations à p inconnues admet au moins une solution dans le cas où $p > n$.	☐	☐
2. Soit p et n deux entiers non nuls. Un système linéaire de n équations à p inconnues admet une et une seule solution si et seulement si $p = n$.	☐	☐
3. Si on résout un système linéaire en utilisant des opérations élémentaires, ce sera uniquement sur les lignes.	☐	☐
4. Un système de trois équations à trois inconnues n'a jamais une infinité de solutions.	☐	☐
5. Soient n et p deux entiers non nuls. Un système linéaire de n équations à p inconnues admet au moins une solution si $p < n$.	☐	☐
6. On ne change pas un système en remplaçant une de ses lignes par une combinaison des autres.	☐	☐
7. Dans l'espace, l'intersection d'une droite et d'un plan est caractérisée par un système linéaire de trois équations à trois inconnues de rang toujours 3.	☐	☐

Énoncé des exercices

Systèmes linéaires sans paramètre

Exercice 5.1 : Résoudre dans $\mathbb{R}^3$: $\left\{\begin{array}{rrrcr} & 2y & -z & = & 1 \\ -2x & -4y & +3z & = & -1 \\ x & +y & -3z & = & -6 \end{array}\right.$.

Exercice 5.2 : Résoudre dans $\mathbb{R}^3$: $\left\{\begin{array}{rrrl} 2x & -3y & & = 7 \\ 4x & -5y & +z & = 13 \\ 2x & & +4z & = 0 \end{array}\right.$.

Exercice 5.3 : Résoudre dans $\mathbb{R}^3$: $\left\{\begin{array}{rcl} x+z & = & 1 \\ y+z & = & 0 \\ x+y & = & 1 \\ 2x+3y & = & 0 \end{array}\right.$.

Systèmes linéaires avec paramètres

Exercice 5.4 : Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. On note (S) $\left\{\begin{array}{rrrl} x & +2y & -z & = a \\ -2x & -3y & +3z & = b \\ x & +y & -2z & = c \end{array}\right.$.

1. À quelle condition portant sur a, b et c le système (S) admet-il des solutions ?
2. Résoudre (S) dans $\mathbb{R}^3$, lorsque $(a,b,c) = (0,0,1)$ puis $(a,b,c) = (1,-2,1)$.

Exercice 5.5* : Discuter le nombre de solutions du système $\left\{\begin{array}{rcl} mx+y & = & 1 \\ x+my & = & 1 \end{array}\right.$ en fonction du paramètre m.

Exercice 5.6* : Résoudre suivant la valeur du réel m : $\left\{\begin{array}{rrrcl} (2+m)x & +2y & -z & = & 0 \\ 2x & +(m-1)y & +2z & = & 0 \\ -x & +2y & +(2+m)z & = & 0 \end{array}\right.$.

Exercice 5.7* : Résoudre en fonction de $m \in \mathbb{R}$: $\left\{\begin{array}{rrrrcl} x & +my & +m^2z & +m^3t & = & 1 \\ mx & +m^2y & +m^3z & +t & = & 1 \\ m^2x & +m^3y & +z & +mt & = & 1 \\ m^3x & +y & +mz & +m^2t & = & 1 \end{array}\right.$.

Intersection en géométrie

Exercice 5.8 : L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On considère les plans affines $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ d'équations cartésiennes respectives

$$\begin{array}{rcl} x-y-z & = & 1 \\ 3x-y+z & = & 5 \end{array}$$

1. Montrer que ces plans sont sécants.
2. Déterminer un point et un vecteur directeur de leur droite d'intersection.

Exercice 5.9 : L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On considère les plans affines $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ d'équations cartésiennes respectives

$$\begin{array}{rcl} 3x + y - z & = & 1 \\ 6x + 2y + z & = & 2 \\ x + 3y + 4z & = & 1 \end{array}$$

Montrer qu'il existe un unique point A commun à ces trois plans. Déterminer les coordonnées de A.

Exercice 5.10* : L'espace est rapporté à $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Discuter, suivant les valeurs du paramètre réel $m \in \mathbb{R}$, l'intersection de la droite $\mathcal{D}$ d'équation $\left\{ \begin{array}{rrrcl} mx & +2y & +3z & = & 3 \\ (m-1)x & +my & +z & = & 1 \end{array} \right.$ et du plan $\mathcal{P}$ d'équation $(m+1)x + my + (m-1)z = m - 1$.

Indications

Ex. 5.4

1. *Par opérations élémentaires sur les lignes, on transforme le système en système triangulaire supérieur et on détermine une relation de compatibilité.*

Ex. 5.5

On résout le système avec nos opérations sur les lignes et ensuite, on discute l'ensemble des solutions.

Corrigé des vrai/faux

1	2	3	4	5	6	7
F	F	V	F	F	F	F

1. C'est faux. Considérer par exemple le système :

$$\begin{cases} x+y+z &= 1 \\ x+y+z &= 2014 \end{cases}.$$

C'est un système de $n=2$ équations à $p=3$ inconnues et n'a pas de solution !

2. C'est encore faux. On peut très bien avoir encore aucune solution. Prendre par exemple $\begin{cases} x+y+z &= 1 \\ x+y+z &= 2014 \\ x+y+z &= 1 \end{cases}$ qui vérifie $n=p=3$ et qui n'a pas de solution.

3. En effet, si l'on fait des opérations élémentaires sur les colonnes, on modifie les inconnues.

4. Bien sûr que si. Prendre par exemple :

$$\begin{cases} x+y+z &= 1 \\ x+y+z &= 1 \\ x+y+z &= 1 \end{cases}$$

qui a une infinité de solutions.

5. Encore une fois, il faut se méfier. Prendre par exemple :

$$\begin{cases} x+y &= 1 \\ x+y &= 1 \\ x+y &= 2014 \end{cases}$$

qui a 2 inconnues et trois équations et n'a pas de solutions.

6. On perd une information en faisant cela !

7. Si la droite est incluse dans le plan, le rang est 2 et non 3.

Erreurs classiques

- Croire que le cas $n=p$ est une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système possède une et une seule solution.
- Se lancer dans des opérations sur les colonnes (bien que parfois cela soit tentant !). On obtient un système qui n'est plus du tout équivalent.
- Faire des opérations sur les lignes qui ne soient pas autorisées. Ainsi $L_i \leftarrow aL_j + bL_k$, avec i différent à la fois de j et k, n'est pas permise.
- Croire que l'intersection d'une droite et d'un plan est toujours un point. Il y a aussi les cas où la droite est parallèle au plan.

Corrigé des exercices

Exercice 5.1

On met en œuvre la **méthode 5.3**. On commence par faire $L_1 \leftrightarrow L_3$ ce qui permet d'avoir 1 comme pivot.

Retenir que l'on peut faire dès le début des permutations de lignes pour avoir le pivot le plus adéquat possible.

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{rrr|l} & 2y & -z = 1 & L_1 \\ -2x & -4y & +3z = -1 & L_2 \\ x & +y & -3z = -6 & L_3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrr|l} x & +y & -3z = -6 & L_1 \leftrightarrow L_3 \\ -2x & -4y & +3z = -1 & L_2 \\ & 2y & -z = 1 & L_3 \leftrightarrow L_1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrr|l} x & +y & -3z = -6 & L_1 \\ & -2y & -3z = -13 & L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ & 2y & -z = 1 & L_3 \end{array}\right.$$

Ce système est échelonné de rang maximal 3. On achève la résolution par remontée.

$$\iff \left\{\begin{array}{rrr|l} \mathbf{1}x & +y & -3z = -6 & L_1 \\ & \mathbf{-2}y & -3z = -13 & L_2 \\ & & \mathbf{-4}z = -12 & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrr} x & & = 1 \\ & y & = 2 \\ & & z = 3 \end{array}\right.$$

Finalement $S = \{(1, 2, 3)\}$. ▲

Exercice 5.2

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{rrr|l} \mathbf{2}x & -3y & = 7 & L_1 \\ 4x & -5y & +z = 13 & L_2 \\ 2x & & 4z = 0 & L_3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrr|l} \mathbf{2}x & -3y & = 7 & L_1 \\ & \mathbf{1}y & +z = -1 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ & 3y & +4z = -7 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrr|l} \mathbf{2}x & -3y & = 7 & L_1 \\ & \mathbf{1}y & +z = -1 & L_2 \\ & & \mathbf{1}z = -4 & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \end{array}\right.$$

Ce système est échelonné de rang maximal 3. On achève la résolution par remontée.

$$\iff \left\{\begin{array}{rrr} x & & = 8 \\ & y & = 3 \\ & & z = -4 \end{array}\right.$$

Finalement $S = \{(8, 3, -4)\}$. ▲

Exercice 5.3

On part du système :

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{rrr|l} x & & +z = 1 & L_1 \\ & y & +z = 0 & L_2 \\ x & +y & = 1 & L_3 \\ 2x & +3y & = 0 & L_4 \end{array}\right.$$

On fait par exemple, successivement :

- $L_3 \leftarrow L_3 - L_1, L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1, L_3 \leftarrow L_3 - L_2,$
- $L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2, L_3 \leftarrow -\frac{1}{2}L_3, L_4 \leftarrow L_4 + 5L_3.$

Il est inutile ici d'aboutir à un système échelonné réduit par lignes, pour conclure.

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{rrr} \mathbf{1}x & & +z = 1 \\ & \mathbf{1}y & +z = 0 \\ & & \mathbf{1}z = 0 \\ & & 0z = -2 \end{array}\right.$$

Le système est impossible. ▲

Exercice 5.4

1. On commence par échelonner le système proposé, afin de «lire» les conditions de compatibilité.

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{rrr|l} \mathbf{1}x & +2y & -z = a & L_1 \\ -2x & -3y & +3z = b & L_2 \\ x & +y & -2z = c & L_3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrr|l} \mathbf{1}x & +2y & -z = a & L_1 \\ & \mathbf{1}y & +z = 2a + b & L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ & -y & -z = -a + b & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrr} \mathbf{1}x & +2y & -z = a \\ & \mathbf{1}y & +z = 2a + b \\ & & 0z = a + b + c \end{array}\right.$$

Ce système est échelonné de rang $2 < 3$. Il y a une équation de compatibilité. Le système aura des solutions si et seulement si cette équation est satisfaite.

Le système est compatible si et seulement si $a + b + c = 0$.

2. On continue à résoudre (S) pour les valeurs proposées. Il est clair que si $(a, b, c) = (0, 0, 1)$, le système n'a pas de solution. Supposons que $(a, b, c) = (1, -2, 1)$. Le système s'écrit : $\left\{\begin{array}{rrr} \mathbf{1}x & +2y & -z = 1 \\ & \mathbf{1}y & +z = 0 \end{array}\right.$. Il y a une variable libre, z : on la passe au second membre et on résout par remontée.

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{rrr} \mathbf{1}x & +2y = 1 + z \\ & \mathbf{1}y = \quad -z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrr} \mathbf{1}x & = 1 + 3z \\ & \mathbf{1}y = \quad -z \end{array}\right.$$

Il reste pour ensemble de solutions les triplets $(1 + 3z, -z, z)$, où $z \in \mathbb{R}$. ▲

Corrigé

Exercice 5.5

$\boxed{1}$ On commence par triangulariser le système, conformément à la **méthode 5.6**.

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{rr} mx & +y = 1 \\ x & +my = 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rr} \mathbf{1}x & +my = 1 \\ mx & +y = 1 \end{array}\right|$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rr} \mathbf{1}x & +my = 1 \\ & (1-m^2)y = 1-m \end{array}\right.$$

$\boxed{2}$ Discutons !

- Si $m \notin \{-1;1\}$, le système est de rang maximal 2. Il est donc de Cramer et admet donc une unique solution.
- Si $m = 1$, $(S) \iff \left\{\begin{array}{rr} \mathbf{1}x & +my = 1 \\ & 0 = 0 \end{array}\right.$. Le système est de rang $1 < 2$. Il y a une équation auxiliaire qui est satisfaite. Par conséquent, il possède une infinité de solutions.
- Si $m = -1$, $(S) \iff \left\{\begin{array}{rr} \mathbf{1}x & +my = 1 \\ & 0 = 2 \end{array}\right.$. Le système est de rang $1 < 2$. Il y a une équation auxiliaire qui n'est pas satisfaite, le système est donc incompatible et ne possède aucune solution. ▲

Exercice 5.6

$\boxed{1}$ Triangularisons ce système homogène au moyen d'opérations élémentaires sur les lignes.

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{rrrcl} (2+m)x & +2y & -z & = & 0 \\ 2x & +(m-1)y & +2z & = & 0 \\ -x & +2y & +(2+m)z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrcl} -x & +2y & +(2+m)z & = & 0 \\ 2x & +(m-1)y & +2z & = & 0 \\ (2+m)x & +2y & -z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrcl} -x & +2y & +(2+m)z & = & 0 \\ & (m+3)y & +(2m+6)z & = & 0 \\ & (2m+6)y & +(m^2+4m+3)z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrcl} -x & +2y & +(2+m)z & = & 0 \\ & (m+3)y & +(2m+6)z & = & 0 \\ & & (m^2-9)z & = & 0 \end{array}\right.$$

$\boxed{2}$ À présent, discutons suivant les valeurs de m.

- Si $m \notin \{-3;3\}$, le système est de rang maximal 3. Il est donc de Cramer et admet donc une unique solution. Comme il s'agit d'un système homogène, celle-ci ne peut être que $(0,0,0)$.
- Si $m = 3$, le système est de rang 2. Il admet une infinité de solutions, paramétrée par la variable libre z. On la passe au second membre et on résout par remontée :

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{rrrcl} -x & +2y & +5z & = & 0 \\ & 6y & +12z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} -x & +2y & = & -5z \\ & y & = & -2z \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & z \\ y & = & -2z \end{array}\right.$$

Ainsi $SS_3 = \{(z, -2z, z) \;\; z \in \mathbb{R}\}$.

▸ Si $m = -3$, le système est de rang 1 : $(S) \iff -1x+2y-z = 0$. Il y a donc 2 variables libres, y et z. On les passe au second membre $(S) \iff x = 2y - z$. Ainsi $\mathcal{S}_{-3} = \{(2y - z, y, z) \;\; (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$. ▲

Ici, il n'y a plus rien à faire !

Exercice 5.7

$\boxed{1}$ Triangularisons le système

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{rrrrcl|l} \mathbf{1}x & +my & +m^2z & +m^3t & = & 1 & L_1 \\ mx & +m^2y & +m^3z & +t & = & 1 & L_2 \\ m^2x & +m^3y & +z & +mt & = & 1 & L_3 \\ m^3x & +y & +mz & +m^2t & = & 1 & L_4 \end{array}\right.$$

On effectue les opérations élémentaires suivantes : $L_2 \leftarrow L_2 - mL_1, L_3 \leftarrow L_3 - m^2L_1, L_4 \leftarrow L_4 - m^3L_1$. Puis $L_2 \leftrightarrow L_4$ pour obtenir :

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{rrrrcl} \mathbf{1}x & +my & +m^2z & +m^3t & = & 1 \\ & (1-m^4)y & +(m-m^5)z & +(m^2-m^6)t & = & 1-m^3 \\ & & (1-m^4)z & +(m-m^5)t & = & 1-m^2 \\ & & & (1-m^4)t & = & 1-m \end{array}\right.$$

$\boxed{2}$ Discutons suivant les valeurs du paramètre réel m.

▸ Si $m^4 - 1 \neq 0$, on divise L_2, L_3 et L_4 par $1 - m^4$. On obtient :

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{rrrrcl} \mathbf{1}x & +my & +m^2z & +m^3t & = & 1 \\ & \mathbf{1}y & +mz & +m^2t & = & \frac{1-m^3}{1-m^4} \\ & & \mathbf{1}z & +mt & = & \frac{1-m^2}{1-m^4} \\ & & & \mathbf{1}t & = & \frac{1-m}{1-m^4} \end{array}\right.$$

Le système est de rang maximal 4. Il est donc de Cramer et possède comme tel une unique solution (x, y, z, t). On a immédiatement $t = 1/(m^3 + m^2 + m + 1) = 1/\left[(m^2+1)(m+1)\right]$. On remonte « en cascade » et on obtient : $x = y = z = t = 1/\left[(m^2+1)(m+1)\right]$.

Avec l'identité géométrique.

▸ Si $m = 1$, le système est de rang 1 mais a ses 3 équations auxiliaires satisfaites :

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{rrrrcl} \mathbf{1}x & +y & +z & +t & = & 1 \\ & & & 0 & = & 0 \\ & & & 0 & = & 0 \\ & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \iff x + y + z + t = 1$$

Nous avons une infinité de solutions : tous les 4 - uplets s'écrivant sous la forme $(1 - y - z - t, y, z, t)$, avec $(y, z, t) \in \mathbb{R}^3$.

► Si $m = -1$, le système est de rang 1 mais il y a des équations auxiliaires impossibles :

$$(S) \iff \left\{ \begin{array}{rrrrcl} \mathbf{1}x & -y & +z & -t & = & 1 \\ & & & 0 & = & 2 \\ & & & 0 & = & 0 \\ & & & 0 & = & 2 \end{array} \right.$$

Par conséquent, le système n'a pas de solutions en ce cas. ▲

Exercice 5.8

1. Il suffit de résoudre le système $(S) \left\{ \begin{array}{rrrcl} x & -y & -z & = & 1 \\ 3x & -y & +z & = & 5 \end{array} \right.$. On a :

$$\begin{aligned} (S) &\iff \left\{ \begin{array}{rrrcl} x & -y & -z & = & 1 \\ 3x & -y & +z & = & 5 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rrrcl} x & -y & -z & = & 1 \\ & 2y & +4z & = & 2 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x - y & = & 1 + z \\ y & = & 1 - 2z \end{array} \right. \end{aligned}$$

En procédant par remontée, on détermine l'ensemble des solutions de (S).

$$\mathcal{S} = \{(2 - 2z; 1 - 2z, z) \;\; z \in \mathbb{R}\}$$

Il existe une infinité de solutions, les deux plans sont sécants.

2. De plus, l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées satisfont le système (S) constituent la droite passant par le point $A(2, 1, 0)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(-2, -2, 1)$. ▲

Exercice 5.9

Résolvons le système des trois équations de plans

$$(S) \left\{ \begin{array}{rrrcl} 3x & +y & -z & = & 1 \\ 6x & +2y & +z & = & 2 \\ x & +3y & +4z & = & 1 \end{array} \right.$$

On a :

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{rrrcr} x & +3y & +4z & = & 1 \\ 3x & +y & -z & = & 1 \\ 6x & +2y & +z & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrcr} x & +3y & +4z & = & 1 \\ & -8y & -13z & = & -2 \\ & -16y & -23z & = & -4 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrcr} x & +3y & +4z & = & 1 \\ & -8y & -13z & = & -2 \\ & & 3z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrcr} x & & & = & \frac{1}{4} \\ & y & & = & \frac{1}{4} \\ & & z & = & 0 \end{array}\right.$$

Les plans $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ ont pour seul point commun le point $A(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0)$. ▲

Exercice 5.10

Partons de (S) : $\left\{\begin{array}{rrrcr} mx & +2y & +3z & = & 3 \\ (m-1)x & +my & +z & = & 1 \\ (m+1)x & +my & +(m-1)z & = & m-1 \end{array}\right.$

On remarque d'abord que le système définissant la droite $\mathcal{D}$ est composée de deux relations indépendantes (sinon ce serait une équation de plan).

Un point $M(x, y, z)$ appartient à l'intersection de $\mathcal{D}$ et de $\mathcal{P}$ si et seulement si (x, y, z) est une solution du système (S).

Sur (S), on effectue les opérations élémentaires suivantes :

- $L_2 \leftarrow L_2 + L_3$
- puis $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$.

On obtient le système équivalent :

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{rrrcr} mx & +2y & +3z & = & 3 \\ & (-4+2m)y & +(-6+m)z & = & -6+m \\ (m+1)x & +my & +(m-1)z & = & m-1 \end{array}\right.$$

▸ On va supposer $m \notin \{0, 2, 4\}$, ce qui va permettre de faire les opérations successives

(a) $L_3 \leftarrow L_3 - \dfrac{m+1}{m} L_1$

(b) $L_3 \leftarrow L_3 - \dfrac{m^2-2m-2}{m(-4+2m)} L_2$

(c) $L_3 \leftarrow \dfrac{2(m-2)}{m(m-4)} L_3$.

On obtient le système :

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{rrrcr} mx & +2y & +3z & = & 3 \\ & (-4+2m)y & +(-6+m)z & = & -6+m \\ & & z & = & 1 \end{array}\right.$$

Faisons maintenant par exemple, de façon successive,

(a) $L_2 \leftarrow L_2 + (6-m)L_3$

(b) $L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3$

(c) $L_2 \leftarrow \frac{1}{2m-4} L_2$

(d) $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$

(e) $L_1 \leftarrow \frac{1}{m} L_1$

Il reste :

$$(S) \iff \left\{ \begin{array}{rrrcl} \mathbf{1}x & 0 & 0 & = & 0 \\ 0 & \mathbf{1}y & 0 & = & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1}z & = & 1 \end{array} \right.$$

Le lecteur finira par le cas $m = 2$, où l'on trouve pour unique solution $A(0,0,1)$. Le plan et la droite sont donc alors encore sécants. Puis par le cas $m = 4$, où l'on retrouve la droite $\mathcal{D}$ pour intersection.

L'intersection est alors le point $A(0,0,1)$. C'est le cas où $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ sont sécants en A.

▸ Reprenons dans le cas où $m = 0$:

$$(S) \iff \left\{ \begin{array}{rrrcr} & 2y & +3z & = & 3 \\ & -4y & -6z & = & -6 \\ x & & -z & = & -1 \end{array} \right.$$

L'opération $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$ transforme L_2 en une ligne nulle. On peut prendre z pour paramètre et il reste le système :

$$(S) \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2y & = & 3 - 3z \\ -x & = & 1 - z \end{array} \right.$$

On retrouve la droite $\mathcal{D}$ dans le cas où $m = 0$. On est alors dans un cas où $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$. ▲

Chapitre 6

Techniques fondamentales pour l'étude des fonctions

UN MATHÉMATICIEN

Gustav Lejeune Dirichlet est un mathématicien allemand qui vivait dans la première moitié du XIXe siècle. Il a fourni de nombreux travaux concernant les fonctions, s'attachant toujours à une extrême rigueur dans le choix des hypothèses et la rédaction des démonstrations. C'est lui qui introduit une définition de la notion de fonction la plus générale et il donne en 1829 le premier exemple de fonction qui ne soit continue en aucun point.

Un peu d'histoire

Ce n'est qu'à la fin du XVIIe siècle que l'on se préoccupe de la notion de fonction. Le terme apparaît dans un échange de lettres entre Leibniz et Jean Bernoulli : c'était utile pour manier le calcul différentiel. Le mathématicien suisse Leonhard Euler en donne le premier une définition dans les années 1730, ce qui devenait indispensable avec l'introduction des équations différentielles, c'est-à-dire la recherche de fonctions dont on connait seulement une relation entre elle et sa fonction dérivée, voire sa dérivée seconde.

Cependant, jusqu'à ce que Gustav Dirichlet en donne une définition générale, une fonction était forcément donnée par une expression définie à l'aide de fonctions usuelles, ou la juxtaposition de telles expressions.

Objectifs

les incontournables

- Manipuler et utiliser des inégalités.
- Calculer des dérivées.
- Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction.
- Étudier les variations d'une fonction.

et plus si affinités

- Étudier une fonction pour établir une inégalité.
- Mener l'étude complète d'une fonction.

Résumé de cours

Généralités sur les fonctions réelles

Dans ce paragraphe, $\mathcal{D}$ désigne une partie de $\mathbb{R}$.

Définition : *Une partie A de $\mathbb{R}$ est* ***symétrique par rapport à 0*** *lorsque, pour tout $x \in A$, $-x \in A$.*

Définition : *Soit f une fonction de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$. On dit que*

- *f est* ***paire*** *si $\mathcal{D}$ est symétrique par rapport à 0 et $\forall x \in \mathcal{D},\ f(-x) = f(x)$.*
- *f est* ***impaire*** *si $\mathcal{D}$ est symétrique par rapport à 0 et $\forall x \in \mathcal{D},\ f(-x) = -f(x)$.*

Définition : *Soit f une fonction de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$ et $T > 0$. On dit que*

- *f est* ***T-périodique*** *lorsque $\forall x \in \mathcal{D},\ x + T \in \mathcal{D}$ et $\forall x \in \mathcal{D},\ f(x+T) = f(x)$.*

Définition : *Soit f une fonction de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$. On dit que*

- *f est* ***majorée*** *s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(x) \leqslant M$;*
- *f est* ***minorée*** *s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(x) \geqslant m$;*
- *f est* ***bornée*** *si f est à la fois majorée et minorée.*

Proposition 6.1.— Soit f une fonction de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$. Alors :

$$\boxed{f \text{ est bornée sur } \mathcal{D} \iff \exists C \geqslant 0,\ \forall x \in \mathcal{D},\ |f(x)| \leqslant C}$$

Remarque : autrement dit, f est bornée sur $\mathcal{D}$ si et seulement si la fonction $|f|$ est majorée sur $\mathcal{D}$.

Définition : *Soit f une fonction de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$. On dit que*

- *f est* ***croissante*** *sur $\mathcal{D}$ si $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D},\ x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$.*
- *f est* ***décroissante*** *sur $\mathcal{D}$ si $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D},\ x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$.*
- *f est* ***strictement croissante*** *sur $\mathcal{D}$ si $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D},\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.*
- *f est* ***strictement décroissante*** *sur $\mathcal{D}$ si $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D},\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.*

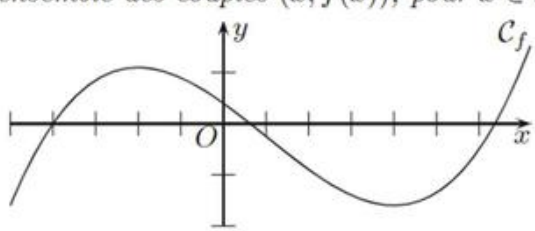
Définition : *Une fonction de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$ est dite :*

- ***monotone*** *si elle est croissante ou décroissante ;*
- ***strictement monotone*** *si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.*

Représentation graphique d'une fonction

Dans ce paragraphe, on munit le plan d'un repère orthogonal.

Définition : *Soit f une fonction de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$. On appelle* ***courbe représentative*** *de f (ou* ***graphe*** *de f) et on note $\mathcal{C}_f$ l'ensemble des couples $(x, f(x))$, pour $x \in \mathcal{D}$.*



■ Opérations sur les fonctions

Dans ce paragraphe et dans la suite, I et J désignent des intervalles de $\mathbb{R}$.

Opérations algébriques

Définition : *Deux fonctions $f, g : I \to \mathbb{R}$ sont dites* **égales**, *on note $f = g$, si $\forall x \in I,\ \ f(x) = g(x)$.*

Définition : *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $f, g : I \to \mathbb{R}$, deux fonctions, on définit :*

- *la fonction* **somme** *$f + g : I \to \mathbb{R}$ par $\forall x \in I$, $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$;*
- *la fonction* **produit** *$f \times g : I \to \mathbb{R}$ par $\forall x \in I$, $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$;*
- *la fonction $\lambda \cdot f : I \to \mathbb{R}$ par $\forall x \in I$, $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x)$.*

Remarque : lorsque f ne s'annule pas sur I, *i.e.* si pour tout $x \in I,\ \ f(x) \neq 0$, on peut définir la fonction $1/f$ qui à tout élément x de I associe l'inverse de $f(x)$.

Composition des applications

Définition : *Soit $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions. On définit :*

- *la fonction* **composée** *$g \circ f : I \to \mathbb{R}$ par $\forall x \in I,\quad (g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right)$.*

Remarque : pour que la composée $g \circ f$ soit définie, il est nécessaire que l'ensemble d'arrivée de f soit contenu dans l'ensemble de départ de g.

■ Continuité

Définition : *Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$.*

- *f est dite* **continue en** *a lorsque $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.*
- *f est dite* **continue sur** *I lorsqu'elle l'est en tout point de I.*

Théorème 6.2.— Théorème des valeurs intermédiaires —. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Pour tout couple $(a, b) \in I^2$, f atteint toute valeur intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$. Plus précisément,

> Pour tout réel k, compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe (au moins) un élément $c \in I$ tel que $f(c) = k$.

Corollaire 6.3.— Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $(a, b) \in I^2$ un couple d'éléments de I. Alors

> Pour tout réel k, compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un élément $c \in I$, unique, tel que $f(c) = k$.

Théorème 6.4.— Théorème de la bijection bicontinue —. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction **continue** et **strictement monotone** sur I. Alors :

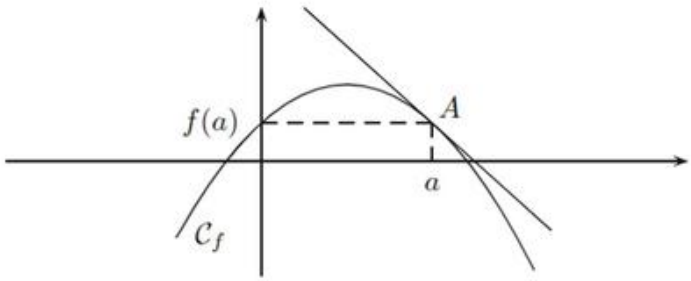
- f est une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$;
- sa fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue et strictement monotone sur J, de même monotonie que f.

■ Dérivation

Définition : *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est* ***dérivable*** *en $a \in I$ si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est finie. Dans ce cas, on note alors $f'(a)$ ce réel.*

Théorème 6.5.— Équation de la tangente en un point —. Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative. Si f est dérivable en $a \in I$, alors la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point $A\,(a, f(a))$ a pour équation :

$$\boxed{y = f(a) + f'(a)(x - a).}$$



Définition : *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est* ***dérivable sur*** *I si f est dérivable en tout point de I. On définit alors la* ***fonction dérivée*** *de f que l'on note $f' : I \to \mathbb{R}$ (ou $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$) qui à tout élément $x \in I$ associe $f'(x)$.*

Théorème 6.6.— Lien fondamental avec la continuité —. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I et $a \in I$.

$$\boxed{\textbf{Si } f \text{ est dérivable au point } a, \textbf{ alors } f \text{ est continue au point } a.}$$

Remarque : la réciproque est fausse comme le montre l'exemple de la fonction valeur absolue qui est continue sans pour autant être dérivable en 0.

Définition : *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite de* ***classe $\mathcal{C}^1$ sur I*** *lorsque :*

- *la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur I ;*
- *sa dérivée $f' : I \to \mathbb{R}$ est continue sur I.*

Théorème 6.7.— Dérivée et variations —. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.

- f est croissante sur I si et seulement si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$.
- f est décroissante sur I si et seulement si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$.
- f est constante sur I si et seulement si, pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$.
- Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I.
- Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur I.

Remarque : si f' est positive (resp. négative) sur I et ne s'annule qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante (resp. décroissante) sur I.

■ Calcul des dérivées

Théorème 6.8.— Opérations algébriques sur les dérivées —. Soit $u, v : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I, λ un réel. Alors :

- $u + v$ est dérivable sur I et $(u+v)' = u' + v'$;
- λu est dérivable sur I et $(\lambda u)' = \lambda u'$;
- uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$;
- si v ne s'annule pas sur I, $\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$.

Théorème 6.9.— Dérivée d'une composée —. Soit f une fonction dérivable sur I, g une fonction dérivable sur J, avec $f(I) \subset J$. Alors $g \circ f$ est dérivable sur I et :

$$\boxed{(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'}$$

Théorème 6.10.— Dérivée de l'application réciproque d'une bijection —. Soit f une bijection de I dans J. Si f est dérivable sur I et si f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable sur J et :

$$\boxed{\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}}$$

■ Extension aux fonctions à valeurs complexes

Parties réelle et imaginaire d'une fonction à valeurs complexes

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.
Par unicité de la notation algébrique, pour tout réel $x \in I$, $f(x)$ s'écrit de manière unique sous la forme $f(x) = u(x) + iv(x)$, où u et v sont deux fonctions réelles définies sur I.

Définition : *Les fonctions u et v sont appelées* ***parties réelle et imaginaire*** *de f.*
On note $u = \mathfrak{Re}\, f$ et $v = \mathfrak{Im}\, f$.

Continuité, dérivabilité d'une fonction à valeurs complexes

Définition : *Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes. On dit que*

- *f est* ***continue sur*** *I si ses parties réelles et imaginaires u et v le sont.*
- *f est dite* ***dérivable dans*** *I (resp. de classe $\mathcal{C}^1$) si u et v le sont. En ce cas,*

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = u'(x) + iv'(x).$$

Théorème 6.11.— Soit $\varphi : I \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On définit la fonction $f : I \to \mathbb{C}$ par $x \mapsto e^{\varphi(x)}$. Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ dans I et

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \left(e^{\varphi(x)}\right)' = \varphi'(x)e^{\varphi(x)}}$$

Méthodes

Étude de fonctions

Ensemble de définition

Méthode 6.1.— Comment déterminer l'ensemble de définition d'une fonction
Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ d'une fonction f, c'est trouver toutes les valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ existe. Pour cela, on écrit toutes les conditions (portant sur x) qui assurent l'existence de $f(x)$.
Cas particulier important : on doit très souvent déterminer l'ensemble de définition d'une fonction composée $g \circ f$. La fonction $g \circ f$ est définie en tout point x tel que :

$$x \in \mathcal{D}_f \text{ et } f(x) \in \mathcal{D}_g.$$

On détermine donc l'ensemble de définition de $g \circ f$ en trouvant tous les réels x vérifiant ces deux conditions. En pratique, on commence par déterminer $\mathcal{D}_f$, puis on recherche les éléments x de $\mathcal{D}_f$ tels que $f(x) \in \mathcal{D}_g$.

Exemple : déterminer l'ensemble de définition de la fonction définie par $f(x) = \ln(2-x)$.
La fonction $x \mapsto 2-x$ est définie sur $\mathbb{R}$ et la fonction ln est définie sur $\mathbb{R}^{+\star}$. De plus, $2-x>0$ si et seulement si $x<2$. Par composition, l'ensemble de définition de f est $]-\infty, 2[$.

Exemple : déterminer l'ensemble de définition de la fonction définie par $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.
On a ici $f(x) = \sqrt{u(x)}$, avec $u(x) = \frac{1+x}{1-x}$. La fonction u est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et la fonction racine carrée est définie sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi,

$$f(x) \text{ existe } \Leftrightarrow (x \neq 1 \text{ et } u(x) \geqslant 0).$$

Or la fonction u est positive sur $[-1,1]$ (faire un tableau de signes ou dire que le signe de u est celui du trinôme $(1+x)(1-x)$ qui est positif à l'intérieur de ses racines). Les conditions permettant de définir $f(x)$ sont donc $x \neq 1$ **et** $x \in [-1,1]$. Ainsi, l'ensemble de définition de f est $[-1,1[$.

Exemple : on pose $f(x) = \sqrt{x+3}$ et $g(x) = \dfrac{1}{x-2}$. Sans calculer $g \circ f$, déterminer $\mathcal{D}_{g\circ f}$.
La fonction f est définie sur $\mathcal{D}_f = [-3, +\infty[$ et la fonction g est définie sur $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
La fonction $g \circ f$ est alors définie en tout point x tel que $x \in \mathcal{D}_f$ et $f(x) \in \mathcal{D}_g$, c'est-à-dire :

$$x \in [-3, \infty[\quad \text{et} \quad \sqrt{x+3} \neq 2,$$

soit $x \geqslant -3$ et $x \neq 1$. Finalement, l'ensemble de définition de $g \circ f$ est $[-3,1[\cup]1,+\infty[$.

Exemple : déterminer l'ensemble de définition de la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\ln\sqrt{3x+7}}{4-x^2}$.

Dans cet exemple, f est le produit de deux fonctions dont l'une ($x \mapsto \ln\sqrt{3x+7}$) est la composée de trois fonctions. La fonction $x \mapsto 3x+7$ est définie sur $\mathbb{R}$, la racine carrée est définie sur $\mathbb{R}_+$, et ln est définie sur $\mathbb{R}^{+\star}$. Par ailleurs, $x \mapsto \frac{1}{4-x^2}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2;2\}$. On en déduit que :

$$f(x) \text{ existe } \iff \begin{cases} 3x+7 \geqslant 0 \\ \sqrt{3x+7} > 0 \\ 4-x^2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \geqslant -\frac{7}{3} \\ x > -\frac{7}{3} \\ x \notin \{-2;2\} \end{cases}$$

Par conséquent, l'ensemble de définition de f est $]-\frac{7}{3},-2[\cup]-2,2[\cup]2,+\infty[$.

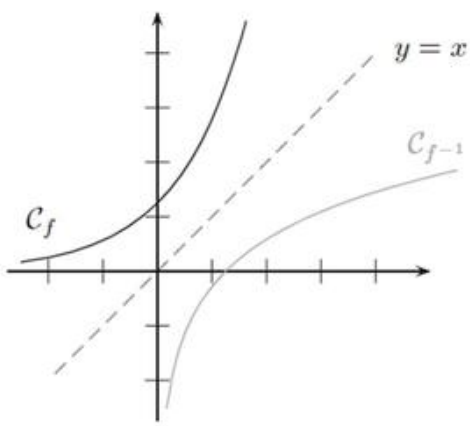
Symétries et représentation graphique d'une fonction

Certaines propriétés de la fonction ont des conséquences sur son graphe.

- Si f est paire, $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- Si f est impaire, $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine du repère.
- Si la fonction $x \mapsto f(x+a)$ est paire, $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $x = a$.
- Si la fonction $x \mapsto f(x+a) - b$ est impaire, $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport au point $\Omega\,(a,b)$.
- Si f est T-périodique, $\mathcal{C}_f$ est invariante par translation de vecteur $(T,0)$. La courbe $\mathcal{C}_f$ se déduit par translations successives du tracé de f sur une période.

Ces propriétés vont permettre de réduire l'ensemble d'étude d'une fonction (**méthode 6.2**).

- Enfin, dans un repère orthonormé, les graphes d'une bijection f et de son application réciproque f^{-1} sont symétriques par rapport à droite d'équation $y = x$ (première bissectrice).



Ensemble d'étude

❑ Méthode 6.2.— Comment réduire l'ensemble d'étude d'une fonction

Il est possible d'exploiter certaines propriétés de la fonction f afin de restreindre son ensemble d'étude.

- Lorsque f est paire ou impaire, on limite l'étude à $\mathcal{D}_f \cap \mathbb{R}_+$. Le comportement de f sur $\mathcal{D}_f \cap \mathbb{R}_-$ est obtenu par symétrie. On trace le graphe de f sur $\mathcal{D}_f \cap \mathbb{R}_+$ et on le complète par symétrie d'axe (Oy) si f est paire, par symétrie par rapport à O si f est impaire.
- Lorsque f est T-périodique, on limite l'étude à une période, généralement $\mathcal{D}_f \cap [0, T]$ ou $\mathcal{D}_f \cap [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$. On obtient le comportement de f sur $\mathcal{D}_f$ tout entier par périodicité. On trace le graphe de f sur une période, puis on le reproduit sur toutes les périodes.

On peut évidemment coupler ces deux propriétés : si f est périodique et paire (ou impaire), on limite l'étude à $\mathcal{D}_f \cap [0, \frac{T}{2}]$ et on complète ensuite par symétrie puis périodicité.

Plus rarement, on peut être amené à exploiter d'autres symétries :

- Si la fonction $x \mapsto f(x+a)$ est paire, $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = a$. On étudie f sur $\mathcal{D}_f \cap [a, +\infty[$ et on complète ensuite par symétrie.
- Si la fonction $x \mapsto f(x+a) - b$ est impaire, $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport au point $\Omega\,(a, b)$. De nouveau, on limite l'étude à $\mathcal{D}_f \cap [a, +\infty[$ puis on complète par symétrie.

Exemple : on pose $f(x) = \sin 2x + \sin x \cos 3x$. Déterminer l'ensemble d'étude de la fonction f. Les fonctions sinus et cosinus étant définies sur $\mathbb{R}$, f est définie sur $\mathbb{R}$. De plus, f est impaire puisque $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = \sin(-2x) + \sin(-x)\cos(-3x) = -\sin 2x - \sin x \cos 3x = -f(x).$$

Enfin, comme sinus et cosinus sont 2π-périodiques, f est π-périodique. En effet,

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+\pi) &= \sin(2x+2\pi) + \sin(x+\pi)\cos(3x+3\pi) = \sin 2x + \sin(x+\pi)\cos(3x+\pi)\\ &= \sin 2x + (-\sin x) \times (-\cos 3x) = \sin 2x + \sin x \cos 3x = f(x).\end{aligned}$$

En résumé, f est impaire et π-périodique : il suffit donc de l'étudier sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Tableau des variations

L'analyse du tableau de variations d'une fonction est extrêmement utile puisqu'elle permettra

- de montrer l'existence d'une solution de l'équation $f(x) = k$;
- de compter les solutions de l'équation $f(x) = k$;
- de déterminer le signe de f ;
- d'établir des inégalités ;
- de déterminer l'existence d'un extremum de la fonction f.

❑ Méthode 6.3.— Comment étudier les variations de f

Pour dresser le tableau de variations de f :

$\boxed{1}$ On vérifie la dérivabilité de f et on calcule l'expression de la dérivée $f'(x)$, pour $x \in I$.

$\boxed{2}$ On résout l'inéquation $f'(x) > 0$ pour trouver le signe de f' suivant les valeurs de x.

$\boxed{3}$ On complète le tableau ci-dessous en respectant les consignes suivantes :

$\nearrow$ indique que sur l'intervalle considéré la fonction est strictement croissante et continue ;

$\searrow$ indique que la fonction est strictement décroissante et continue sur cet intervalle.

x	
$f'(x)$	
$f(x)$	

Remarque : pour étudier le signe de la fonction f', il est parfois utile d'étudier ses propres variations, et donc de considérer la dérivée seconde de f.

Plan d'étude d'une fonction

❑ Méthode 6.4.— Comment mener l'étude d'une fonction

Pour faire l'étude d'une fonction, on suit le plan suivant :

$\boxed{1}$ Ensemble de définition de f

$\boxed{2}$ Ensemble d'étude

$\boxed{3}$ Calcul des limites de f aux bornes de l'ensemble de définition

$\boxed{4}$ Dérivabilité et calcul de la dérivée

$\boxed{5}$ Variations

$\boxed{6}$ Tracé de la courbe représentative

Exemple : faisons l'étude complète de la fonction définie par $f(x) = \cos^4 x + \sin^4 x$.

$\boxed{1}$ **Ensemble de définition :** f est définie sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de telles fonctions .

$\boxed{2}$ **Ensemble d'étude :** f est paire puisque $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à 0 et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = \cos^4(-x) + \sin^4(-x) = \cos^4 x + (-\sin x)^4 = \cos^4 x + \sin^4 x = f(x).$$

Par ailleurs, comme $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$ et $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$, f est $\frac{\pi}{2}$-périodique. En effet,

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ f(x + \frac{\pi}{2}) &= \cos^4(x + \frac{\pi}{2}) + \sin^4(x + \frac{\pi}{2}) = (-\sin x)^4 + (\cos x)^4 \\ &= \cos^4 x + \sin^4 x = f(x).\end{aligned}$$

La fonction f étant paire et $\frac{\pi}{2}$-périodique, il suffit de l'étudier sur $[0, \frac{\pi}{4}]$.

$\boxed{3}$ **Limites aux bornes de l'ensemble d'étude :** comme f est définie en 0 et $\frac{\pi}{4}$, les limites aux bornes de $[0, \frac{\pi}{4}]$ sont tout simplement les valeurs prises par la fonction en ces points. On a $f(0) = 1$ et $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$.

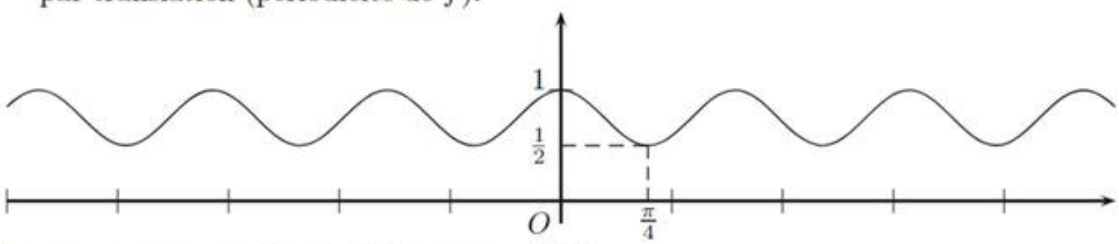
$\boxed{4}$ **Dérivabilité et calcul de la dérivée :** sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$. En tant que somme et produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$; on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -4\sin x\cos^3 x + 4\cos x\sin^3 x = 4\cos x\sin x\left[\sin^2 x - \cos^2 x\right]$$
$$= 2\sin 2x \times (-\cos 2x) = -\sin(4x).$$

$\boxed{5}$ **Variations :** il suffit d'étudier les variations de f sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ pour en déduire ses variations sur $\mathbb{R}$ tout entier. Or, pour $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$, $4x \in [0, \pi]$ et $f'(x) \leqslant 0$. On en déduit que f est décroissante sur $[0, \frac{\pi}{4}]$. Par parité, f est croissante sur $[-\frac{\pi}{4}, 0]$ et f admet donc un maximum en 0, égal à 1.

$\boxed{6}$ **Courbe représentative de f :** on commence par tracer le graphe de f sur $[0, \frac{\pi}{4}]$, puis :

- on applique une symétrie d'axe (Oy) pour avoir le graphe sur $[-\frac{\pi}{4}, 0]$ (parité de f) ;
- on a alors le graphe de f sur toute une période ($[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$) et on le reproduit sur $\mathbb{R}$ tout entier par translation (périodicité de f).



Mise en œuvre : exercice 6.15 à exercice 6.19.

■ Calcul de dérivées

Dérivées de quelques fonctions usuelles

Fonction	Dérivée	Ensemble de validité
C $(C \in \mathbb{R})$	0	$\mathbb{R}$
$x^n (n \in \mathbb{N}^\star)$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x^n}$ $(n \in \mathbb{N}^\star)$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^\star$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^{+\star}$
$\exp(x)$	$\exp(x)$	$\mathbb{R}$
$\ln(\lvert x\rvert)$	$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^\star$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$\dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Quelques formules utiles

Pour vérifier la dérivabilité et calculer la dérivée d'une fonction, il s'agit tout d'abord de bien identifier par quel procédé elle est construite. S'agit-il d'une somme, d'un produit, d'un quotient ?

En ce cas, vous utilisez le **théorème 6.8**. Lorsque la fonction à étudier est construite comme composée, vous utilisez le **théorème 6.9**.
Si la fonction u est dérivable sur I et f dérivable sur J (avec $u(I) \subset J$), alors

$$(f \circ u)' = \left(f' \circ u\right) \times u'.$$

❑ Méthode 6.5.— Comment dériver une fonction composée

Soit $u : I \to J$ une fonction dérivable. Pourvu que les composées suivantes soient bien définies, on a pour tout $x \in I$:

- $(u^n)'(x) = nu'(x)u^{n-1}(x)$
- $\left(\dfrac{1}{u}\right)'(x) = -\dfrac{u'(x)}{u^2(x)}$
- $(\sqrt{u})'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
- $(e^u)'(x) = u'(x)e^{u(x)}$
- $(\ln u)'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$
- $(\cos u)'(x) = -u'(x)\sin u(x)$
- $(\sin u)'(x) = u'(x)\cos u(x)$
- $(\tan u)'(x) = \dfrac{u'(x)}{\cos^2 u(x)} = u'(x)(1+\tan^2 u(x))$

Exemple : calculer, lorsque cela est possible, la dérivée de la fonction définie par $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.
On a $f(x) = \sqrt{u(x)}$, avec $u(x) = \frac{1+x}{1-x}$. Nous avons vu plus haut que f est définie sur $[-1, 1[$.
La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et la fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$. Comme u est positive sur $[-1, 1[$ et s'annule uniquement en -1, on en déduit (**théorème 6.9**) que f est dérivable sur $]-1, 1[$ et :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f'(x) = \frac{\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)'}{2\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}} = \frac{(1-x)\times 1 - (-1)\times(1+x)}{(1-x)^2} \times \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}} = \frac{1}{(1-x)^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+x}}.$$

Exemple : calculer, lorsque cela est possible, la dérivée de la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\ln\sqrt{3x+7}}{4-x^2}$.
Ici $f(x) = \frac{\ln\sqrt{u(x)}}{4-x^2}$, avec $u(x) = 3x+7$. On a vu plus haut que l'ensemble de définition de f est $\mathcal{D} =]-\frac{7}{3}, -2[\cup]-2, 2[\cup]2, +\infty[$. Les fonctions ln et racine carrée sont dérivables sur $\mathbb{R}^{+\star}$. Comme u est dérivable sur $\mathbb{R}$ (donc sur $\mathcal{D}$) et $u > 0$ sur $\mathcal{D}$, on en déduit (par composition) que la fonction $x \mapsto \ln\sqrt{u(x)}$ est dérivable sur $\mathcal{D}$. Par ailleurs, la fonction $x \mapsto 4 - x^2$ est dérivable sur $\mathcal{D}$ et ne s'y annule pas. Par conséquent, f est dérivable sur $\mathcal{D}$ et :

$$\forall x \in \mathcal{D},\ f'(x) = \frac{(4-x^2)\left(\ln\sqrt{3x+7}\right)' - (4-x^2)'\ln\sqrt{3x+7}}{(4-x^2)^2} = \frac{(4-x^2)\frac{\left(\sqrt{3x+7}\right)'}{\sqrt{3x+7}} + 2x\ln\sqrt{3x+7}}{(4-x^2)^2}$$

$$= \frac{(4-x^2)\frac{\frac{3}{2\sqrt{3x+7}}}{\sqrt{3x+7}} + x\ln(\sqrt{3x+7})^2}{(4-x^2)^2} = \frac{3(4-x^2) + 2x(3x+7)\ln(3x+7)}{2(3x+7)(4-x^2)^2}.$$

Mise en œuvre : exercice 6.9, exercice 6.10.

■ Étudier le signe d'une fonction, établir des inégalités

Obtenir des inégalités

❑ Méthode 6.6.— Comment déterminer le signe d'une fonction

L'énoncé conduit parfois à étudier une fonction simplement dans le but d'établir son signe. Le tableau des variations de f permet de conclure.

x	a	
$f'(x)$		$-$
$f(x)$	0	$\searrow$

x		a	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$

x		a
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$\nearrow$	0

Ainsi, dans les trois situations élémentaires ci-contre, on peut conclure que f est négative sur l'intervalle considéré.

Trois situations élémentaires analogues permettent de conclure que la fonction f est positive sur l'intervalle considéré.

Démontrer des égalités entre fonctions

La méthode précédente se généralise et permet d'établir des inégalités ou des encadrements entre fonctions. En effet pour démontrer que pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant g(x)$, il suffira étudier le signe de la différence $h(x) = f(x) - g(x)$.

❑ Méthode 6.7.— Comment montrer une inégalité entre deux fonctions

Soit f et g deux fonctions dérivables de I dans $\mathbb{R}$. Pour montrer que :

$$\forall x \in I,\ f(x) \leqslant g(x),$$

on peut étudier les variations de la fonction $h = g - f$, et en déduire que h est positive sur I. C'est un raisonnement que l'on fait très souvent, et donc une méthode à retenir !

Exemple : montrons que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant 1 + x$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = e^x - (x+1) = e^x - x - 1$. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ (les fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto x+1$ le sont) et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = e^x - 1.$$

Par conséquent, f est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$, et la fonction f atteint son minimum en 0. Comme $f(0) = e^0 - 1 = 0$, f est positive sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geqslant x + 1.$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Mise en œuvre : exercice 6.12, exercice 6.13, exercice 6.5.

Rechercher les extremums

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Rappelons que :

- f possède un **maximum** en $a \in I$ si pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant f(a)$. On note $\max\limits_{I} f = f(a)$.
- f possède un **minimum** en $a \in I$ si pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant f(a)$. On note $\min\limits_{I} f = f(a)$.

Pour déterminer les valeurs extrêmes d'une fonction f, l'utilisation du tableau de variations de f facilite grandement l'analyse :

❑ Méthode 6.8.— Comment déterminer les valeurs extrêmes de f

Il est aisé de conclure dans les trois situations élémentaires ci-dessous que f admet $f(a)$ comme valeur maximale.

x	a	
$f'(x)$		$-$
$f(x)$	$f(a)$	$\searrow$

x		a	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(a)$	$\searrow$

x		a
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$\nearrow$	$f(a)$

Trois situations élémentaires analogues permettent de conclure que la fonction f admet $f(a)$ comme valeur minimale.

Exemple : déterminons le minimum de la fonction f définie sur $I =]3, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2+7}{x-3}$.

- f est dérivable comme quotient de telles fonctions dont le dénominateur ne s'annule pas et pour tout $x > 3$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x(x-3)-(x^2+7)}{(x-3)^2} \\ &= \frac{x^2-6x-7}{(x-3)^2} = \frac{(x+1)(x-7)}{(x-3)^2} \end{aligned}$$

x	3		7		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	14	$\nearrow$	$+\infty$

Sous cette forme factorisée, l'étude du signe de f' est aisée. On obtient le tableau ci-dessus.

- La **méthode 6.8** permet alors de conclure que f admet un minimum sur $]3, +\infty$, atteint en $x = 7$ et qui vaut $f(7) = 14$.

Vrai/Faux

	Vrai	Faux
1. Si x et y sont deux réels non nuls tels que $x \leqslant y$, alors $\frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{y}$.	☐	☐
2. Si une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est impaire, alors $f(0) = 0$.	☐	☐
3. Une fonction périodique est bornée.	☐	☐
4. La composée de deux fonctions croissantes est croissante.	☐	☐
5. La composée de deux fonctions décroissantes est décroissante.	☐	☐
6. Si f' est positive sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$, f est croissante sur $\mathcal{D}$.	☐	☐
7. Si f est dérivable et strictement croissante, alors $f' > 0$ sur I.	☐	☐
8. Si $f(x) = \sin^4 x$, alors $f'(x) = 4\sin^3 x$.	☐	☐
9. Pour tout $x \geqslant 0$, $\ln(1+x) \leqslant x$.	☐	☐
10. La fonction f définie par $f(x) = \sin x + \cos x$ est $\frac{\pi}{2}$-périodique.	☐	☐

Énoncé des exercices

Généralités sur les fonctions

Exercice 6.1 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
1. Si f est croissante et $f(a) < f(b)$ alors $a < b$.
2. Si f est croissante et $f(a) \leqslant f(b)$ alors $a \leqslant b$.
3. Si f est strictement croissante et $f(a) \leqslant f(b)$ alors $a \leqslant b$.

Exercice 6.2 : Déterminer toutes les fonctions à la fois monotones et périodiques.

Exercice 6.3 : Soit f une application croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$. Montrer que $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

Exercice 6.4* : Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}$ dérivables vérifiant

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^{+\star},\ f(xy) = f(x) + f(y).$$

Exercice 6.5* : Soit f une fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ dérivable vérifiant $f(0) = 0$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f'(x) \leqslant f(x).$$

Montrer que f est la fonction nulle.

Exercice 6.6 : Pour $m \in \mathbb{R}$, on pose $f_m(x) = \dfrac{x+m}{x^2+1}$. On note $\mathcal{C}_m$ la courbe représentative de f_m.
1. Montrer que les tangentes aux courbes C_m au point d'abscisse 0 sont parallèles.
2. Montrer que les tangentes aux courbes C_m au point d'abscisse 1 sont concourantes.

Exercice 6.7 : On pose $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ et on note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f. Montrer que $(1, 0)$ est l'unique point de $\mathcal{C}$ dont la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x$.

Exercice 6.8 : On pose $f(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$.
1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Montrer que la fonction f est impaire.
3. Étudier les variations de la fonction f.

Calcul de dérivées

Exercice 6.9 : Sans se soucier des ensembles de dérivation, calculer les dérivées des fonctions :

1. $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x - 1}$
2. $g(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x) - x\cos(x)}$
3. $h(x) = \ln\left(\cos(\dfrac{1}{x})\right)$
4. $i(x) = x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

Exercice 6.10* : Donner l'ensemble de dérivabilité de chacune des fonctions suivantes et calculer leur dérivée.

1. $f(x) = (x^3 + x - 2)^4$
2. $f(x) = \dfrac{1}{(e^x + e^{-x})^2}$
3. $f(x) = \left(\cos^2(x) + \frac{3}{2}\right)\sin(2x)$
4. $f(x) = \dfrac{(\ln(x))^4}{x}$
5. $f(x) = \dfrac{e^{x-\frac{1}{x}}}{x^2 - 1}$
6. $f(x) = \ln(\ln(x))$
7. $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x) + 2}}$
8. $f(x) = \sin\left(\ln(1 + \frac{2}{x})\right)$

■ Inégalités et inéquations

Exercice 6.11 : Résoudre les inéquations suivantes
1. $|x + 1| \leqslant 4$
2. $|x + 1| > 4$
3. $|2x - 4| \leqslant |x - 1|$

Exercice 6.12 : Pour $n \geqslant 1$, on pose $p_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$.

1. Montrer que, pour tout $x \geqslant 0$, $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1 + x) \leqslant x$.
2. En déduire que la suite (p_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 6.13* : Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

1. Montrer que $\forall x \geqslant 0,\ x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x$.
2. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 6.14 : Inégalités classiques —. Établir les inégalités suivantes :
1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) \geqslant 1 - \dfrac{1}{2}x^2$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \leqslant |x|$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant 1 + x$.

■ Étude de fonctions

Exercice 6.15* : On pose $f(x) = \sqrt{\tan(x)}$.
1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Étudier la parité et la périodicité de f.
3. Déterminer les variations de f.
4. Montrer que la restriction de f à $[0, \frac{\pi}{2}[$ est une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}[$ dans un ensemble à préciser.

Exercice 6.16* : On pose $f(x) = x^2 + \ln(x)$.
1. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}^{+\star}$ dans un ensemble à préciser.
   On note g son application réciproque.
2. Montrer que g est dérivable sur son ensemble de définition et exprimer g' en fonction de g.

Exercice 6.17* : Étudier les variations des fonctions suivantes.

1. $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$
2. $g(x) = x^2 + 1 - \dfrac{2}{x}$
3. $h(x) = (x-1)e^{\frac{x}{x-1}}$. *On précisera les limites aux bornes de l'ensemble de définition de h.*

Exercice 6.18 :** On considère la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{e^x + e^{-x}}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f et étudier sa parité.
2. Étudier les variations de la fonction f et préciser ses limites aux bornes de $\mathcal{D}$.
3. Montrer que la restriction de f à l'intervalle $[0, +\infty[$ admet une application réciproque. *On note g cette application.*
4. Donner l'ensemble de définition de g, son ensemble de continuité ainsi que son sens de variation.
5. Tracer les courbes représentatives des fonctions f et g.
6. Expliciter la fonction g.

Exercice 6.19 :** Faire l'étude complète de la fonction définie par $f(x) = \sin^5(x) + \cos^5(x)$.

Indications

Ex. 6.2

Une fonction à la fois monotone et périodique ne serait-elle pas constante ?

Ex. 6.4

Faire un raisonnement par analyse-synthèse.

Ex. 6.5

On pourra étudier les variations de la fonction $x \mapsto e^{-x}f(x)$.

Ex. 6.16

Pour le calcul de g', utiliser le **théorème 6.10**.

Corrigé des vrai/faux

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F	V	F	V	F	F	F	F	V	F

1. C'est faux pour x et y de signe différent. Par exemple, $-2 < 3$ et $-\frac{1}{2} < \frac{1}{3}$.

2. Si f est impaire, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$. On applique cette relation à $x = 0$:

$$f(0) = -f(0) \text{ donc } 2f(0) = 0 \text{ ; soit } f(0) = 0.$$

3. La fonction tangente est périodique, mais pas bornée.

4. Soit f et g sont deux fonctions croissantes telle que $g \circ f$ soit définie sur I. Pour $a, b \in I$, tels que $a \leqslant b$, on a :

$$f(a) \leqslant f(b) \text{ car } f \text{ est croissante ;}$$
$$g(f(a)) \leqslant g(f(b)) \text{ car } g \text{ est croissante ,}$$

c'est-à-dire $g \circ f(a) \leqslant g \circ f(b)$. Par conséquent, $g \circ f$ est croissante.

5. Posons $f(x) = g(x) = -x$. On a $g \circ f(x) = x$, f et g sont décroissantes mais $g \circ f$ est croissante.

6. Prenons $f(x) = -\frac{1}{x}$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}^\star,\ f'(x) = \frac{1}{x^2},$$

donc $f' > 0$ sur $\mathbb{R}^\star$. Cependant, f n'est pas croissante sur $\mathbb{R}^\star$. Par exemple, $f(-1) > f(2)$. Notons que le résultat est vrai lorsque $\mathcal{D}$ est un intervalle (**théorème 6.7**).

7. La fonction $f : x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, mais sa dérivée n'est pas strictement positive sur $\mathbb{R}$ ($f'(x) = 3x^2$ et $f'(0) = 0$).

8. Attention à ne pas oublier u' lorsque l'on dérive une fonction composée (**théorème 6.9**). La fonction composée $x \mapsto u(x)^4$ se dérive en $x \mapsto 4u'(x)u^3(x)$. Ici, $f'(x) = 4\sin^3 x \times \cos x$.

9. On peut appliquer la **méthode 6.7** en posant $f(x) = \ln(1+x) - x$. La fonction f est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et :

$$\forall x > -1,\ f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{x+1}.$$

Cette quantité étant négative sur $\mathbb{R}_+$, f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme $f(0) = 0$, on en déduit que f est négative sur $\mathbb{R}_+$. Cela montre que, pour tout $x \geqslant 0$, $\ln(1+x) \leqslant x$.

10. On a :

$$f(x + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + \frac{\pi}{2}) + \cos(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x - \sin x,$$

qui n'est pas égal à $f(x)$. En revanche, f est 2π-périodique.

Corrigé des exercices

Exercice 6.1

1. C'est vrai. Pour le montrer, raisonnons par l'absurde. On suppose que $f(a) < f(b)$ avec $a \geqslant b$. Comme f est croissante sur $\mathbb{R}$ et $a \geqslant b$, on a alors $f(a) \geqslant f(b)$, ce qui contredit le fait que $f(a) < f(b)$. D'où le résultat.

Utilisation d'un contre-exemple.

2. C'est faux. Par exemple, une fonction f constante sur $\mathbb{R}$ est croissante, mais elle vérifie $f(2) \geqslant f(3)$, avec $2 < 3$.

3. C'est vrai. On applique de nouveau un raisonnement par l'absurde. On suppose que $f(a) \leqslant f(b)$, avec $a > b$. Comme f est strictement croissante et $a > b$, on a $f(a) > f(b)$, ce qui contredit le fait que $f(a) \leqslant f(b)$. ▲

Exercice 6.2

Il est clair que les fonctions constantes sont monotones et périodiques. Nous allons montrer que ce sont les seules. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction à la fois monotone et périodique. On suppose par exemple que f est croissante et T-périodique. Si f n'est pas constante, il existe deux réels a et b ($a < b$) tels que $f(a) \neq f(b)$. Comme f est croissante, on a alors nécessairement $f(a) < f(b)$. Or, par périodicité de f :

Raisonnement par l'absurde.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(a + nT) = f(a).$$

Comme $T > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $a + n_0T \geqslant b$. Par croissance de f, on a alors $f(a + n_0T) \geqslant f(b)$, c'est-à-dire $f(a) \geqslant f(b)$, ce qui est absurde puisque $f(a) < f(b)$. Par conséquent, les seules fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ à la fois monotones et périodiques sont les fonctions constantes. ▲

$f(a + n_0T) = f(a)$

Exercice 6.3

On raisonne par l'absurde en supposant que $f \neq \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$: il existe donc $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) \neq x_0$. On a alors deux cas, $f(x_0) < x_0$ ou $f(x_0) > x_0$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(f(x)) = x$

• Si $f(x_0) < x_0$, on a $f(f(x_0)) \leqslant f(x_0)$ par croissance de f. Ainsi, $x_0 \leqslant f(x_0)$ puisque $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$. Cela contredit le fait que $f(x_0) < x_0$.

• Si $f(x_0) > x_0$, on a $f(f(x_0)) \geqslant f(x_0)$ par croissance de f, c'est-à-dire $x_0 \geqslant f(x_0)$, ce qui est de nouveau une contradiction.

• Conclusion par l'absurde on a montré que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$; c'est-à-dire $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$. ▲

Exercice 6.4

On effectue un raisonnement par analyse-synthèse (voir le chapitre **logique et raisonnements**).

• **Analyse :** Considérons une fonction dérivable $f : \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}$ vérifiant la relation de l'énoncé. En dérivant cette égalité par rapport à y, il vient :

$$\forall x > 0,\ \forall y > 0,\ xf'(xy) = f'(y).$$

En prenant $y = 1$ dans cette relation et en posant $a = f'(1)$, on obtient :

$$\forall x > 0,\ f'(x) = \frac{a}{x}.$$

On intègre la dernière relation.

Par conséquent, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x > 0$, $f(x) = a \ln x + C$. On a en particulier $f(1) = C$. Or, $f(1 \times 1) = f(1) + f(1)$, donc $f(1) = 0$. On en déduit que $C = 0$, et f est de la forme $x \mapsto a \ln x$, où $a \in \mathbb{R}$.

• **Synthèse :** Soit $a \in \mathbb{R}$ et f la fonction $x \mapsto a \ln x$. f est dérivable et vérifie :

$$\forall x, y > 0,\ f(xy) = a\ln(xy) = a(\ln x + \ln y) = a\ln x + a\ln y = f(x) + f(y).$$

• **Conclusion :** Les fonctions solutions du problème sont les fonctions de la forme $x \mapsto a\ln x$, où $a \in \mathbb{R}$. ▲

Exercice 6.5

Comme suggéré en indication, étudions les variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x) = e^{-x}f(x)$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$\forall x \geqslant 0,\ g'(x) = -e^{-x}f(x) + e^{-x}f'(x) = e^{-x}\left[f'(x) - f(x)\right],$$

ce qui montre que g est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme g est positive sur $\mathbb{R}_+$ et $g(0) = 0$, on en déduit que, pour tout $x \geqslant 0$, $g(x) = 0$. Par conséquent, pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) = e^x g(x) = 0$. ▲

$f' \leqslant f$

Exercice 6.6

1. Pour $m \in \mathbb{R}$, f_m est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_m'(x) = \frac{1 \times (x^2+1) - 2x(x+m)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2 - 2mx + 1}{(x^2+1)^2}.$$

La tangente à C_m au point d'abscisse 0 a pour coefficient directeur $f_m'(0) = 1$. Ainsi, toutes les tangentes à $\mathcal{C}_m$ au point d'abscisse 0 ont le même coefficient directeur et sont donc parallèles.

2. De même, la tangente à C_m au point d'abscisse 1 a pour équation

$$y = (x-1)f_m'(1) + f_m(1),$$

c'est-à-dire $y = -\frac{m}{2}(x-1) + \frac{m+1}{2} = -\frac{m}{2}(x-2) + \frac{1}{2}$. Toutes ces droites passent par le point de coordonnées $(2, \frac{1}{2})$. Par conséquent, les tangentes aux courbes C_m au point d'abscisse 1 sont concourantes en ce point. ▲

Exercice 6.7

La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$. La tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse x_0 a pour coefficient directeur $f'(x_0)$. La droite d'équation $y = x$ a pour coefficient directeur 1. La question équivaut donc à montrer que l'équation $f'(x) = 1$ admet 1 pour unique solution. Calculons la dérivée de f :

Théorème 6.5

$$\forall x > 0,\ f'(x) = \frac{x^2 \times \frac{1}{x} - 2x\ln x}{x^4} = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}.$$

Par conséquent,

$$f'(x) = 1 \Leftrightarrow x^3 + 2\ln x - 1 = 0.$$

Étudions les variations sur $\mathbb{R}^{+\star}$ de la fonction g définie par $g(x) = x^3 + 2\ln x - 1$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et :

On montre que 1 est l'unique point d'annulation de g.

$$\forall x > 0,\ g'(x) = 3x^2 + \frac{2}{x},$$

$g' > 0$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$

ce qui montre que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$. Comme $g(1) = 0$, on en déduit que 1 est l'unique point d'annulation de g. D'où le résultat. ▲

Théorème de la bijection bicontinue

Corrigé

Exercice 6.8

On applique la **méthode 6.1** *pour déterminer l'ensemble de définition d'une fonction composée.*

$\sqrt{x^2} = |x|$

$|x| \geqslant x$

1. On peut écrire $f(x) = \ln(u(x))$, avec $u(x) = \sqrt{x^2+1} - x$. La fonction racine carrée est définie sur $\mathbb{R}_+$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2+1 > 0$. Par conséquent, la fonction u est définie sur $\mathbb{R}$. Comme ln est définie sur $\mathbb{R}^{+\star}$, il reste à déterminer l'ensemble des réels x tels que $u(x) > 0$. Comme, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2+1 > x^2$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sqrt{x^2+1} > |x|.$$

En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2+1} - x > 0$, ce qui montre que u est à valeurs strictement positives. Par composition, f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Déjà, $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0. Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) &= \ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) = \ln\left[\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+1}-x}\right]\\ &= \ln\left(\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x}\right) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}\right)\\ &= -\ln(\sqrt{x^2+1}-x) = -f(x),\end{aligned}$$

ce qui montre que f est impaire.

Méthode 6.5

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

3. La fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2+1 > 0$. Par conséquent, la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et il en est de même pour u. Enfin, ln est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et $u > 0$ d'après ce qui précède. Par composition, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} - 1}{\sqrt{x^2+1}-x} = \frac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} \times \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

On en déduit que la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. ▲

Exercice 6.9

Pour chacune des fonctions, on applique les résultats généraux (**théorème 6.8**) ainsi que la **méthode 6.5** pour caculer la dérivée d'une composée. On a :

1. $f'(x) = \dfrac{2x+6}{2\sqrt{x^2+6x-1}} = \dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+6x-1}}$

2. $$\begin{aligned}g'(x) &= \frac{-\sin x \times (\sin x - x\cos x) - \cos x \times (\cos x + x\sin x - \cos x)}{(\sin x - x\cos x)^2}\\ &= -\frac{\sin^2 x}{(\sin x - x\cos x)^2}\end{aligned}$$

3. $h'(x) = \dfrac{-\frac{1}{x^2} \times \left(-\sin\frac{1}{x}\right)}{\cos\frac{1}{x}} = \dfrac{\tan\frac{1}{x}}{x^2}$

4. $$\begin{aligned}i'(x) &= \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + x \times \frac{\frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2}}{2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + \frac{\frac{x}{(x+1)^2}}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} = \frac{\frac{x-1}{x+1} + \frac{x}{(x+1)^2}}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}\\ &= \frac{x^2+x-1}{(x+1)^2} \times \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.\end{aligned}$$

▲

Exercice 6.10

1. La fonction f est une fonction polynomiale, donc dérivable sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 4 \times (3x^2+1) \times (x^3+x-2)^3 = (12x^2+4)(x^3+x-2)^3.$$

✎ $(u^4)' = 4u^3u'$

2. La fonction exponentielle est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, la fonction $x \mapsto (e^x+e^{-x})^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'y annule pas. Cela montre que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{-2(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^3} = \frac{2(e^{-x}-e^x)}{(e^x+e^{-x})^3}.$$

✎ $(\frac{1}{u^2}) = -\frac{2u'}{u^3}$

3. Les fonctions sin, cos et $x \mapsto 2x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$. En tant que produit et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) &= \left(\cos^2 x + \frac{3}{2}\right) \times 2\cos 2x - 2\cos x \sin x \times \sin 2x \\ &= (2\cos^2 x+3)(2\cos^2 x-1) - 4\cos^2 x \sin^2 x \\ &= 4\cos^4 x + 4\cos^2 x - 3 - 4\cos^2 x(1-\cos^2 x) \\ &= 8\cos^4 x - 3.\end{aligned}$$

✎ *Dérivée d'un produit.*

✎ $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$
$\sin 2x = 2\cos x \sin x$
$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

4. La fonction ln (et donc $\ln^4$) est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$, et $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$. On en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+\star},\ f'(x) = \frac{x \times 4(\ln x)^3 \times \frac{1}{x} - (\ln x)^4}{x^2} = \frac{(\ln x)^3}{x^2}(4-\ln x).$$

✎ *On dérive f comme un quotient ou comme un produit.*

5. La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto x - \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$. On en déduit (par composition) que $x \mapsto e^{x-\frac{1}{x}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$. Par ailleurs, la fonction $x \mapsto x^2-1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule qu'en 1 et -1. Par conséquent, f est dérivable sur $\mathbb{R}^\star \setminus \{1;-1\}$ et :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}^\star \setminus \{-1;1\},\ f'(x) &= \frac{(x^2-1)(1+\frac{1}{x^2})e^{x-\frac{1}{x}} - 2xe^{x-\frac{1}{x}}}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{(x^2-\frac{1}{x^2}-2x)e^{x-\frac{1}{x}}}{(x^2-1)^2} = \frac{(x^4-2x^3-1)e^{x-\frac{1}{x}}}{x^2(x^2-1)^2}\end{aligned}$$

6. La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et $\ln x > 0$ si et seulement si $x > 1$. Par composition, f est dérivable sur $]1,\infty[$ et :

$$\forall x > 1,\ f'(x) = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \frac{1}{x \ln x}.$$

✎ $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

7. Les fonctions cos et sin sont dérivables sur $\mathbb{R}$. La fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin x + 2 > 0$. On en déduit que la fonction $x \mapsto \sqrt{\sin x + 2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (et ne s'y annule pas). Par quotient, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est donnée par :

✎ $\sin x \geqslant -1$

✎ $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

Corrigé

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{-\sin x\sqrt{\sin x+2} - \cos x \times \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x+2}}}{(\sqrt{\sin x+2})^2} = \frac{\frac{-2\sin x(\sin x+2)-\cos^2 x}{2\sqrt{\sin x+2}}}{\sin x+2}$$
$$= \frac{-2\sin^2 x - 4\sin x - (1-\sin^2 x)}{2\sqrt{\sin x+2}(\sin x+2)} = -\frac{\sin^2 x + 4\sin x + 1}{2(\sin x+2)^{\frac{3}{2}}}.$$

8. La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$. La fonction $x \mapsto 1+\frac{2}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$. Comme $1+\frac{2}{x} = \frac{x+2}{x}$, on a $1+\frac{2}{x} > 0$ ssi $x \in]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$. Par composition, la fonction $x \mapsto \ln(1+\frac{2}{x})$ est dérivable sur $]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$. La fonction sin étant dérivable sur $\mathbb{R}$, on en déduit que f est dérivable sur $]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$. On a :

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ et $(\sin v)' = v'\cos v$

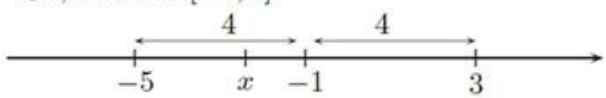
$$\forall x \in]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[,\ f'(x) = \frac{-\frac{2}{x^2}}{1+\frac{2}{x}}\cos\left(\ln(1+\frac{2}{x})\right)$$
$$= -\frac{2}{x^2+2x}\cos(\ln(1+\frac{2}{x})).$$

▲

Exercice 6.11

Pour $d \geqslant 0$, $|X| \leqslant d \Leftrightarrow -d \leqslant X \leqslant d$

1. L'inéquation équivaut à $-4 \leqslant x+1 \leqslant 4$, soit $-5 \leqslant x \leqslant 3$. L'ensemble des solutions est $[-5,3]$. On peut également proposer une solution géométrique. En notant M le point d'abscisse x, A le point d'abscisse -1, l'inéquation signifie que $AM \leqslant 4$, soit $x \in [-5,3]$.



La négation de $|x-1| \leqslant 4$ est $|x-1| > 4$.

2. En utilisant la question précédente, c'est immédiat : l'ensemble des solutions est $]-\infty,-5[\cup]3,+\infty[$. Plus généralement, l'inéquation $|x-a| > d$ équivaut à ($x > a+d$ **ou** $x < a-d$).

Pour $a,b \geqslant 0$, $a \leqslant b \Leftrightarrow a^2 \leqslant b^2$.

3. Comme $|2x-4|$ et $|x-1|$, sont positifs, on a :

$$|2x-4| \leqslant |x-1| \Leftrightarrow (2x-4)^2 \leqslant (x-1)^2$$
$$\Leftrightarrow 4x^2 - 16x + 16 \leqslant x^2 - 2x + 1$$
$$\Leftrightarrow 3x^2 - 14x + 15 \leqslant 0$$

Les racines de ce trinôme étant $\frac{5}{3}$ et 3, l'ensemble des solutions est $[\frac{5}{3},3]$. ▲

Exercice 6.12

On applique la **méthode 6.7** *pour démontrer chacune des deux inégalités.*

1. L'inégalité de droite a déjà été établie dans le **Vrai/Faux** (la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x) - x$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et s'annule en 0, ce qui permet de conclure). Pour démontrer l'inégalité de gauche, on introduit la fonction g définie par $g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$. La fonction g est définie et dérivable sur $]-1,+\infty[$ et :

$$\forall x > -1,\ g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x}.$$

Cette quantité étant positive sur $]-1,+\infty[$, g est croissante sur $]-1,+\infty[$, donc sur $\mathbb{R}_+$. Comme $g(0) = 0$, on en déduit que g est positive sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, pour tout $x \geqslant 0$, $\ln(1+x) \geqslant x - \frac{x^2}{2}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On observe que $\ln(p_n) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$. Considérons $k \in [\![1, n]\!]$. D'après la première question, on a

$$\frac{k}{n^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{k}{n^2}\right)^2 \leqslant \ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right) \leqslant \frac{k}{n^2}$$

Soit

$$\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4} \leqslant \ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right) \leqslant \frac{k}{n^2}$$

Sommons terme à terme (**méthode 3.8**), il vient :

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{1}{2n^4}\sum_{k=1}^{n} k^2 \leqslant \ln(p_n) \leqslant \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k$$

En tenant compte des expressions simplifiées des sommes des n premiers entiers et des premiers carrés d'entiers, nous obtenons l'encadrement :

C'est la **proposition 3.4**.

$$\frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^4} \leqslant \ln(p_n) \leqslant \frac{n(n+1)}{2n^2}$$

Les suites encadrantes

$$\frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}(1+\frac{1}{n}) \quad \text{et}$$
$$\frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^4} = \frac{1}{2}(1+\frac{1}{n}) - \frac{1}{12n}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})$$

étant toutes les deux convergentes de limite $\frac{1}{2}$, il découle du **théorème d'encadrement** que $\ln(p_n)$ converge vers $\frac{1}{2}$. Finalement, (p_n) est convergente vers $\exp(1/2) = \sqrt{e}$. ▲

Exercice 6.13

1. Pour démontrer ces inégalités, on introduit les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

Méthode 6.7

$$f(x) = x - \sin x \qquad \text{et} \qquad g(x) = \sin x - (x - \frac{x^3}{6}).$$

• La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 - \cos x \geqslant 0$, donc f est croissante sur $\mathbb{R}$. Comme $f(0) = 0$, on en déduit que f est positive sur $\mathbb{R}_+$. Par conséquent, pout tout $x \geqslant 0$, $\sin x \leqslant x$.

$\cos x \leqslant 1$

• La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$. Pour trouver le signe de g', on dérive une nouvelle fois. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $g''(x) = -\sin x + x = f(x)$, donc g' est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme $g'(0) = 0$, on en déduit que g' est positive sur $\mathbb{R}_+$, ce qui montre que g est croissante sur $\mathbb{R}_+$. On en conclut que g est positive sur $\mathbb{R}_+$ puisque $g(0) = 0$. On a ainsi, pour tout $x \geqslant 0$, $\sin x \geqslant x - \frac{x^3}{6}$ et finalement :

$f \geqslant 0$ *sur* $\mathbb{R}_+$

$$\forall x \geqslant 0,\ x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x.$$

2. On applique la relation précédente au réel positif $x = \frac{k}{n^2}$, puis on somme de 1 à n :

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2}-\frac{k^3}{6n^6}\right)\leqslant\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n^2}\right)\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2},$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k-\frac{1}{6n^6}\sum_{k=1}^{n}k^3\leqslant u_n\leqslant\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k.$$

On peut démontrer cette relation par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$

En utilisant la valeur de la somme $\sum_{k=1}^{n}k^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$, on obtient :

$$\frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}-\frac{1}{6n^6}\frac{n^2(n+1)^2}{4}\leqslant u_n\leqslant\frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}=\frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2(n+1)^2}{24n^6}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{24n^4}=0$, le théorème d'encadrement permet d'en déduire que la suite (u_n) converge vers $\frac{1}{2}$. ▲

Exercice 6.14

Pour démontrer ces inégalités, on étudiera le signe de la fonction différence conformément à la la **méthode 6.7**.

1. Soit $h(x)=\cos(x)-(1-\dfrac{x^2}{2})$. h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $h'(x)=-\sin x+x$. h' est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ également et pour tout réel $x\in\mathbb{R}$, $h"(x)=1-\cos(x)\geqslant 0$. Comme sa dérivée est positive sur $\mathbb{R}$, il s'ensuit que h' est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$. Comme elle s'annule en 0, il en résulte que

$$h'(x)\geqslant 0\iff x\geqslant 0$$

Ainsi, h prend sa valeur minimale en 0. Comme $h(0)=0$, on en déduit finalement que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $h(x)\geqslant 0$, c'est-à-dire que $\cos(x)\geqslant 1-\frac{1}{2}x^2$.

2. Il suffit de prouver que pour tout $x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, $|\sin x|\leqslant x$, l'inégalité étant évidemment vraie lorsque $|x|>\frac{\pi}{2}$. Par parité, il suffit de vérifier cet encadrement sur $[0,\frac{\pi}{2}]$. Montrons donc que $\forall x\in[0,\frac{\pi}{2}],\quad 0\leqslant\sin(x)\leqslant x$. Considérons la fonction h définie sur $[0,\frac{\pi}{2}]$, par $h(x)=\sin x-x$. h est décroissante $h(0)=0$. Par suite, h est négative sur $[0,\frac{\pi}{2}]$.

En effet, pour tout réel x, $|\sin(x)|\leqslant 1<\frac{\pi}{2}$.

3. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=e^x-1-x$. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $h'(x)=e^x-1$. Par conséquent, $h'(x)\geqslant 0\iff x\geqslant 0$. On en déduit que h est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$. En conséuence, h atteint sa valeur minimale en 0. Comme $h(0)=0$, il en résulte que pour tout réel x, $h(x)\geqslant 0$, soit $e^x\geqslant 1+x$. ▲

Exercice 6.15

Ensemble de définition d'une fonction composée.

1. La fonction f est définie en tout point x tel que $\tan x$ existe et $\tan x\geqslant 0$. La fonction tangente est définie sur $\mathcal{D}_{\tan}=\{]-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi[;\ k\in\mathbb{Z}\}$ et, pour $x\in\mathcal{D}_{\tan}$, on a :

$$\tan x\geqslant 0\Leftrightarrow x\in\{[0+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi[;\ k\in\mathbb{Z}\}\cup\{[\pi+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi[;\ k\in\mathbb{Z}\}.$$

L'ensemble de définition de f est donc :

$$\mathcal{D}=\{[2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi[;\ k\in\mathbb{Z}\}\cup\{[\pi+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi[;\ k\in\mathbb{Z}\}.$$

2. Comme $\mathcal{D}$ n'est pas symétrique par rapport à 0, f ne peut être ni paire, ni impaire. Par ailleurs, f est π-périodique d'après la périodicité de la fonction tangente :

$$\forall x \in \mathcal{D},\ f(x+\pi) = \sqrt{\tan(x+\pi)} = \sqrt{\tan x} = f(x).$$

tan est π-périodique

3. La fonction tangente est dérivable sur son ensemble de définition, ce qui n'est pas le cas de la fonction racine carrée qui n'est dérivable que sur $\mathbb{R}^{+\star}$. De plus, les points d'annulation de la fonction tangente sur $\mathcal{D}$ sont les points de la forme $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Par composition, f est dérivable sur $\mathcal{D} \setminus \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$ et :

$$\forall x \in \mathcal{D} \setminus \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\},\ f'(x) = \frac{1+\tan^2 x}{2\sqrt{\tan x}}.$$

La racine carrée est définie sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$.

$\sqrt{u}' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

Par conséquent, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, f est strictement croissante sur $]2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi[$ et sur $]\pi + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi[$. Par continuité, f est strictement croissante $[2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi[$ et sur $[\pi + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi[$.

4. On vient de montrer que f est continue et strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}[$. D'après le **théorème de la bijection bicontinue**, la restriction de f à $[0, \frac{\pi}{2}[$ est donc une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}[$ dans $f([0, \frac{\pi}{2}[) = [0, +\infty[$. ▲

Exercice 6.16

1. Tout comme la fonction ln, f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$. On a :

$$\forall x > 0,\ f'(x) = 2x + \frac{1}{x} > 0,$$

Ou encore, f est strictement croissante en tant que somme de telles fonctions.

ce qui montre que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$. Par ailleurs,

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

On applique alors le **théorème de la bijection bicontinue** : f étant continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$, c'est une bijection de $\mathbb{R}^{+\star}$ dans $f(\mathbb{R}^{+\star}) = f(]0, +\infty[) =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$. La fonction f admet donc une application réciproque g, définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^{+\star}$.

2. Nous allons utiliser le **théorème 6.10** pour dériver la fonction g. Comme f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^{+\star}$ (calcul de la question précédente), g est dérivable sur $f(\mathbb{R}^{+\star}) = \mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = \frac{1}{f' \circ g(x)} = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{2g(x) + \frac{1}{g(x)}}.$$

$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$

▲

Exercice 6.17

1. La fonction racine carrée est définie sur $\mathbb{R}_+$ et $1 - x^2$ est positif si et seulement si $x \in [-1, 1]$. On en déduit que f est définie sur $[-1, 1]$. La fonction racine carrée étant dérivable seulement sur $\mathbb{R}^{+\star}$, f est (par composition) dérivable sur $]-1, 1[$ et :

$1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow (x = 1$ *ou* $x = -1)$

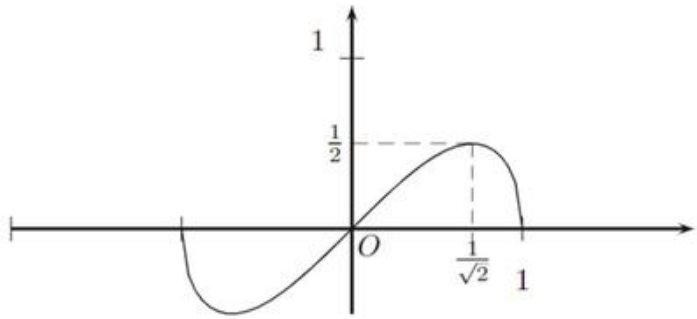
$$\forall x \in]-1, 1[,\ f'(x) = \sqrt{1-x^2} + x \times \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

Par conséquent, f est croissante sur $[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$, décroissante sur $[-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}]$ et sur $[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1]$. La fonction f admet un maximum en $\frac{1}{\sqrt{2}}$, celui-ci vaut $\frac{1}{2}$. Enfin, la courbe représentative de f admet une tangente horizontale aux points d'abscisses $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$f(-1) = 0$

f' s'annule en ces points.

Corrigé



2. La fonction $x \mapsto x^2+1$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto -\frac{2}{x}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^\star$. On en déduit que g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^\star$. On a :

✐ **Identité géométrique** $a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^\star,\ g'(x) = 2x + \frac{2}{x^2} = \frac{2(x^3+1)}{x} = 2\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x^2}.$$

Comme x^2-x+1 est strictement positif sur $\mathbb{R}$ (trinôme à discriminant strictement négatif), g' est du signe de $x+1$. Par conséquent, g est strictement décroissante sur $]-\infty,-1]$, strictement croissante sur $[-1,0[$ et sur $]0,+\infty[$. La courbe représentative de g admet une tangente horizontale au point d'abscisse -1. On peut ajouter que g tend vers $+\infty$ en $-\infty$ et en $+\infty$, vers $+\infty$ en 0^- et vers $-\infty$ en 0^+.

3. La fonction exp est définie sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \mapsto \frac{x}{x-1}$ est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Par composition, l'ensemble de définition de h est $\mathcal{D} = \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

✐ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x-1} = 1$

Comme $\frac{x}{x-1}$ tend vers 1 en $\pm\infty$, les limites de h en $\pm\infty$ sont celle de $x-1$. Par conséquent, la fonction h tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et vers $-\infty$ en $-\infty$. Par ailleurs, en posant $u = \frac{1}{x-1}$, on a $h(x) = \frac{1}{u}e^{1+u} = e \times \frac{e^u}{u}$. Comme

✐ $\lim\limits_{x\to1^+} u = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to1^-} u = -\infty$

$$\lim_{u\to-\infty} \frac{e^u}{u} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{u\to+\infty} \frac{e^u}{u} = +\infty,$$

on en déduit que $\lim\limits_{x\to1^-} h(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to1^+} h(x) = +\infty$.

La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \mapsto \frac{x}{x-1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Par composition, h est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\} = \mathcal{D}$ et :

$$\forall x \in \mathcal{D}, \qquad h'(x) = e^{\frac{x}{x-1}}\left[1 + (x-1)\times\frac{x-1-x}{(x-1)^2}\right] = \frac{x-2}{x-1}e^{\frac{x}{x-1}}.$$

✐ *Le signe de* $\frac{x-2}{x-1}$ *est celui du trinôme* $(x-2)(x-1)$.

Le signe de h' est celui de $\dfrac{x-2}{x-1}$, on en déduit le tableau de variations de h.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	↗	0 ‖ $+\infty$	↘	e^2	↗	$+\infty$

▲

Exercice 6.18

1. La fonction $x \mapsto e^x + e^{-x}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et ne s'y annule pas. Par conséquent, son inverse (la fonction f) est définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. De plus, f

est paire puisque $\mathbb{R}$ et symétrique par rapport à 0 et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$.

2. Comme $x \mapsto e^x + e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'y annule pas, f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -\frac{e^x - e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2} = -\frac{e^{2x} - 1}{e^x(e^x + e^{-x})^2}.$$

Par conséquent, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Par parité, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-$. Par ailleurs, la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$ est 0 puisque e^x tend vers 0 en $-\infty$ et vers $+\infty$ en $+\infty$.

$\forall x \geqslant 0,\ e^{2x} \geqslant 1$

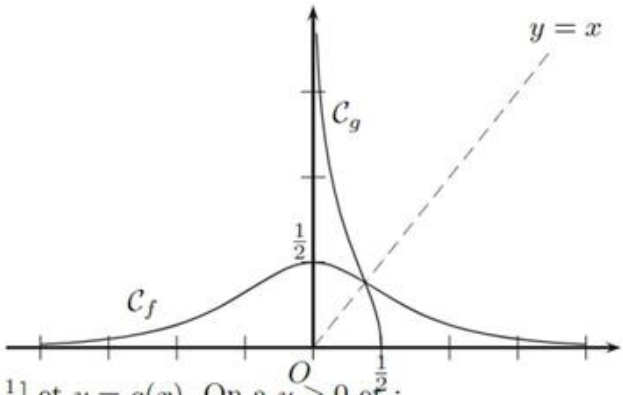
3. La fonction f est continue et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$, c'est donc une bijection de $[0, \infty[$ dans $f([0, +\infty[) =]0, \frac{1}{2}]$. Ainsi, la restriction de f à $[0, +\infty[$ admet une application réciproque, que l'on note g.

Théorème de la bijection !

4. Par définition (question précédente), g est définie $]0, \frac{1}{2}]$. Comme f est continue et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$, g est également continue et strictement décroissante sur $]0, \frac{1}{2}]$.

C'est une question de cours !

5.



6. Soit $x \in]0, \frac{1}{2}]$ et $y = g(x)$. On a $y \geqslant 0$ et :

$$x = f(y) = \frac{1}{e^y + e^{-y}} = \frac{e^y}{e^{2y} + 1},$$

d'où $xe^{2y} - e^y + x = 0$, ce qui s'écrit encore $xY^2 - Y + x = 0$ en posant $Y = e^y$. Le discriminant de ce trinôme est $1 - 4x^2$, il est positif puisque $x \in]0, \frac{1}{2}]$. On obtient les solutions :

$Y \geqslant 1$ car $y \geqslant 0$.

$$Y_1 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4x^2}}{2x} \quad \text{et} \quad Y_2 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x^2}}{2x}.$$

Il reste à savoir si $Y = Y_1$ ou $Y = Y_2$. On sait que $Y \geqslant 1$. Par ailleurs, $Y_1 > 0$, $Y_1 \geqslant Y_2$ et $Y_1 Y_2 = 1$, donc $0 < Y_2 \leqslant 1 \leqslant Y_1$. Cela montre que $Y = Y_1$, c'est-à-dire $y = \ln Y_1$. Finalement,

Produit des racines.

$$g(x) = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4x^2}}{2x}\right).$$

▲

Exercice 6.19

$\boxed{1}$ **Ensemble de définition :** La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ (somme et produit de fonctions définies sur $\mathbb{R}$).

$\boxed{2}$ **Ensemble d'étude :** La fonction f est 2π-périodique, mais elle n'est ni paire, ni impaire. Par ailleurs,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+\pi) = \sin^5(x+\pi) + \cos^5(x+\pi) = (-\sin x)^5 + (-\cos x)^5$$
$$= -\sin^5 x - \cos^5 x = -f(x).$$

Par conséquent, le point de la courbe d'abscisse $x+\pi$ s'obtient à partir du point d'abscisse x par symétrie d'axe (Ox) et de vecteur $(\pi, 0)$. Il suffit donc d'étudier f sur un intervalle de longueur π, par exemple $[0, \pi]$.

$\boxed{3}$ **Limites aux bornes de l'ensemble d'étude :** On a $f(0) = \sin^5 0 + \cos^5 0 = 1$ et $f(\pi) = \sin^5 \pi + \cos^5 \pi = -1$.

$\boxed{4}$ **Dérivabilité et calcul de la dérivée :** Les fonctions sinus et cosinus étant dérivables sur $\mathbb{R}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) &= 5\cos x \sin^4 x - 5\sin x \cos^4 x = 5\cos x \sin x \left(\sin^3 x - \cos^3 x\right)\\ &= \frac{5}{2}\sin 2x\,(\sin x - \cos x)\left(\sin^2 x + \sin x\cos x + \cos^2 x\right)\\ &= \frac{5}{\sqrt{2}}\sin 2x \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{2}}\,(1 + \sin x \cos x)\\ &= \frac{5}{\sqrt{2}}\sin 2x \times \sin(x - \frac{\pi}{4}) \times \left(1 + \frac{\sin 2x}{2}\right)\end{aligned}$$

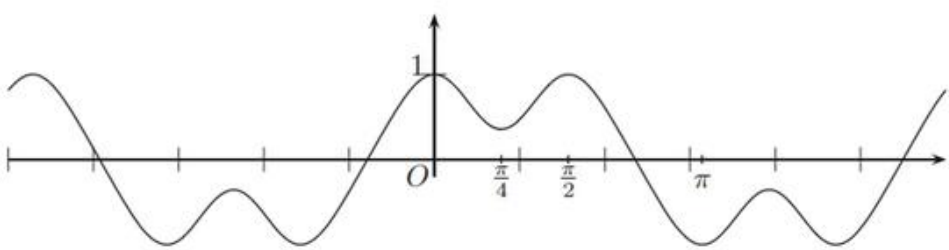
$\boxed{5}$ **Variations :** Nous avons vu qu'il suffit d'étudier les variations de f sur $[0, \pi]$. Par ailleurs, comme $1 + \frac{\sin 2x}{2} \geqslant 0$, le signe de f' est celui de $\sin 2x \sin(x - \frac{\pi}{4})$. Pour $x \in [0, \pi]$, $\sin 2x$ est positif sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, négatif sur $[\frac{\pi}{2}, \pi]$; et $\sin(x - \frac{\pi}{4})$ est négatif sur $[0, \frac{\pi}{4}]$, positif sur $[\frac{\pi}{4}, \pi]$. Par conséquent, f est croissante sur $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$, décroissante sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ et sur $[\frac{\pi}{2}, \pi]$.

✐ $\frac{1}{2}\sin X \geqslant -\frac{1}{2}$

$\boxed{6}$ **Courbe représentative de f.**

On commence par tracer le graphe de f sur $[0, \pi]$, puis :

- on applique une symétrie glissée d'axe (Ox) et de vecteur $\pi\,\vec{i}$ pour avoir le graphe sur $[0, 2\pi]$;
- on a alors le graphe de f sur la période $[0, 2\pi]$ et on le reproduit sur $\mathbb{R}$ tout entier par translation.



▲

Chapitre 7

Fonctions usuelles

UN MATHÉMATICIEN

Michael Stifel est un disciple de Martin Luther. Il enseigne les mathématiques et la théologie à Königsberg puis à Iéna. Il met en parallèle des suites arithmétiques et géométriques ce qui lui permet d'entrevoir ce qui deviendra plus tard la fonction logarithme. Sa vie est très mouvementée car, réformateur passionné, il prévoit la fin du monde mais rien ne se passa le jour dit. Il dut se réfugier en prison pour échapper à la colère de ses disciples.

Un peu d'histoire

Les concepts qui sous-tendent ce que nous nommons les fonctions usuelles comme les puissances ou les fonctions trigonométriques sont apparus dès l'Antiquité. C'était à l'époque des procédés de calcul mais en rien des fonctions. À la Renaissance, des mathématiciens comme Nicolas Chuquet (fin XVe siècle) étudient les puissances et ce savant lyonnais a l'idée de les noter en exposant. Parallèlement, plusieurs mathématiciens allemands comme Regiomontanus (1436-1476) retrouvent les propriétés trigonométriques et celui-ci en fait un exposé complet.

On appréhende ces notions sous l'aspect de fonctions seulement lorsque le calcul différentiel est introduit à la fin du XVIIe siècle par Newton et Leibniz. On peut en effet dériver des expressions. C'est alors que l'on parle de fonctions.

Objectifs

les incontournables

- Connaître les définitions des fonctions usuelles et leurs propriétés, notamment :
  - Leur ensemble de définition, de continuité, de dérivabilité ;
  - Leur dérivée ;
  - L'allure de leur courbe représentative.
- Connaître et appliquer les résultats de croissances comparées.
- Étudier une fonction faisant intervenir des fonctions usuelles.

et plus si affinités

- Simplifier une expression formée à partir de fonctions usuelles.
- Résoudre une équation faisant intervenir des fonctions usuelles.

Résumé de cours

Fonctions logarithme népérien, exponentielle et puissances

Théorème-Définition 7.1.— Logarithme népérien —. On appelle fonction **logarithme népérien** et on note ln l'unique primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$ qui s'annule au point 1. La fonction ln est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}^{+\star}$ dans $\mathbb{R}$.

Théorème 7.2.— Propriété fondamentale du logarithme népérien —.

$$\boxed{\text{Pour } x > 0 \text{ et } y > 0, \text{ on a } \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y).}$$

Remarque : on déduit du **théorème 7.2** les propriétés suivantes :

$$\boxed{\bullet\ \forall x > 0,\ \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x \qquad \bullet\ \forall (x,y) \in (\mathbb{R}^{+\star})^2,\ \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y).}$$

Théorème-Définition 7.3.— Exponentielle —. On appelle fonction **exponentielle** et on note exp l'application réciproque de la fonction ln. La fonction exp est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{+\star}$. On a :

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+\star},\ y = \exp(x) \Longleftrightarrow x = \ln(y).}$$

Par ailleurs, la fonction exp est continue, dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $\exp'(x) = \exp(x)$.

Théorème 7.4.— Propriété fondamentale de l'exponentielle —.

$$\boxed{\text{Pour tous réels } x \text{ et } y, \text{ on a } \exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y).}$$

Remarque : on déduit du **théorème 7.4** les propriétés suivantes

$$\boxed{\bullet\ \forall x \in \mathbb{R},\ \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \qquad \bullet\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}.}$$

Théorème-Définition 7.5.— Puissance d'exposant α —. Soit α un réel. On appelle fonction **puissance d'exposant α** la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+\star}$ par :

$$\boxed{\forall x > 0,\ x^\alpha = \exp(\alpha \ln x).}$$

Remarque : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\exp(x) = e^x$. On utilise désormais cette notation pour la fonction exponentielle.

Proposition 7.6.— Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^\alpha$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et :

$$\boxed{\forall x > 0,\ f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}.}$$

Proposition 7.7.— Règles de calcul sur les puissances —. Pour $(x, y) \in (\mathbb{R}^{+\star})^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on a :

- $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln x$
- $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$
- $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$
- $x^{-\alpha} = \dfrac{1}{x^\alpha}$
- $\left(\dfrac{x}{y}\right)^\alpha = \dfrac{x^\alpha}{y^\alpha}$
- $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$

Théorème 7.8.— Limites des fonctions logarithme népérien, exponentielle et puissances —.

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x = 0$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} e^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$
- Pour $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha = 0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} x^\alpha = +\infty$

Théorème 7.9.— Croissances comparées —. Soit $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $\gamma > 0$. Alors :

- $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha |\ln(x)|^\beta = 0$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0$
- $\lim\limits_{x\to -\infty} |x|^\alpha e^{\gamma x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{\gamma x}}{x^\alpha} = +\infty$

Retenez que : En cas d'indétermination entre une puissance de x et une puissance de $\ln(x)$, c'est la puissance de x qui l'emporte. En cas d'indétermination entre une puissance de e^x et une puissance de x, c'est la puissance de e^x qui l'emporte.

Remarque : en particulier, on a

- $\lim\limits_{x\to 0^+} x \ln x = 0$;
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$;
- $\lim\limits_{x\to -\infty} x e^x = 0$;
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

Proposition 7.10.— Inégalités classiques — .

- $\forall x > -1,\ \ln(1+x) \leqslant x$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geqslant 1 + x$

■ Fonctions circulaires directes : cosinus, sinus et tangente

Proposition 7.11.— Propriétés des fonctions circulaires —.

- La fonction cos est 2π-périodique, paire, dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour $x \in \mathbb{R}$, $\cos'(x) = -\sin x$.
- La fonction sin est 2π-périodique, impaire, dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour $x \in \mathbb{R}$, $\sin'(x) = \cos x$.
- La fonction tan est π-périodique, impaire, dérivable sur $\mathcal{D}_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ et :

$$\forall x \in \mathcal{D}_{\tan},\ \tan'(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Proposition 7.12.—

$$\boxed{\bullet \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1\ ; \qquad \bullet \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1\ ; \qquad \bullet \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.}$$

Proposition 7.13.— Inégalités classiques — .

$$\boxed{\bullet\ \forall x \in \mathbb{R},\ |\sin(x)| \leqslant |x| \qquad \bullet\ \forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x) \geqslant 1 - \tfrac{1}{2}x^2}$$

■ Fonctions circulaires réciproques : arc sinus, arc cosinus et arc tangente

Théorème-Définition 7.14.— Arc sinus —. La restriction de la fonction sin à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dans $[-1, 1]$. On appelle **arc sinus** et on note $\operatorname{Arcsin} : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sa bijection réciproque. Ainsi :

$$\boxed{y = \operatorname{Arcsin} x \text{ et } x \in [-1,1] \Longleftrightarrow x = \sin y \text{ et } y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].}$$

Théorème-Définition 7.15.— Arc cosinus —. La restriction de la fonction cos à $[0, \pi]$ est une bijection de $[0, \pi]$ dans $[-1, 1]$. On appelle **arc cosinus** et on note $\operatorname{Arccos} : [-1,1] \to [0, \pi]$ sa bijection réciproque. Ainsi :

$$\boxed{y = \operatorname{Arccos} x \text{ et } x \in [-1,1] \Longleftrightarrow x = \cos y \text{ et } y \in [0, \pi].}$$

Théorème-Définition.— Arc tangente —. La fonction tan est une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$. On appelle **arc tangente** et on note $\operatorname{Arctan} : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sa bijection réciproque. Ainsi :

$$\boxed{y = \operatorname{Arctan} x \text{ et } x \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow x = \tan y \text{ et } y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.}$$

Proposition 7.16.— Les fonctions Arcsin et Arctan sont impaires.

Proposition 7.17.— Pour tout réel $x \in [-1, 1]$, on a :

$$\boxed{\cos(\operatorname{Arcsin} x) = \sqrt{1 - x^2} \quad \text{et} \quad \sin(\operatorname{Arccos} x) = \sqrt{1 - x^2}.}$$

Proposition 7.18.—

- Pour tout $x \in [-1, 1]$, $\operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin} x = \frac{\pi}{2}$.
- Pour tout $x > 0$, $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.
- Pour tout $x < 0$, $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$.

Proposition 7.19.— Continuité et dérivabilité des fonctions circulaires réciproques —.

- La fonction Arcsin est continue sur $[-1, 1]$, dérivable sur $]-1, 1[$ et on a :

$$\boxed{\forall x \in]-1, 1[, \ \operatorname{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.}$$

- La fonction Arccos est continue sur $[-1, 1]$, dérivable sur $]-1, 1[$ et on a :

$$\boxed{\forall x \in]-1, 1[, \ \operatorname{Arccos}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.}$$

- La fonction Arctan est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \ \operatorname{Arctan}'(x) = \frac{1}{1 + x^2}.}$$

■ Fonctions hyperboliques

Définition : Fonctions cosinus et sinus hyperboliques —. *On définit sur $\mathbb{R}$ les fonctions cosinus et sinus hyperboliques en posant :*

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \ ; \qquad \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.}$$

Théorème 7.20.— Relation fondamentale —.

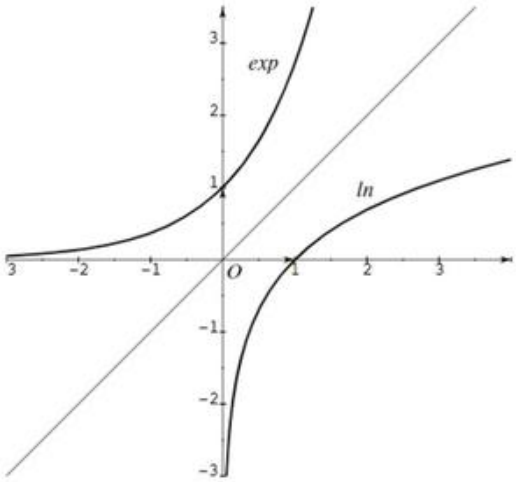
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1.}$$

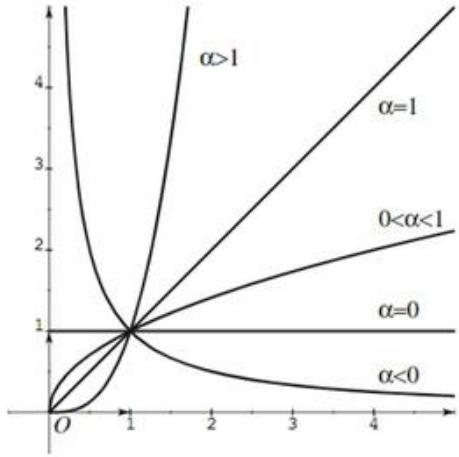
Proposition 7.21.— Propriétés des fonctions hyperboliques —.

- La fonction ch est paire, dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}'(x) = \operatorname{sh}(x)$.
- La fonction sh est impaire, dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sh}'(x) = \operatorname{ch}(x)$.

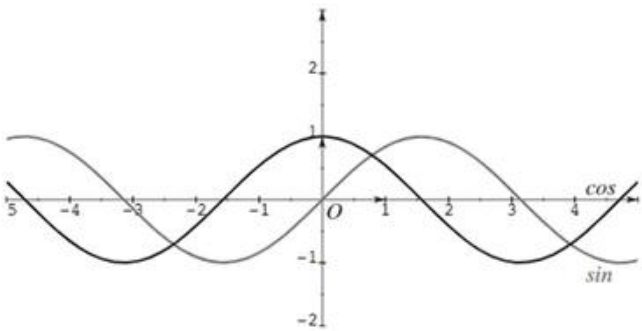
■ Représentation graphique des fonctions usuelles

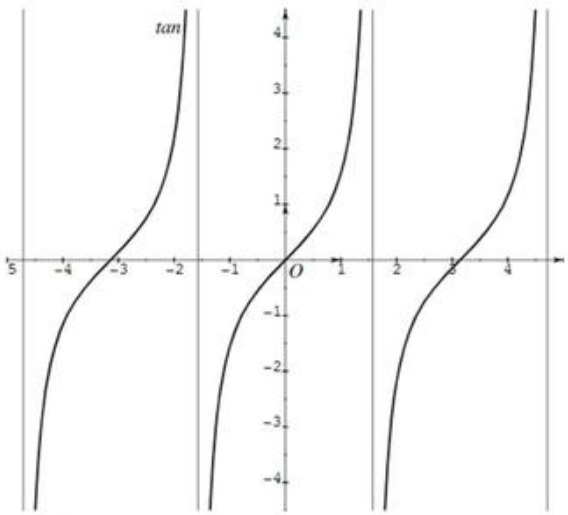
Fonctions logarithme népérien, exponentielle et puissance $x \mapsto x^{\alpha}$



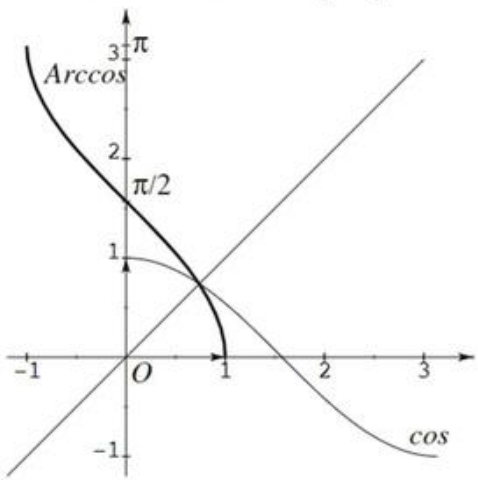


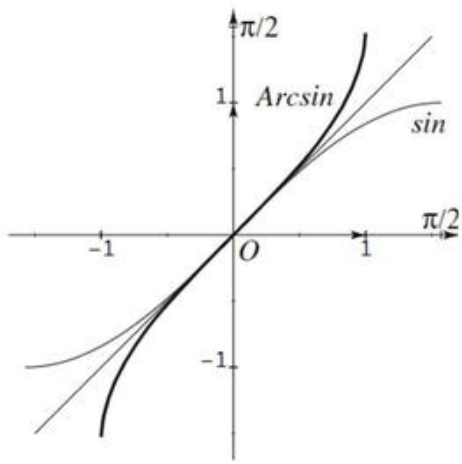
Fonctions circulaires directes



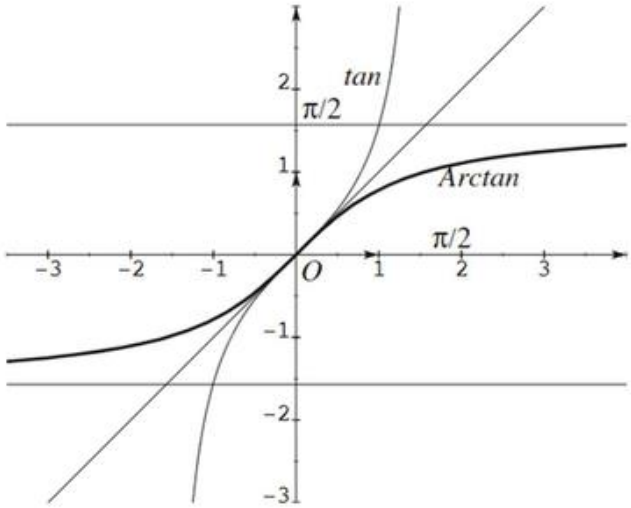


Fonctions circulaires réciproques arc sinus et arc cosinus

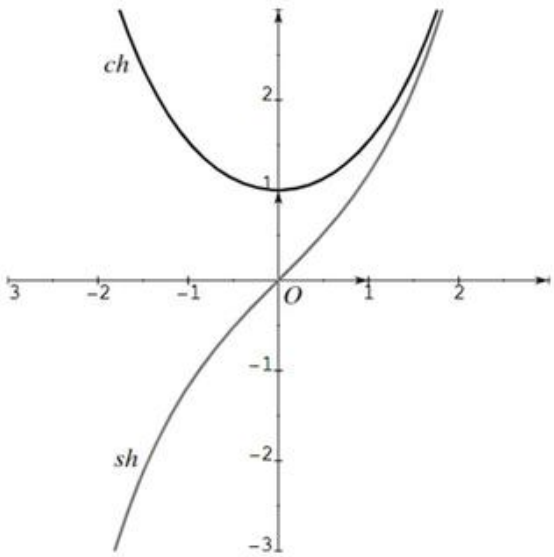




Fonction arc tangente



Fonctions cosinus et sinus hyperboliques



Méthodes

Égalité entre fonctions

Méthode 7.1.— Comment montrer l'égalité de deux fonctions

On souhaite établir l'égalité de deux fonctions sur un intervalle I :

$$\forall x \in I,\ f(x) = g(x). \tag{7.1}$$

Pour cela, on peut :

- montrer que les fonctions f et g ont la même dérivée sur I ; on en déduit qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in I$, $f(x) = g(x) + C$. On montre alors que $C = 0$ en évaluant la dernière relation en un point de I ;
- montrer directement l'égalité (7.1) en utilisant les propriétés des fonctions usuelles.

Exemple : démontrer que, pour tout $x \geqslant 0$, $\text{Arccos}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) = 2\text{Arctan}\sqrt{x}$.

On applique chacune des deux méthodes.

- **Utilisation des dérivées**

  On pose $f(x) = \text{Arccos}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$ et $g(x) = 2\text{Arctan}\sqrt{x}$.

  La fonction $x \mapsto \frac{1-x}{1+x}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, donc sur $\mathbb{R}^+$. Pour tout $x \geqslant 0$, $\frac{1-x}{1+x}$ appartient à $]-1,1]$ et vaut 1 seulement pour $x = 0$. Comme la fonction Arccos est définie, continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$, on en déduit que f est définie, continue sur $\mathbb{R}^+$, et dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$. Par ailleurs, la fonction Arctan est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction racine carrée est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$, dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$. Par composition, g est définie, continue sur $\mathbb{R}^+$ et dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$. On calcule f' et g' sur $\mathbb{R}^{+\star}$:

$$\forall x > 0,\quad f'(x) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)' \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}} = \frac{2}{(1+x)^2}\frac{1+x}{\sqrt{4x}} = \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}$$

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{2}{1+(\sqrt{x})^2} = \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}.$$

  Comme $f' = g'$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$, il existe une constante C telle que, pour tout $x > 0$, $f(x) = g(x) + C$. Par continuité de f et g sur $\mathbb{R}^+$, l'égalité est encore valable pour $x = 0$. On évalue alors cette égalité en 0 : $C = f(0) - g(0) = \text{Arccos}\,1 - 2\text{Arctan}\,0 = 0$. Les fonctions f et g sont donc égales.

- **Méthode directe**

  Soit $x \in \mathbb{R}^+$. On pose $\theta = \text{Arccos}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$. Comme $\frac{1-x}{1+x} \in]-1,1]$, θ appartient à $[0,\pi[$. On a $\cos\theta = \frac{1-x}{1+x}$, d'où $x = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$. Comme $1-\cos\theta = \sin^2\frac{\theta}{2}$ et $1+\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2}$, on en déduit que $x = \tan^2\frac{\theta}{2}$. On a alors $\sqrt{x} = \tan\frac{\theta}{2}$ puisque $\frac{\theta}{2} \in [0, \frac{\pi}{2}[$. On obtient donc $\theta = 2\text{Arctan}\sqrt{x}$, ce qui signifie que $\text{Arccos}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = 2\text{Arctan}\sqrt{x}$.

■ Simplication d'expressions

> ❑ **Méthode 7.2.— Comment simplifier une expression**
> Pour simplifier une expression $f(x)$ formée à partir de fonctions usuelles, on peut :
> - dériver (là où cela est possible) la fonction f. Lorsque la dérivée admet une primitive simple, on intègre la relation précédente et on en déduit une expression simple de $f(x)$;
> - appliquer des relations et propriétés des fonctions usuelles pour simplifier directement l'expression.

Exemple : démontrer la première relation de la **proposition 7.18**

$$\forall x \in [-1,1],\ \operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin} x = \frac{\pi}{2}. \tag{7.2}$$

- **Utilisation de la dérivée**
  Posons $f(x) = \operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin} x$. La fonction f est continue sur $[-1,1]$, dérivable sur $]-1,1[$ et :

$$\forall x \in]-1,1[,\ f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

  Ainsi, f est constante sur $]-1,1[$. Comme f est continue sur $[-1,1]$, on en déduit que f est constante sur l'intervalle $[-1,1]$ tout entier. Or :

$$f(0) = \operatorname{Arccos} 0 + \operatorname{Arcsin} 0 = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2},$$

  donc $f(x) = \dfrac{\pi}{2}$ pour tout $x \in [-1,1]$, ce qui démontre la relation (7.2).
- **Méthode directe**
  Soit $x \in [-1,1]$. On a $\operatorname{Arcsin} x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, donc $\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin} x \in [0,\pi]$. Par ailleurs,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin} x\right) = \sin(\operatorname{Arcsin} x) = x.$$

  Cela montre que $\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin} x = \operatorname{Arccos} x$ (puisque $\operatorname{Arccos} x$ est l'unique élément de $[0,\pi]$ dont le cosinus est égal à x). D'où l'égalité (7.2).

Exemple : simplifier l'expression $f(x) = \operatorname{Arctan}(\sqrt{1+x^2} - x)$.

- **Utilisation de la dérivée**
  La fonction $x \mapsto \sqrt{1+x^2} - x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ (pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + x^2 > 0$). Comme Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition et :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) &= \frac{(\sqrt{1+x^2} - x)'}{1 + (\sqrt{1+x^2} - x)^2} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - 1}{2 + 2x^2 - 2x\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{\frac{x - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}}{2\sqrt{1+x^2}(\sqrt{1+x^2} - x)} = -\frac{1}{2(1+x^2)}.\end{aligned}$$

On en déduit qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{\operatorname{Arctan} x}{2} + C$. En évaluant en 0, on obtient $f(0) = C$, soit $C = \frac{\pi}{4}$. Ainsi, $f(x) = -\frac{\operatorname{Arctan} x}{2} + \frac{\pi}{4}$ pour tout réel x.

- **Méthode directe**
  Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $\theta = \operatorname{Arctan}(\sqrt{1+x^2} - x)$; θ appartient à $]0, \frac{\pi}{2}[$ et $\tan\theta = \sqrt{1+x^2} - x$. On a alors

$$1 + \tan^2\theta = 2 + 2x^2 - 2x\sqrt{1+x^2} = 2\sqrt{1+x^2}(\sqrt{1+x^2} - x) = 2(\tan\theta + x)\tan\theta\ ;$$

d'où :

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tan\theta} - \tan\theta\right) = \frac{1-\tan^2\theta}{2\tan\theta} = \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{2\cos^2\theta\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} = \frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \frac{1}{\tan 2\theta} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right).$$

Comme $\frac{\pi}{2} - 2\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on en déduit que $\frac{\pi}{2} - 2\theta = \operatorname{Arctan} x$, c'est-à-dire $\theta = -\frac{\operatorname{Arctan} x}{2} + \frac{\pi}{4}$. On retrouve ainsi l'expression déterminée précédemment :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -\frac{\operatorname{Arctan} x}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

Mise en œuvre : exercice 7.9, exercice 7.14, exercice 7.15.

■ Comment montrer qu'une fonction est une bijection de I dans J

❑ **Méthode 7.3.**— Pour prouver qu'une fonction f est une bijection d'un intervalle I vers un intervalle J, on utilise le **théorème de la bijection bicontinue** : si f est continue et strictement monotone sur l'intervalle I, f est une bijection de I dans l'intervalle $J = f(I)$. Pour déterminer l'application réciproque de f, on résout, pour $y \in J$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in I$. Pour la mise en œuvre, on pourra également consulter le chapitre **ensembles-applications-relations**.

Exemple : montrer que l'application f définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par $f(x) = \frac{1}{2}\cos^3 x$ est une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}]$ vers un intervalle à préciser et déterminer son application réciproque f^{-1}.
Notons $I = [0, \frac{\pi}{2}]$. L'application f est continue et strictement décroissante sur I (cos est strictement décroissante sur I). Par conséquent, f est une bijection de I dans $f(I) = [f(\frac{\pi}{2}), f(0)] = [0, \frac{1}{2}]$. On considère maintenant un réel $y \in [0, \frac{1}{2}]$ et on résout l'équation $f(x) = y$. On a :

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff \frac{1}{2}\cos^3 x = y \\ &\iff \cos x = \sqrt[3]{2y} \\ &\iff x = \operatorname{Arccos}(\sqrt[3]{2y}). \end{aligned}$$

Ainsi, l'unique antécédent de y par f est $\operatorname{Arccos}(\sqrt[3]{2y})$. L'application réciproque de f est donc la fonction

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & [0, \frac{1}{2}] & \to & [0, \frac{\pi}{2}] \\ & x & \mapsto & \operatorname{Arccos}(\sqrt[3]{2x}) \end{array}$$

Mise en œuvre : exercice 7.4 et exercice 7.16.

Vrai/Faux

	Vrai	Faux
1. La fonction Arccos est définie sur $[0, \pi]$.	☐	☐
2. La fonction Arcsin est continue et dérivable sur $[-1, 1]$.	☐	☐
3. La fonction Arcsin est impaire.	☐	☐
4. La fonction Arccos est paire.	☐	☐
5. Pour tout $x \in [-1, 1]$, $\cos(\text{Arcsin}\, x) = \sin(\text{Arccos}\, x)$.	☐	☐
6. $\cos\left(\text{Arccos}\, \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5}$.	☐	☐
7. $\text{Arccos}\left(\cos \frac{5\pi}{4}\right) = \frac{5\pi}{4}$.	☐	☐
8. $\text{Arccos}\left(\cos \frac{\pi}{9}\right) = \frac{\pi}{9}$.	☐	☐
9. $\text{Arctan}\, x = \frac{1}{\tan x}$.	☐	☐
10. $\text{Arctan}\, x = \frac{\text{Arcsin}\, x}{\text{Arccos}\, x}$.	☐	☐
11. La fonction sh est bijective.	☐	☐
12. La fonction ch est bijective.	☐	☐

Énoncé des exercices

Logarithme népérien, exponentielle et puissances

Exercice 7.1 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $\ln(x^2-1)+\ln 4=\ln(4x-1)$
2. $\ln|x-1|+\ln|x+2|=\ln|4x^2+3x-7|$
3. $2^{x^2}=3^{x^3}$
4. $x^{\sqrt{x}}=(\sqrt{x})^x$
5. $2^{x+1}+4^x=15$
6. $4^x-3^{x-\frac{1}{2}}=3^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x-1}$
7. $\dfrac{\ln x}{\ln a}=\dfrac{\ln a}{\ln x}$, où $a\in]0,1[\cup]1,+\infty[$.
8. $\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}=2$

Exercice 7.2 : On pose $f(x)=x^x$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f, ainsi que les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$.
2. Étudier les variations de la fonction f, puis tracer la courbe représentative de f.

Exercice 7.3 : Résoudre les systèmes d'équations suivants.

1. $\begin{cases} 8^x=10y \\ 2^x=5y \end{cases}$
2. $\begin{cases} x+y=7 \\ \log x+\log y=1 \end{cases}$

Exercice 7.4 : Pour tout $x>0$, on pose $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x-1}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $]0,+\infty[$ dans un intervalle que l'on précisera.
2. Expliciter l'application réciproque de f.

Exercice 7.5* : Montrer que, pour tout $x\in]0,1[$, $x^x(1-x)^{1-x}\geqslant\frac{1}{2}$.

Exercice 7.6 :** Soit $\lambda>0$. On pose $f(x)=e^{\lambda x}$ et on considère l'équation (E) suivante :

$$e^{\lambda e^{\lambda x}}=x.$$

1. Étudier les variations de la fonction f.
2. Soit $x\in\mathbb{R}$ tel que $f(x)=x$. Montrer que x est solution de (E).
3. Réciproquement, montrer que si x est solution de (E), alors $f(x)=x$.
4. Étudier les variations de la fonction $g:x\mapsto f(x)-x$.
5. En déduire, selon les valeurs de λ, le nombre de solutions de l'équation (E).

Exercice 7.7 :** Déterminer tous les entiers strictement positifs m et n vérifiant $n^m=m^n$.

Fonctions circulaires directes et réciproques

Exercice 7.8 : Étudier et tracer la courbe représentative de la fonction définie par

$$f(x)=\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x.$$

Exercice 7.9 : Simplifier les expressions suivantes après avoir donné leur ensemble de définition.

1. $\cos(\operatorname{Arctan} x)$
2. $\sin(\operatorname{Arctan} x)$
3. $\operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arccos}(-x)$

Exercice 7.10* : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $\operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right) + \operatorname{Arccos}\dfrac{3}{5} = \dfrac{\pi}{2}$
2. $\operatorname{Arccos} x = 2\operatorname{Arccos}\dfrac{3}{4}$
3. $\operatorname{Arccos} x = \operatorname{Arccos}\dfrac{1}{4} + \operatorname{Arcsin}\dfrac{1}{3}$
4. $\operatorname{Arccos} x = \operatorname{Arcsin} 2x$

Exercice 7.11 : Étudier, sans la dériver, la fonction définie par

$$f(x) = \operatorname{Arccos}(\cos x) - \frac{1}{2}\operatorname{Arccos}(\cos 2x).$$

Exercice 7.12* : On pose $f(x) = \dfrac{\operatorname{Arccos}(1-x)}{\sqrt{x}}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.

Exercice 7.13* : Montrer que :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \operatorname{Arcsin} x = \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right).$$

Exercice 7.14* : On pose $f(x) = \operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de la fonction f.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathcal{D}$ et calculer sa dérivée.
3. En déduire une expression simple de f.
4. Retrouver ce résultat par une méthode directe.

Exercice 7.15* : Soit $f(x) = \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Donner une expression simple de $f(x)$.

Exercice 7.16* : On note $I =]0, \frac{\pi}{2}]$ et, pour tout $x \in I$, $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de I vers un intervalle à déterminer.
2. Expliciter l'application réciproque de f.
3. Reprendre les questions précédentes en remplaçant I par l'intervalle $J = [\frac{\pi}{2}, \pi[$.

Exercice 7.17* : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la somme S_n en posant :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \text{Arctan}\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right).$$

1. Montrer que, pour tout réel $x \geqslant 0$, $\text{Arctan}\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right) = \text{Arctan}\,(x+1) - \text{Arctan}\,x$.
2. En déduire la valeur de S_n.
3. Déterminer alors la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 7.18 : Formule de Machin (John Machin 1680-1751)**

1. Soit x et y deux réels tels que $0 < x < y$. Calculer $\text{Arctan}\,\frac{x}{y} + \text{Arctan}\,\frac{y-x}{y+x}$.
2. Calculer $4\text{Arctan}\,\frac{1}{5}$.
3. À l'aide des questions précédentes, montrer que : $\frac{\pi}{4} = 4\text{Arctan}\,\frac{1}{5} - \text{Arctan}\,\frac{1}{239}$.

■ Fonctions hyperboliques

Exercice 7.19 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $5\text{ch}\,x - 3\text{sh}\,x = 4$.
2. $3\text{sh}\,x - \text{ch}\,x = 1$.

Exercice 7.20 :

1. Montrer que, pour tout $x \geqslant 0$, $\text{sh}\,x \geqslant x$.
2. Montrer que, pour tout réel x, $\text{ch}\,x \geqslant 1 + \frac{x^2}{2}$.

Exercice 7.21* : Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes $A_n = \sum_{k=0}^{n} \text{ch}\,(kx)$ et $B_n = \sum_{k=0}^{n} \text{sh}\,(kx)$.

Exercice 7.22 :** Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On pose $f(x) = e^{\text{sh}\,x} - x - 1$ et, pour tout $n \geqslant 2$:

$$S_n = \sum_{k=n}^{np} \text{sh}\left(\frac{1}{k}\right).$$

1. Montrer que l'équation $2\text{sh}\,x + 1 = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. *On note a cette solution.*
2. Montrer que, pour tout réel x, $\text{ch}^2 x + \text{sh}\,x \geqslant 0$.
3. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
4. Démontrer que :
$$\forall x \in]0,1[, \quad 1 + x \leqslant e^{\text{sh}\,x} \leqslant \frac{1}{1-x}.$$
5. En déduire que :
$$\forall n \geqslant 2, \quad \ln\left(\frac{np+1}{n}\right) \leqslant S_n \leqslant -\ln\left(\frac{n-1}{np}\right).$$
6. Déterminer alors la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Indications

Ex. 7.1

Pour la dernière équation, on pourra introduire une fonction.

Ex. 7.5

On pourra se ramener à l'étude de la fonction $x \mapsto x \ln x + (1-x)\ln(1-x)$.

Ex. 7.7

On pourra étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ *sur un intervalle convenable.*

Ex. 7.11

Pour $u \in [0, \pi]$, *que vaut* $\operatorname{Arccos}(\cos u)$ *?*

Ex. 7.12

Pour le calcul de limite, effectuer un changement de variable et se ramener à une limite connue.

Ex. 7.13

On pourra poser $y = \operatorname{Arcsin} x$ *et calculer* $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

Ex. 7.15

Appliquer la **méthode 7.2** *!*

Ex. 7.17

Pour la première question, on pourra utiliser la relation $\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$.

Ex. 7.20

Pourquoi ne pas étudier une fonction ?

Ex. 7.21

Que vaut $\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x$ *? Et* $\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x$ *?*

Ex. 7.22

Pour étudier les variations de f, *on pourra dériver deux fois cette fonction.*

Corrigé des vrai/faux

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
F	F	V	F	V	V	F	V	F	F	V	F

1. La fonction Arccos est définie sur $[-1,1]$, à valeurs dans $[0,\pi]$.
2. La fonction Arcsin est continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$.
3. C'est la **proposition 7.16**. Plus généralement, l'application réciproque d'une fonction impaire (respectivement paire) est également impaire (respectivement paire).
4. On a (par exemple) $\text{Arccos}\,(-1)=\pi$ et $\text{Arccos}\,(1)=0$, ce qui montre que Arccos n'est ni paire ni impaire.
5. On a, pour tout $x\in[-1,1]$, $\cos(\text{Arcsin}\,x)=\sin(\text{Arccos}\,x)=\sqrt{1-x^2}$.
6. C'est vrai. Plus généralement, par définition de la fonction Arccos, on a :

$$\forall x\in[-1,1],\ \cos\left(\text{Arccos}\,x\right)=x.$$

7. $\text{Arccos}\left(\cos\frac{5\pi}{4}\right)=\frac{3\pi}{4}$ (unique élément de $[0,\pi]$ dont le cosinus vaut $\cos\frac{5\pi}{4}$).
8. Arccos étant l'application réciproque de la restriction de cos à l'intervalle $[0,\pi]$, on a :

$$\forall x\in[0,\pi],\ \text{Arccos}\left(\cos x\right)=x.$$

9. C'est évidemment faux. Il ne faut pas confondre l'application réciproque (Arctan) et l'inverse.
10. C'est une jolie formule, totalement fausse.
11. En effet, la fonction sh : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une fonction strictement croissante et continue. D'après le **théorème 6.4**, sh est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
12. Par exemple, 0 n'a pas d'antécédent par ch (la fonction ch est à valeurs dans $[1,+\infty[$), donc ch n'est pas surjective (donc pas bijective). Notons que la fonction ch n'est ni injective, ni surjective. En revanche :

— La restriction de la fonction ch à $\mathbb{R}^+$ est une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $[1,+\infty[$.

— La restriction de la fonction ch à $\mathbb{R}_-$ est une bijection de $\mathbb{R}_-$ dans $[1,+\infty[$.

Erreurs classiques

- On a, pour tout $x\in[-1,1]$, $\cos\left(\text{Arccos}\,x\right)=x$. En revanche, $\text{Arccos}\left(\cos x\right)$ n'est pas toujours égal à x (c'est vrai seulement sur $[0,\pi]$). Ne pas oublier que Arccos n'est pas l'application réciproque de la fonction cos (qui n'est pas bijective) mais seulement de sa restriction à l'intervalle $[0,\pi]$. Même difficulté pour Arcsin, Arctan et Argch.
- Ne pas confondre application réciproque et inverse.
- Les fonctions Arcsin et Arccos ne sont pas dérivables en -1 et 1.

Corrigé des exercices

Exercice 7.1

✎ $x^2-1>0$ *ssi* $(x>1$ *ou* $x<-1)$

1. L'équation est définie pour $x^2-1>0$ et $4x-1>0$, c'est-à-dire lorsque $x>1$. On a :

$$\begin{aligned}\ln(x^2-1)+\ln 4=\ln(4x-1) &\iff \ln\left[4(x^2-1)\right]=\ln(4x-1)\\ &\iff 4(x^2-1)=4x-1 \quad \text{et } x>1\\ &\iff 4x^2-4x-3=0 \quad \text{et } x>1\end{aligned}$$

Les racines du trinôme ci-dessus sont $\frac{3}{2}$ et $-\frac{1}{2}$. Seule la première de ces racines appartient à $]1,+\infty[$, $\frac{3}{2}$ est donc l'unique solution de l'équation.

2. L'équation est définie pour $x-1\neq 0$, $x+2\neq 0$ et $4x^2+3x-7\neq 0$. Les racines du trinôme $4x^2+3x-7$ étant 1 et $-\frac{7}{4}$, on en déduit que l'équation est définie pour $x\in D=\mathbb{R}\setminus\{1;-2;-\frac{7}{4}\}$. Comme $4x^2+3x-7=(4x+7)(x-1)$, on a par ailleurs :

$$\forall x\in D,\ \ln|4x^2+3x-7|=\ln|(4x+7)(x-1)|=\ln|4x+7|+\ln|x-1|\ ;$$

✎ $|X|=|Y|$ *ssi* $(X=Y$ *ou* $X=-Y)$

ce qui montre que l'équation équivaut à $|x+2|=|4x+7|$ et $x\in D$. Les solutions sont les éléments de D vérifiant $x+2=4x+7$ ou $x+2=-(4x+7)$. Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation est $\mathcal{S}=\{-\frac{5}{3}\,;\,-\frac{9}{5}\}$.

✎ $2^{x^2}=e^{x^2\ln 2}$ *et* $3^{x^3}=e^{x^3\ln 3}$

3. L'équation est définie sur $\mathbb{R}$ et équivaut à :

$$\begin{aligned}x^2\ln 2=x^3\ln 3 &\iff x^2(\ln 2-x\ln 3)=0\\ &\iff x=0 \text{ ou } x=\frac{\ln 2}{\ln 3}.\end{aligned}$$

D'où l'ensemble des solutions $\mathcal{S}=\left\{0\,;\,\dfrac{\ln 2}{\ln 3}\right\}$.

✎ $a^b=e^{b\ln a}$ *pour tout* $a>0$.

4. Comme $x^{\sqrt{x}}=e^{\sqrt{x}\ln x}$ et $(\sqrt{x})^x=e^{x\ln\sqrt{x}}$, l'équation est définie pour $x>0$. Pour tout $x>0$, on a alors :

$$\begin{aligned}x^{\sqrt{x}}=(\sqrt{x})^x &\iff e^{\sqrt{x}\ln x}=e^{x\ln\sqrt{x}}\\ &\iff \sqrt{x}\ln x=x\ln\sqrt{x}\\ &\iff \sqrt{x}\ln x=\frac{x}{2}\ln x\\ &\iff \sqrt{x}\,\ln x\,(2-\sqrt{x})=0\\ &\iff \ln x=0 \text{ ou } \sqrt{x}=2 \text{ ou } x=0 \text{ (ce qui est exclu car } x>0)\\ &\iff x=1 \text{ ou } x=4.\end{aligned}$$

L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation est donc $\mathcal{S}=\{1\,;\,4\}$.

5. L'équation est définie pour tout réel x. On a $4^x=(2^2)^x=(2^x)^2$ et $2^{x+1}=2\times 2^x$. En posant $X=2^x$, l'équation équivaut donc à :

✎ $X>0$

$$X^2+2X-15=0.$$

Les racines de ce trinôme sont -5 et 3. On revient maintenant à x. L'équation $2^x=-5$ n'a pas de solution ($2^x>0$) et l'équation $2^x=3$ équivaut à $e^{x\ln 2}=3$ soit $x\ln 2=\ln 3$. Ainsi, l'équation admet $\ln 3/\ln 2$ pour unique solution.

6. L'équation est définie sur $\mathbb{R}$. Comme $4^x = (2^2)^x = 2^{2x}$ et $3^{x+\frac{1}{2}} = 3 \times 3^{x-\frac{1}{2}}$, x est solution si et seulement si

$$\begin{aligned}
2^{2x} + 2^{2x-1} = 3^{x-\frac{1}{2}} + 3 \times 3^{x-\frac{1}{2}} &\iff 2^{2x-1}(2+1) = 3^{x-\frac{1}{2}}(3+1) \\
&\iff 3 \times 2^{2x-1} = 2^2 \times 3^{x-\frac{1}{2}} \\
&\iff 2^{2x-3} = 3^{x-\frac{3}{2}} \\
&\iff e^{(2x-3)\ln 2} = e^{(x-\frac{3}{2})\ln 3} \\
&\iff (2x-3)\ln 2 = (x - \frac{3}{2})\ln 3 \\
&\iff x = \frac{3\ln 2 - \frac{3}{2}\ln 3}{2\ln 2 - \ln 3} = \frac{3(\ln 2 - \frac{\ln 3}{2})}{2(\ln 2 - \frac{\ln 3}{2})} = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

On en déduit que la seule solution de cette équation est $\dfrac{3}{2}$.

7. L'équation est définie sur $\mathbb{R}^{+\star} \setminus \{1\}$ et on a :

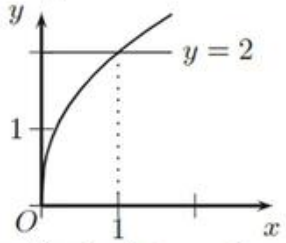
$$\begin{aligned}
\frac{\ln x}{\ln a} = \frac{\ln a}{\ln x} &\iff (\ln x)^2 = (\ln a)^2 \\
&\iff (\ln x + \ln a)(\ln x - \ln a) = 0 \\
&\iff \ln(ax) \times \ln\left(\frac{x}{a}\right) = 0 \\
&\iff ax = 1 \text{ ou } \frac{x}{a} = 1.
\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation est $\mathcal{S} = \{a\,;\, \frac{1}{a}\}$.

8. L'équation est définie sur $\mathbb{R}^+$ et on remarque que 1 est solution de l'équation. Posons $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$ pour tout $x \geqslant 0$. La fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. Comme $f(0) = 0$ et que la limite de f en $+\infty$ est $+\infty$, on en déduit que f est une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$.

f est la somme de deux fonctions strictement croissantes.

Par conséquent, tout $y \geqslant 0$ admet un unique antécédent par f. Comme $f(1) = 2$, 1 est le seul antécédent de 2 et donc l'unique solution de l'équation étudiée.



Autre méthode. En posant $u = \sqrt[3]{x}$, l'équation s'écrit $u^3 + u = 2$, ou encore $u^3 + u - 2 = 0$. Comme $u = 1$ est solution de cette équation, on peut écrire $u^3 + u - 2 = (u-1)(au^2 + bu + c)$, avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. En identifiant, on obtient facilement $a = b = 1$ et $c = 2$. Ainsi, $u^3 + u - 2 = (u-1)(u^2 + u + 2)$. Mais l'équation $u^2 + u + 2 = 0$ n'a pas de racine réelle. Par conséquent, l'unique solution réelle de l'équation $u^3 + u - 2 = 0$ est $u = 1$. Finalement, $x = u^3 = 1$ est l'unique solution de $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = 2$. ▲

Discriminant strictement négatif !

Corrigé

Exercice 7.2

$a^b = e^{b \ln a}$

Croissances comparées pour la limite en 0.

1. Par définition de la fonction puissance, $f(x) = e^{x \ln x}$. La fonction ln est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, et la fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$. Par composition, f est définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R}_+^*$. De plus, on a :

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} x \ln x = +\infty.$$

Par composition de limites, on a donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Dérivée d'une composée.

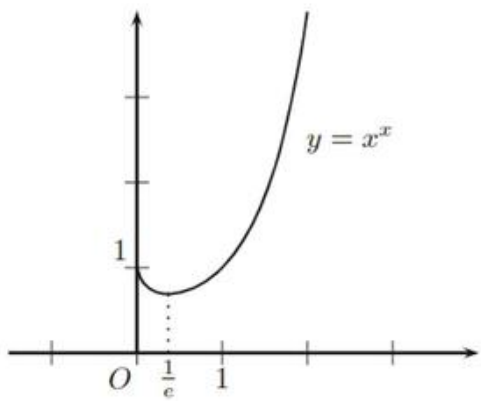
2. La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par composition, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x > 0,\ f'(x) = (x \ln x)' e^{x \ln x} = (\ln x + x \times \frac{1}{x}) e^{x \ln x} = (\ln x + 1) e^{x \ln x}.$$

La fonction f admet un minimum en $\frac{1}{e}$, égal à $(\frac{1}{e})^{\frac{1}{e}} \approx 0,69$.

Comme $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = -\infty$, la courbe représentative de f tend vers le point limite $(0, 1)$ avec une pente infinie.

Comme $e^{x \ln x} > 0$, $f'(x)$ est du signe de $\ln x + 1$. Ainsi, $f'(x) < 0$ sur $]0, \frac{1}{e}[$ et $f'(x) > 0$ sur $]\frac{1}{e}, +\infty[$. On en déduit que f est strictement décroissante sur $]0, \frac{1}{e}]$ et strictement croissante sur $[\frac{1}{e}, +\infty[$. D'où l'allure de la courbe représentative de f :



▲

Exercice 7.3

1. Le système est défini sur $\mathbb{R}^2$ et s'écrit :

$$\begin{cases} 8^x = 10y \\ 2^x = 5y \end{cases} \iff \begin{cases} 8^x = 2 \times 2^x \\ 2^x = 5y \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 4^x = 2 \\ 2^x = 5y \end{cases}.$$

La première équation s'écrit $e^{x \ln 4} = 2$ ou encore $x \ln 4 = \ln 2$. Ainsi $x = 1/2$ et, en revenant à la deuxième équation, on obtient $y = \sqrt{2}/5$. Par conséquent, le couple $(1/2, \sqrt{2}/5)$ est l'unique solution du système.

$\log u = \frac{\ln u}{\ln 10}$

2. Le système est défini pour $x > 0$ et $y > 0$; il est équivalent à :

$$\begin{cases} x+y=7 \\ \ln x+\ln y=\ln 10 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y=7 \\ \ln(xy)=\ln 10 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x+y=7 \\ xy=10 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} y=7-x \\ x(7-x)=10 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} y=7-x \\ x^2-7x+10=0 \end{cases}.$$

Les solutions de l'équation $x^2-7x+10=0$ sont 2 et 5. On a $x=2$ *ssi* $y=5$ et $x=5$ *ssi* $y=2$. Ainsi, le système admet deux couples solutions : $(2,5)$ et $(5,2)$. ▲

$y=7-x$

Exercice 7.4

1. La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. En effet, f est le quotient de deux fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ avec un dénominateur qui ne s'annule pas. Pour tout $x>0$, on a :

$e^x-1\neq 0$ pour tout $x>0$.

$$f'(x)=\frac{e^x(e^x-1)-e^x.e^x}{(e^x-1)^2}=-\frac{e^x}{(e^x-1)^2}<0.$$

La fonction f est donc continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme f tend vers $+\infty$ en 0^+ et vers 1 en $+\infty$, on en déduit que f est une bijection de $]0,+\infty[$ dans $f(]0,+\infty[)=]1,+\infty[$.

Pour la limite de f en $+\infty$, on écrit $f(x)=\frac{e^x}{e^x}\times\frac{1}{1-e^{-x}}$.

2. Pour déterminer l'application réciproque $f^{-1}:]1,+\infty[\to]0,+\infty[$ de f, on applique la **méthode 7.3**. Soit $y>1$. On a :

On résout l'équation $f(x)=y$.

$$\begin{aligned} f(x)=y &\iff \frac{e^x}{e^x-1}=y \\ &\iff e^x(y-1)=y \\ &\iff e^x=\frac{y}{y-1} \qquad \text{car } y-1\neq 0 \\ &\iff x=\ln\left(\frac{y}{y-1}\right) \quad \text{car } \frac{y}{y-1}>0 \end{aligned}$$

Par conséquent, l'unique antécédent de y par f est $\ln\left(\frac{y}{y-1}\right)>0$. L'application réciproque de f est donc la fonction $f^{-1}:]1,+\infty[\to]0,+\infty[$ définie par

$$f^{-1}(x)=\ln\left(\frac{x}{x-1}\right).$$

▲

Exercice 7.5

Pour tout $x\in]0,1[$, on a :

$$x^x(1-x)^{1-x}=e^{x\ln x}e^{(1-x)\ln(1-x)}=e^{x\ln x+(1-x)\ln(1-x)}=e^{u(x)},$$

en notant $u(x)=x\ln x+(1-x)\ln(1-x)$. L'inégalité équivaut à montrer

u est définie sur $]0,1[$.

que $e^{u(x)} \geqslant \frac{1}{2}$, ou encore $u(x) \geqslant -\ln 2$. Nous allons étudier les variations de u et pour cela la dériver deux fois. La fonction u est deux fois dérivable sur $]0,1[$ et :

$$\forall x \in]0,1[,\ \ u'(x) = 1 + \ln x - 1 - \ln(1-x) = \ln x - \ln(1-x)$$
$$u''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1},$$

✎ $\ln x = \ln(1-x) \Leftrightarrow x = 1 - x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

ce qui montre que u' est croissante sur $]0,1[$ ($u'' > 0$ sur $]0,1[$). Comme le seul point d'annulation de u' est $\frac{1}{2}$, on en déduit que u' est négative sur $]0,\frac{1}{2}]$ et positive sur $[\frac{1}{2},1[$. Ainsi, la fonction u est décroissante sur $]0,\frac{1}{2}]$ et croissante sur $[\frac{1}{2},1[$, elle admet un minimum au point $\frac{1}{2}$. Comme $u(\frac{1}{2}) = -\ln 2$, on en déduit que :

$$\forall x \in]0,1[,\ \ u(x) \geqslant -\ln 2$$

ce qui prouve l'inégalité attendue. ▲

Exercice 7.6

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \lambda e^{\lambda x},$$

donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ puisque $\lambda > 0$. Par ailleurs, comme $\lambda > 0$, f tend vers 0 en $-\infty$ et vers $+\infty$ en $+\infty$.

2. On suppose que $f(x) = x$. Alors, $e^{\lambda e^{\lambda x}} = e^{\lambda f(x)} = e^{\lambda x} = x$, ce qui montre que x est solution de l'équation (E).

3. Si x est solution de (E), on a $e^{\lambda e^{\lambda x}} = x$, ce qui s'écrit encore $f(f(x)) = x$. Montrons que, dans ce cas, on a nécessairement $f(x) = x$.

• Si $f(x) > x$, on a alors $f(f(x)) > f(x) > x$ puisque f est strictement croissante. Ceci est impossible étant donné que $f(f(x)) = x$.

• De même, si $f(x) < x$, on a $f(f(x)) < f(x) < x$ (f est strictement croissante), ce qui est impossible puisque $f(f(x)) = x$.

Finalement, on a bien $f(x) = x$. D'après la question précédente, on en déduit que les solutions de (E) sont exactement celles de l'équation $f(x) = x$.

4. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = \lambda e^{\lambda x} - 1.$$

✎ $g'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{\lambda x} > \frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow x > -\frac{\ln \lambda}{\lambda}$

La fonction g est donc strictement décroissante sur $]-\infty, -\frac{\ln\lambda}{\lambda}]$ et strictement croissante sur $[-\frac{\ln\lambda}{\lambda}, +\infty[$. Enfin, on a

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \text{ (croissances comparées) et } \lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty.$$

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{\ln\lambda}{\lambda}$		$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{1+\ln\lambda}{\lambda}$	↗	$+\infty$

5. On a vu (questions **2** et **3**) que les solutions de (E) sont celles de l'équation $f(x) = x$, c'est-à-dire celles de $g(x) = 0$. D'après la question précédente, le nombre de solutions ce cette équation dépend du signe de $\frac{1+\ln\lambda}{\lambda}$. Comme

$$\frac{1+\ln\lambda}{\lambda} > 0 \iff \lambda > \frac{1}{e},$$

le tableau de variations ci-dessus permet de conclure :

- si $\lambda > \dfrac{1}{e}$, l'équation (E) n'a pas de solution ;
- si $\lambda = \dfrac{1}{e}$, l'équation (E) a une unique solution et celle-ci vaut $-\dfrac{\ln\lambda}{\lambda} = e$;
- si $\lambda < \dfrac{1}{e}$, l'équation (E) admet deux solutions distinctes. ▲

Exercice 7.7

Pour $n, m \in \mathbb{R}_+^*$, on a $n^m = e^{m\ln n}$ et $m^n = e^{n\ln m}$, de sorte que

$$\begin{aligned} n^m = m^n &\iff m\ln n = n\ln m \\ &\iff \frac{\ln n}{n} = \frac{\ln m}{m}. \end{aligned}$$

Le problème revient donc à trouver tous les éléments de $\mathbb{N}^*$ qui vérifient $f(n) = f(m)$, où $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Pour cela, étudions les variations de f sur $[1, +\infty[$. La fonction f est dérivable sur cet intervalle et :

$$\forall x \geqslant 1, \quad f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}.$$

Ainsi, f est strictement croissante sur $[1, e]$, strictement décroissante $[e, +\infty[$. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	1		e		$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

Étant donné que $e \in]2, 3[$, on en déduit la discussion suivante.

- Si $m = 1$, alors $f(n) = f(m)$ si et seulement si $f(n) = 0$, soit $n = 1$.
- Si $m = 2$, on sait l'équation $f(x) = \frac{\ln 2}{2}$ admet deux solutions, la première dans $]0, e[$ et la deuxième dans $]e, +\infty[$. Comme $f(2) = f(4) = \frac{\ln 2}{2}$, la première est 2 et la deuxième est 4. Dans ce cas, n est donc égal à 2 ou 4.
- Si $m \geqslant 3$, on a $m > e$ et la solution de l'équation $f(x) = f(m)$ dans l'intervalle $]e, +\infty[$ est donc $x = m$. Quant à la solution appartenant à $]0, e[$, si c'est un entier, c'est nécessairement 2. Ce cas a déjà été étudié ci-dessus. Finalement, les entiers naturels non nuls vérifiant $n^m = m^n$ sont les couples $(2, 4)$, $(4, 2)$ et les couples (n, n), avec $n \in \mathbb{N}^*$. ▲

Exercice 7.8

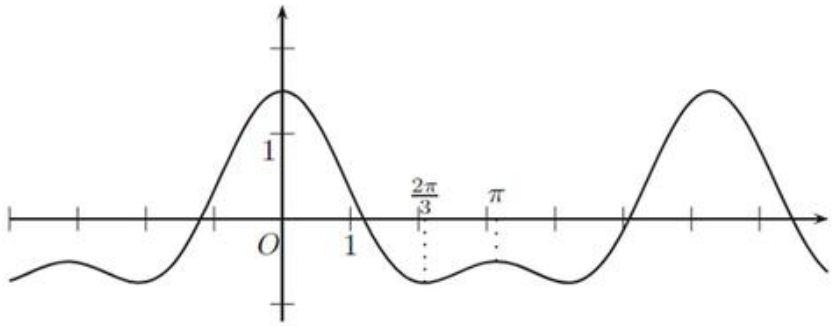
D'après les propriétés de la fonction cosinus, f est clairement définie sur $\mathbb{R}$, paire et 2π-périodique. Il suffit donc d'étudier les variations de f sur $[0, \pi]$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

cos est définie sur $\mathbb{R}$, paire et 2π-périodique.

✐ $\sin 2x = 2\sin x\cos x$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -\sin x - \frac{1}{2} \times 2\sin 2x = 2\sin x[-\frac{1}{2} - \cos x].$$

Comme la fonction sinus est positive sur $[0, \pi]$, le signe de $f'(x)$ sur $[0, \pi]$ est celui de $-\frac{1}{2} - \cos x$. On en déduit que f est strictement décroissante sur $[0, \frac{2\pi}{3}]$ et strictement croissante sur $[\frac{2\pi}{3}, \pi]$. Notons que, sur $[0, \pi]$, f' s'annule en 0, $\frac{2\pi}{3}$ et π (points à tangente horizontale). On en déduit l'allure de la courbe représentative de f.



▲

Exercice 7.9

✐ $\cos^2 u = \frac{1}{1+\tan^2 u}$

1. Les fonctions Arctan et cos sont définies sur $\mathbb{R}$. Par composition, l'expression est définie pour tout réel x. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\cos^2(\text{Arctan}\, x) = \frac{1}{1 + \tan^2(\text{Arctan}\, x)} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

✐ $\text{Arctan}\, x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

Comme $\cos(\text{Arctan}\, x) \geqslant 0$, on en déduit que :

$$\cos(\text{Arctan}\, x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

2. L'expression est définie sur $\mathbb{R}$ par composition (les fonctions Arctan et sin sont définies sur $\mathbb{R}$). Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\tan(\text{Arctan}\, x) = \frac{\sin(\text{Arctan}\, x)}{\cos(\text{Arctan}\, x)} = x$$

et la question précédente montre alors que :

$$\sin(\text{Arctan}\, x) = x\cos(\text{Arctan}\, x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

3. La fonction Arccos étant définie sur $[-1, 1]$, l'expression est définie lorsque x et $-x$ sont dans l'intervalle $[-1, 1]$, c'est-à-dire sur $[-1, 1]$. En notant, pour $x \in [-1, 1]$, $f(x) = \text{Arccos}\, x + \text{Arccos}\,(-x)$, il vient :

$$\begin{aligned}\cos f(x) &= \cos(\text{Arccos}\, x)\cos(\text{Arccos}\,(-x)) - \sin(\text{Arccos}\, x)\sin(\text{Arccos}\,(-x)) \\ &= -x^2 - \left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 = -1.\end{aligned}$$

✐ *π est l'unique élément de $[0, 2\pi]$ dont le cosinus est égal à -1.*

Par ailleurs, $f(x) \in [0, 2\pi]$ puisque $\text{Arccos}\, x$ et $\text{Arccos}\,(-x)$ appartiennent tous les deux à $[0, \pi]$. On en déduit donc que $f(x) = \pi$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in [-1,1], \quad \operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arccos}(-x) = \pi.$$

▲

Exercice 7.10

1. L'équation est définie pour tout réel x (pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{1+x^2} \in [-1,1]$). D'après la **proposition 7.18**, l'équation s'écrit aussi :

✎ $\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arccos}\frac{3}{5} = \operatorname{Arcsin}\frac{3}{5}$

$$\operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \operatorname{Arcsin}\frac{3}{5}.$$

Comme ces deux nombres appartiennent à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et que la fonction sinus est bijective sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, l'équation équivaut à :

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{3}{5}.$$

Ainsi, x est solution si et seulement si $x^2 = \frac{2}{3}$. D'où l'ensemble des solutions :

$$\mathcal{S} = \left\{\sqrt{\frac{2}{3}}; -\sqrt{\frac{2}{3}}\right\}.$$

2. L'équation est définie pour $x \in [-1,1]$. Par ailleurs, $\operatorname{Arccos}\frac{3}{4} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ puisque $0 \leqslant \frac{3}{4} \leqslant 1$. Ainsi, les deux membres de l'équation appartiennent à $[0,\pi]$. Leur égalité équivaut donc à celle de leur cosinus :

✎ *Deux éléments de $[0,\pi]$ sont égaux ssi ils ont le même cosinus.*

$$\begin{aligned}\cos(\operatorname{Arccos} x) = \cos\left(2\operatorname{Arccos}\frac{3}{4}\right) &\iff x = 2\cos^2\left(\operatorname{Arccos}\frac{3}{4}\right) - 1\\ &\iff x = 2 \times \frac{9}{16} - 1 = \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

L'unique solution de l'équation est donc $\frac{1}{8}$.

3. L'équation est définie pour $x \in [-1,1]$. Comme $0 \leqslant \frac{1}{4} \leqslant 1$ et $0 \leqslant \frac{1}{3} \leqslant 1$, on a :

✎ Arccos *décroît sur* $[0,1]$ *et* Arcsin *croît sur* $[0,1]$.

$$0 \leqslant \operatorname{Arccos}\frac{1}{4} \leqslant \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \operatorname{Arcsin}\frac{1}{3} \leqslant \frac{\pi}{2},$$

donc

$$0 \leqslant \operatorname{Arccos}\frac{1}{4} + \operatorname{Arcsin}\frac{1}{3} \leqslant \pi,$$

et les deux membres de l'équation appartiennent à $[0,\pi]$. Un réel $x \in [-1,1]$ est alors solution si et seulement si :

✎ *Deux éléments de $[0,\pi]$ sont égaux ssi ils ont le même cosinus.*

$$\cos(\operatorname{Arccos} x) = \cos\left(\operatorname{Arccos}\frac{1}{4} + \operatorname{Arcsin}\frac{1}{3}\right).$$

Corrigé

Formule d'addition donnant $\cos(a+b)$.

Comme

$$\begin{aligned}\cos\left(\operatorname{Arccos}\frac{1}{4}+\operatorname{Arcsin}\frac{1}{3}\right) &= \frac{1}{4}\cos\left(\operatorname{Arcsin}\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3}\sin\left(\operatorname{Arccos}\frac{1}{4}\right)\\ &= \frac{1}{4}\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}-\frac{1}{3}\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}\\ &= \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{15}}{12},\end{aligned}$$

l'unique solution de l'équation est $\dfrac{2\sqrt{2}-\sqrt{15}}{12}$.

4. L'équation est définie pour $x \in [-1,1]$ et $2x \in [-1,1]$, c'est-à-dire lorsque $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Comme

$$0 \leqslant \operatorname{Arccos} x \leqslant \pi \quad \text{et} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \operatorname{Arcsin} 2x \leqslant \frac{\pi}{2},$$

l'égalité ne peut avoir lieu que lorsque ces deux nombres appartiennent à $[0, \frac{\pi}{2}]$, c'est-à-dire lorsque $x \in [0,1]$ et $2x \in [0,1]$. On considère donc un réel $x \in [0, \frac{1}{2}]$. L'équation équivaut alors à :

Deux éléments de $[0, \frac{\pi}{2}]$ sont égaux ssi ils ont le même sinus.

$$\begin{aligned}\sin(\operatorname{Arccos} x) = \sin(\operatorname{Arcsin} 2x) \text{ et } x \in [0,\frac{1}{2}] &\iff \sqrt{1-x^2} = 2x \text{ et } x \in [0,\frac{1}{2}]\\ &\iff 1-x^2 = 4x^2 \text{ et } x \in [0,\frac{1}{2}]\\ &\iff 5x^2 = 1 \text{ et } x \in [0,\frac{1}{2}]\end{aligned}$$

Par conséquent, $\frac{1}{\sqrt{5}}$ est l'unique solution de cette équation. ▲

Exercice 7.11

cos est définie sur $\mathbb{R}$, paire et 2π-périodique.

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, paire et 2π-périodique d'après les propriétés de la fonction cosinus. Il suffit donc de l'étudier $[0,\pi]$. On sait que, pour tout réel $x \in [0,\pi]$, $\operatorname{Arccos}(\cos x) = x$, donc :

Si $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $2x \in [0,\pi]$.

$$\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}],\ \operatorname{Arccos}(\cos 2x) = 2x,$$

$\operatorname{Arccos}(\cos 2x)$ est l'unique élément de $[0,\pi]$ dont le cosinus vaut $\cos 2x$.

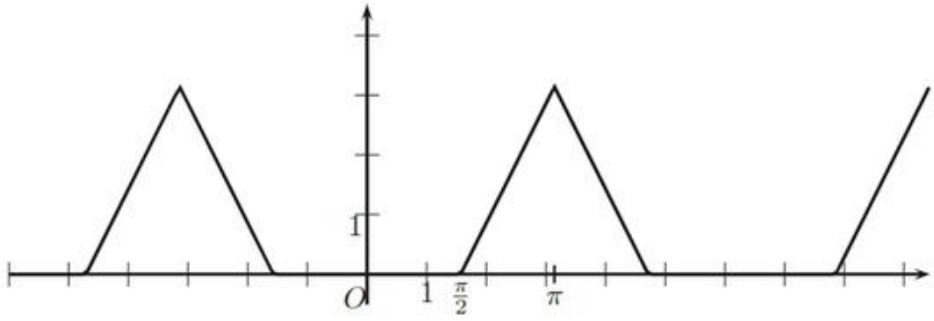
ce qui montre que $f(x) = 0$ lorsque $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. De plus, pour $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, $2\pi - 2x$ appartient à $[0,\pi]$ et a le même cosinus que $2x$, donc :

$$\forall x \in [\frac{\pi}{2},\pi],\ \operatorname{Arccos}(\cos 2x) = 2\pi - 2x,$$

ce qui montre que $f(x) = x - \frac{1}{2}(2\pi - 2x) = 2x - \pi$ pour $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$. Ainsi,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,\frac{\pi}{2}] \\ 2x-\pi & \text{si } x \in [\frac{\pi}{2},\pi] \end{cases}$$

Comme f est paire et 2π-périodique, on en déduit sa courbe représentative :



▲

Exercice 7.12

1. La fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction Arccos est définie sur $[-1,1]$. Par conséquent, f est définie en tout point x vérifiant $x > 0$ et $0 \leqslant x \leqslant 2$. L'ensemble de définition de f est donc $]0,2]$.

$1 - x \in [-1,1] \Leftrightarrow x \in [0,2]$

2. Cette limite est *a priori* indéterminée puisque, lorsque x tend vers 0^+, le numérateur et le dénominateur ont tous les deux pour limite 0. Effectuons un changement de variable en posant $u = \operatorname{Arccos}(1-x)$. On a $u \in [0,\pi]$ et $\cos u = 1 - x$. Alors $x = 1 - \cos u$ et

$\cos(\operatorname{Arccos} t) = t$ pour tout $t \in [-1,1]$.

$$f(x) = \frac{u}{\sqrt{1-\cos u}}.$$

On recherche la limite de cette expression lorsque u tend vers 0^+ puisque $\lim\limits_{x\to 0^+} u = \operatorname{Arccos} 1 = 0$. On sait que

Limite à connaître !

$$\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t^2} = \frac{1}{2},$$

on en déduit que

$$\lim_{u\to 0^+} \frac{u}{\sqrt{1-\cos u}} = \sqrt{2}.$$

Ainsi, la limite de f en 0^+ est $\sqrt{2}$. ▲

Exercice 7.13

Notons tout d'abord que les deux membres de l'égalité existent pour tout $x \in]-1,1[$. D'une part, comme la fonction Arcsin est définie sur $[-1,1]$, $\operatorname{Arcsin} x$ existe. D'autre part, pour $x \in]-1,1[$, $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ existe donc son arc tangente aussi. Nous allons maintenant prouver l'égalité par un calcul direct (on pourrait également utiliser les dérivées de chacune de ces deux fonctions). Soit $x \in]-1,1[$, posons $y = \operatorname{Arcsin} x$. On a donc $x = \sin y$, $y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et :

Arctan est définie sur $\mathbb{R}$.

Méthode 7.2

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sin y}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{\sin y}{\sqrt{\cos^2 y}} = \frac{\sin y}{|\cos y|} = \frac{\sin y}{\cos y} = \tan y.$$

Comme $y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\cos y$ est positif.

Corrigé

Comme $y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on en déduit que $y = \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$, c'est-à-dire :

$$\operatorname{Arcsin} x = \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right).$$

▲

Exercice 7.14

✎ Arcsin *est définie sur* $[-1, 1]$.

1. Tout d'abord, la fonction $u : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ est définie sur $\mathbb{R}$. On cherche maintenant les valeurs de x pour lesquelles $u(x)$ appartient à $[-1, 1]$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|x| < \sqrt{x^2+1}$, donc

$$-1 < \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1.$$

Comme la fonction u est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $]-1, 1[\subset [-1, 1]$, la fonction f est définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

2. On sait que la fonction Arcsin est dérivable sur $]-1, 1[$. La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $]-1, 1[$. Comme $f = \operatorname{Arcsin} \circ u$, on en déduit, par composition, que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

✎ $(\operatorname{Arcsin} \circ u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)' \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2}} = \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+1}}} \\ &= \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \times \sqrt{x^2+1} = \frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

3. On vient de voir que f a la même dérivée que la fonction Arctan. Par conséquent, ces deux fonctions sont égales à une constante C près :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \operatorname{Arctan} x + C.$$

Comme $f(0) = \operatorname{Arcsin} 0 = 0$ et $f(0) = \operatorname{Arctan} 0 = 0$, on en déduit que la constante C est nulle. Ainsi, f est la fonction arc tangente.

✎ **Méthode 7.2**

✎ Arcsin x *est du signe de* x.

4. On pose $\theta = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$. Comme $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \in]-1, 1[$, θ appartient à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Notons que θ et x sont du même signe puisque $\sqrt{x^2+1} > 0$. Par ailleurs, on a $\sin\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, donc $x^2 = (x^2+1)\sin^2\theta$. Comme $\sin\theta \neq \pm 1$ ($\theta \neq \pm\frac{\pi}{2}$), on en déduit que :

$$x^2 = \frac{\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta} = \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \tan^2\theta\ ;$$

d'où $x = \tan\theta$ puisque x est θ sont du même signe. On obtient finalement $\theta = \operatorname{Arctan} x$, c'est-à-dire $f(x) = \operatorname{Arctan} x$. On retrouve ainsi le fait que f est la fonction arc tangente. ▲

Exercice 7.15

1. La fonction $x \mapsto \frac{1-x}{1+x}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et la fonction racine carrée est définie sur $\mathbb{R}_+$. On a $\frac{1-x}{1+x} \geqslant 0$ si et seulement si $x \in]-1, 1]$. Comme la fonction Arctan est définie sur $\mathbb{R}$, on en déduit que f est définie sur $]-1, 1]$.

2. On applique la **méthode 7.2**. Pour cela, on peut calculer la dérivée de f (en n'oubliant pas de justifier !) ou bien simplifier directement $f(x)$. Choisissons cette dernière possibilité et considérons un élément x de $]-1,1]$. On pose

$$\theta = f(x) = \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) ;$$

θ appartient à $[0, \frac{\pi}{2}[$ puisque $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \geqslant 0$. Par ailleurs, on a $\tan\theta = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, donc

$$\tan^2\theta = \frac{1-x}{1+x}.$$

On en déduit que :

$$x = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \cos^2\theta(1-\tan^2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta.$$

Comme 2θ appartient à $[0,\pi[$, on a alors $2\theta = \operatorname{Arccos} x$ ou encore $\theta = \frac{\operatorname{Arccos} x}{2}$.
Finalement, cela montre que, pour tout $x \in]-1,1]$, $f(x) = \dfrac{\operatorname{Arccos} x}{2}$. ▲

Exercice 7.16

1. La fonction sinus est continue, strictement croissante et ne s'annule pas sur l'intervalle I. Par conséquent, la fonction f, inverse de cette fonction, est continue et strictement décroissante sur I. Par ailleurs, $f(\frac{\pi}{2}) = 1$ et $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures. On peut donc en déduire que f réalise une bijection de I vers $f(I) = [1,+\infty[$.

✎ $\forall x \in I,\ \sin x \neq 0$

✎ $\lim\limits_{x\to 0^+} \sin x = 0^+$

2. Notons $g : [1,+\infty[\to]0,\frac{\pi}{2}]$ l'application réciproque de f. On détermine g à l'aide de la **méthode 7.3** pour déterminer g. Soit $y \geqslant 1$; on a :

✎ *On résout l'équation $f(x) = y$.*

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff \frac{1}{\sin x} = y \\ &\iff \sin x = \frac{1}{y}. \end{aligned}$$

L'unique solution de cette équation appartenant à $]0,\frac{\pi}{2}]$ est $\operatorname{Arcsin}(\frac{1}{y})$. Par conséquent, $\operatorname{Arcsin}(\frac{1}{y})$ est l'unique antécédent de y par f et g est donnée par :

$$\begin{array}{rccc} g: & [1,+\infty[& \to &]0,\frac{\pi}{2}] \\ & x & \mapsto & \operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{1}{x}\right) \end{array}.$$

3. Dans ce cas, la fonction $\frac{1}{\sin}$ est continue et strictement croissante sur l'intervalle J (sin est continue, strictement décroissante et ne s'annule pas sur J). On en déduit que cette fonction est une bijection de J vers $[1,+\infty[$ (intervalle image de J). On note $h : [1,+\infty[\to [\frac{\pi}{2},\pi[$, l'application réciproque de $\frac{1}{\sin}$ sur J et on considère un élément $y \in [1,+\infty[$. On a :

✎ $\lim\limits_{x\to\pi^-} \sin x = 0^+$

✎ *On applique encore la* **méthode 7.3**.

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff \frac{1}{\sin x} = y \\ &\iff \sin x = \frac{1}{y}. \end{aligned}$$

Corrigé

L'unique élément de $[\frac{\pi}{2}, \pi[$ dont le sinus est égal à $\frac{1}{y}$ est $\pi - \text{Arcsin}\,(\frac{1}{y})$. Ainsi, l'unique antécédent de y par f est donc $\pi - \text{Arcsin}\,(\frac{1}{y})$ est h est l'application

$\pi - \text{Arcsin}\,(\frac{1}{y})$ est l'unique élément de $]\frac{\pi}{2}, \pi]$ qui a le même sinus que $\text{Arcsin}\,\frac{1}{y}$.

$$\begin{array}{rccc} h: & [1, +\infty[& \to & [\frac{\pi}{2}, \pi[\\ & x & \mapsto & \pi - \text{Arcsin}\left(\dfrac{1}{x}\right) \end{array}.$$

▲

Exercice 7.17

1. On peut montrer cette égalité en dérivant chacun des membres ou bien utiliser la formule d'addition rappelée en indication. Soit $x \in \mathbb{R}_+$; on pose

$$\theta = \text{Arctan}\,(x+1) - \text{Arctan}\,x.$$

Comme la fonction Arctan est croissante sur $\mathbb{R}$ et $\text{Arctan}\,t \in [0, \frac{\pi}{2}[$ pour $t \geqslant 0$, on a :

$$0 < \text{Arctan}\,(x+1) - \text{Arctan}\,x \leqslant \text{Arctan}\,(x+1) < \frac{\pi}{2},$$

Formule d'addition donnant $\tan(a-b)$.

ce qui montre que θ appartient à $]0, \frac{\pi}{2}[$. Par ailleurs

$$\tan\theta = \frac{\tan(\text{Arctan}\,(x+1)) - \tan(\text{Arctan}\,x)}{1 + \tan(\text{Arctan}\,(x+1))\tan(\text{Arctan}\,x)} = \frac{x+1-x}{1+(x+1)x} = \frac{1}{1+x+x^2}.$$

$\text{Arctan}\,t$ est l'unique élément de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dont la tangente vaut t.

Comme θ appartient à $]0, \frac{\pi}{2}[$ et a pour tangente $\frac{1}{1+x+x^2}$, on a donc :

$$\theta = \text{Arctan}\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right).$$

2. En appliquant la question précédente à tout entier $k \in \{0, \cdots, n\}$, on obtient une somme télescopique :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} (\text{Arctan}\,(k+1) - \text{Arctan}\,k) \\ &= (\text{Arctan}\,1 - \text{Arctan}\,0) + \cdots + (\text{Arctan}\,(n+1) - \text{Arctan}\,n) \\ &= \text{Arctan}\,(n+1) - \text{Arctan}\,0 = \text{Arctan}\,(n+1). \end{aligned}$$

3. On vient de voir que $S_n = \text{Arctan}\,(n+1)$. Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \text{Arctan}\,x = \dfrac{\pi}{2}$, on en déduit que :

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{\pi}{2}.$$

▲

Exercice 7.18

$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$

1. On a :

$$\begin{aligned} \tan\left(\text{Arctan}\,\frac{x}{y} + \text{Arctan}\,\frac{y-x}{y+x}\right) &= \frac{\tan\left(\text{Arctan}\,\frac{x}{y}\right) + \tan\left(\text{Arctan}\,\frac{y-x}{y+x}\right)}{1 - \tan\left(\text{Arctan}\,\frac{x}{y}\right)\tan\left(\text{Arctan}\,\frac{y-x}{y+x}\right)} \\ &= \frac{\frac{x}{y} + \frac{y-x}{y+x}}{1 - \frac{x}{y}\frac{y-x}{y+x}} = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1. \end{aligned}$$

Par ailleurs, comme $\frac{x}{y}$ et $\frac{y-x}{y+x}$ appartiennent à $]0,1[$, $\operatorname{Arctan}\frac{x}{y}$ et $\operatorname{Arctan}\frac{y-x}{y+x}$ appartiennent à $]0,\frac{\pi}{4}[$; d'où :

$$\operatorname{Arctan}\frac{x}{y}+\operatorname{Arctan}\frac{y-x}{y+x}\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[.$$

Comme ce nombre a pour tangente 1, on en déduit qu'il est égal à $\dfrac{\pi}{4}$:

$$\operatorname{Arctan}\frac{x}{y}+\operatorname{Arctan}\frac{y-x}{y+x}=\frac{\pi}{4}.$$

2. Tout d'abord, comme $\frac{1}{5}\in]0,1[$, $\operatorname{Arctan}\frac{1}{5}\in]0,\frac{\pi}{4}[$, donc $4\operatorname{Arctan}\frac{1}{5}$ appartient à l'intervalle $]0,\pi[$. Par ailleurs, on a

$$\tan\left(2\operatorname{Arctan}\frac{1}{5}\right)=\frac{2\tan\left(\operatorname{Arctan}\frac{1}{5}\right)}{1-\tan^2\left(\operatorname{Arctan}\frac{1}{5}\right)}=\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}}=\frac{5}{12},$$

puis :

$\tan 2a=\frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$

$$\tan\left(4\operatorname{Arctan}\frac{1}{5}\right)=\frac{2\tan\left(2\operatorname{Arctan}\frac{1}{5}\right)}{1-\tan^2\left(2\operatorname{Arctan}\frac{1}{5}\right)}=\frac{\frac{10}{12}}{1-\frac{25}{144}}=\frac{120}{119}.$$

Comme $\tan\left(4\operatorname{Arctan}\frac{1}{5}\right)>0$ et $4\operatorname{Arctan}\frac{1}{5}\in]0,\pi[$, $4\operatorname{Arctan}\frac{1}{5}\in]0,\frac{\pi}{2}[$; on déduit alors de l'égalité précédente que $4\operatorname{Arctan}\frac{1}{5}=\operatorname{Arctan}\frac{120}{119}$.

3. On applique la question **1** à $x=1$ et $y=239$:

$$\operatorname{Arctan}\frac{1}{239}+\operatorname{Arctan}\frac{119}{120}=\frac{\pi}{4}.$$

Comme $\operatorname{Arctan}\frac{119}{120}=\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arctan}\frac{120}{119}=\frac{\pi}{2}-4\operatorname{Arctan}\frac{1}{5}$, on obtient finalement : **Proposition 7.18**

$$\frac{\pi}{4}=4\operatorname{Arctan}\frac{1}{5}-\operatorname{Arctan}\frac{1}{239}.$$

Cette formule permit à John Machin de calculer cent décimales de π en 1706.

▲

Exercice 7.19

1. L'équation est définie pour tout réel x et

$$5\operatorname{ch}x-3\operatorname{sh}x=5\frac{e^x+e^{-x}}{2}-3\frac{e^x-e^{-x}}{2}=e^x+4e^{-x}.$$

Par conséquent, x est solution si et seulement si

$$e^x+\frac{4}{e^x}=4\iff\frac{e^{2x}-4e^x+4}{e^x}=0\ ;$$

ce qui s'écrit aussi $(e^x-2)^2=0$ ou encore $e^x=2$. Finalement, l'équation admet une unique solution : $\ln 2$.

2. L'équation est définie sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$3\operatorname{sh}x-\operatorname{ch}x-1=3\frac{e^x-e^{-x}}{2}-\frac{e^x+e^{-x}}{2}-1=e^x-2e^{-x}-1=\frac{e^{2x}-e^x-2}{e^x}.$$

✎ $X > 0$

Ainsi, x est solution si et seulement si $e^{2x} - e^x - 2 = 0$, ce qui s'écrit aussi $X^2 - X - 2 = 0$ en posant $X = e^x$. Ce trinôme a pour racines -1 et 2. Cela montre que x est solution si et seulement si $e^x = -1$ (impossible) ou $e^x = 2$. L'unique solution de l'équation est donc $\ln 2$. ▲

Exercice 7.20

Dans les deux cas, on prouve l'inégalité grâce à une étude de fonction.

✎ *ch est à valeurs dans* $[1, +\infty[$.

1. Pour $x \geqslant 0$, on pose $f(x) = \operatorname{sh} x - x$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et on a :

$$\forall x \geqslant 0,\ f'(x) = \operatorname{ch} x - 1 \geqslant 0.$$

On en déduit que f est croissante. Comme $f(0) = 0$, on a donc $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \geqslant 0$. Ainsi, pour tout $x \geqslant 0$, $\operatorname{sh} x \geqslant x$.

2. On pose maintenant $g(x) = \operatorname{ch} x - 1 - \frac{x^2}{2}$ pour $x \in \mathbb{R}$. La fonction g est paire et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour $x \geqslant 0$, on a

$$g'(x) = \operatorname{sh} x - x = f(x).$$

On a vu à la question précédente que f est positive sur $\mathbb{R}^+$, ce qui montre que g est croissante. Comme $g(0) = \operatorname{ch} 0 - 1 = 0$, on en déduit que g est positive sur $\mathbb{R}^+$, donc sur $\mathbb{R}$ par parité. Cela démontre l'inégalité attendue. ▲

✎ *g est paire.*

Exercice 7.21

Tout d'abord, lorsque $x = 0$, on a $A_n = n + 1$ et $B_n = 0$ (car $\operatorname{ch}(0) = 1$ et $\operatorname{sh}(0) = 0$). On suppose désormais que x est non nul. On va déterminer A_n et B_n en calculant leur somme et leur différence, ce qui permet de faire apparaître la somme des termes d'une suite géométrique. Comme $\operatorname{ch} u + \operatorname{sh} u = e^u$, on a :

✎ *Progression des termes d'une suite géométrique de raison* $e^x \neq 1$.

$$\begin{aligned} A_n + B_n &= \sum_{k=0}^{n} [\operatorname{ch}(kx) + \operatorname{sh}(kx)] = \sum_{k=0}^{n} e^{kx} = \sum_{k=0}^{n} (e^x)^k = \frac{1 - e^{(n+1)x}}{1 - e^x} \\ &= \frac{e^{\frac{(n+1)x}{2}} \left(e^{-\frac{(n+1)x}{2}} - e^{\frac{(n+1)x}{2}}\right)}{e^{\frac{x}{2}} \left(e^{-\frac{x}{2}} - e^{\frac{x}{2}}\right)} = e^{\frac{nx}{2}} \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right)}. \end{aligned}$$

✎ *On applique le même raisonnement en changeant x en $-x$ et la dernière égalité résulte de l'imparité de la fonction* sh.

Comme $\operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u = e^{-u}$, on obtient de même :

$$\begin{aligned} A_n - B_n &= \sum_{k=0}^{n} [\operatorname{ch}(kx) - \operatorname{sh}(kx)] = \sum_{k=0}^{n} e^{-kx} = \sum_{k=0}^{n} \left(e^{-x}\right)^k \\ &= e^{-\frac{nx}{2}} \frac{\operatorname{sh}\left(-\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\operatorname{sh}\left(-\frac{x}{2}\right)} = e^{-\frac{nx}{2}} \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right)}. \end{aligned}$$

On en déduit la valeur de A_n en écrivant $A_n = \frac{1}{2}(A_n + B_n + A_n - B_n)$:

$$A_n = \frac{1}{2}(e^{\frac{nx}{2}} + e^{-\frac{nx}{2}}) \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right)} = \operatorname{ch}\left(\frac{nx}{2}\right) \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

De même, en écrivant $B_n = \frac{1}{2}[A_n + B_n - (A_n - B_n)]$, on obtient :

$$B_n = \frac{1}{2}(e^{\frac{nx}{2}} - e^{-\frac{nx}{2}}) \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right)} = \operatorname{sh}\left(\frac{nx}{2}\right) \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

▲

Exercice 7.22

1. Comme sh est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, l'équation $\operatorname{sh} x = -\frac{1}{2}$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. En notant a cette solution, on a donc $2\operatorname{sh} a + 1 = 0$.

On peut aussi étudier la fonction $x \mapsto 2\operatorname{sh} x + 1$.

2. Posons $u(x) = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh} x$. La fonction u est définie, dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ u'(x) = 2\operatorname{ch} x \operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x = \operatorname{ch} x(2\operatorname{sh} x + 1).$$

Le signe de u' est celui de $2\operatorname{sh} x + 1$ (ch est positive sur $\mathbb{R}$). Comme sh est croissante sur $\mathbb{R}$, $2\operatorname{sh} x + 1$ est négatif sur $]-\infty, a]$ et positif sur $[a, +\infty[$. Cela montre que u est décroissante sur $]-\infty, a]$ et croissante sur $[a, +\infty[$. Or, comme $\operatorname{sh} a = -\frac{1}{2}$ et $\operatorname{ch}^2 a - \operatorname{sh}^2 a = 1$, on a :

$2\operatorname{sh} x + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant a$

$$u(a) = \operatorname{ch}^2 a + \operatorname{sh} a = 1 + \operatorname{sh}^2 a + \operatorname{sh} a = 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}\ ;$$

ce qui montre que $u(a)$ est positif, donc que la fonction u est positive sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		a		$+\infty$
$u(x)$		$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	

3. La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \operatorname{ch} x e^{\operatorname{sh} x} - 1 \qquad \text{et} \qquad f''(x) = (\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh} x)e^{\operatorname{sh} x} = u(x)e^{\operatorname{sh} x}.$$

D'après la question précédente, f'' est positive, donc f' est croissante sur $\mathbb{R}$. Comme $f'(0)=0$, f' est négative sur $\mathbb{R}_-$ et positive sur $\mathbb{R}^+$. On en déduit que f est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$ (avec $f(0) = 0$).

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

4. On déduit de la question précédente que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 1 + x \leqslant e^{\operatorname{sh} x}. \tag{7.3}$$

On a donc :

Il s'agit de l'inégalité précédente, appliquée à $-x$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 1 - x \leqslant e^{\operatorname{sh}(-x)},$$

soit $1 - x \leqslant e^{-\operatorname{sh} x}$ ou encore $1 - x \leqslant \frac{1}{e^{\operatorname{sh} x}}$. On en déduit que :

sh est impaire.

$$\forall x \in]0, 1[,\ e^{\operatorname{sh} x} \leqslant \frac{1}{1 - x}. \tag{7.4}$$

$1 - x > 0$

Les inégalités (7.3) et (7.4) démontrent l'encadrement souhaité.

5. D'après la question précédente, on a :

$$\forall x \in]0, 1[, \quad \ln(1 + x) \leqslant \operatorname{sh} x \leqslant -\ln(1 - x).$$

On en déduit que pour tout $k \in [\![n, np]\!]$,

$$\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leqslant \operatorname{sh}\left(\frac{1}{k}\right) \leqslant -\ln\left(1-\frac{1}{k}\right).$$

En sommant ces inégalités de n à np, il vient :

$$\sum_{k=n}^{np} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \leqslant \sum_{k=n}^{np} \operatorname{sh}\left(\frac{1}{k}\right) \leqslant -\sum_{k=n}^{np} \ln\left(\frac{k-1}{k}\right),$$

ce qui s'écrit aussi

$$\sum_{k=n}^{np} [\ln(k+1) - \ln k] \leqslant S_n \leqslant -\sum_{k=n}^{np} [\ln(k-1) - \ln k].$$

Deux sommes télescopiques !

Ainsi, on obtient :

$$\ln\left(\frac{np+1}{n}\right) \leqslant S_n \leqslant -\ln\left(\frac{n-1}{np}\right).$$

On conclut à l'aide du théorème d'existence de limite par encadrement.

6. Comme d'une part

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{np+1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \ln\left(p+\frac{1}{n}\right) = \ln p$$

et d'autre part

$$\lim_{n\to+\infty} -\ln\left(\frac{n-1}{np}\right) = \lim_{n\to+\infty} -\ln\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{np}\right) = -\ln\left(\frac{1}{p}\right) = \ln p,$$

le théorème d'encadrement montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \ln p$. ▲

Chapitre 8

Primitives et équations différentielles

UN MATHÉMATICIEN

Alexis Clairaut est l'un des plus grands mathématiciens du XVIIIe siècle. Incroyablement précoce, il fait à treize ans sa première communication à l'Académie des Sciences, assemblée où il est admis comme membre à 18 ans. La même année, il publie un remarquable traité de géométrie analytique. Il met au point des techniques de résolution d'équations différentielles grâce auxquelles il prévoit les perturbations des orbites de planètes ce qui lui vaut une grande renommée.

Un peu d'histoire

À la fin du XVIIe siècle Newton et Leibniz introduisent indépendamment le calcul différentiel en se rendant compte que l'aire située sous le graphe d'une fonction pouvait se calculer à l'aide d'une de ses primitives.

La cinématique a servi de support intuitif au développement de ses nouveaux outils ; la vitesse d'un mobile est la dérivée de l'équation du mouvement et une primitive de son accélération. Aussi, des relations entre ces trois données débouchent sur des équations différentielles.

Des méthodes de résolution se sont développées tout au long du XVIIIe siècle grâce à Euler, Clairaut et D'Alembert, puis plus tard Lagrange et Laplace, amenant des progrès spectaculaires en physique, en mécanique et en astronomie.

Objectifs

les incontournables

- Calculer une primitive :
  - d'une fonction usuelle ;
  - d'un polynôme en sin et de cos ;
  - au moyen d'une intégration par parties ;
  - par un changement de variable.
- Pour les équations différentielles linéaires du premier ordre :
  - résoudre l'équation différentielle linéaire homogène associée ;
  - chercher une solution particulière à l'aide de la méthode de variation de la constante ;
  - résoudre un problème de Cauchy.
- Pour les équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants :
  - résoudre l'équation différentielle linéaire homogène associée ;
  - trouver une solution particulière dans le cas d'un second membre du type exponentiel, trigonométrique ou polynomial ;
  - trouver l'unique solution qui vérifie une condition du type $y(x_0) = a$ et $y'(x_0) = b$.

et plus si affinités

- Trouver une primitive en utilisant un changement de variable trouvé par vous.
- Résoudre une équation différentielle non linéaire du premier ordre à l'aide d'un changement de fonction inconnue fourni par l'énoncé.
- Résoudre une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients non constants à l'aide d'un changement de fonction inconnue ou d'un changement de variable donné.

Résumé de cours

Primitives d'une fonction à valeurs réelles

Intégrale fonction de sa borne supérieure

Théorème 8.1.— Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, une fonction continue sur un intervalle, $a \in I$ et $F : I \to \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in I,\ F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$. Alors F est dérivable sur I et :

$$\boxed{\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x)}$$

Primitives d'une fonction continue

Définition : *Soit $g, G : I \to \mathbb{R}$. On dit que G est une* **primitive** *de g sur I si G est dérivable dans I et $\forall x \in I, G'(x) = g(x)$.*

Remarque : si G est une primitive de g dans I, alors la fonction $G + C$, où $C \in \mathbb{R}$, l'est aussi.

Ainsi, la fonction F construite précédemment est une primitive de f sur l'intervalle I.

Théorème 8.2.— Primitives d'une fonction continue —. Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. Alors f possède des primitives sur I. Plus précisément, si $a \in I$ et $A \in \mathbb{R}$ l'unique primitive $F_{a,A}$ de f sur I, qui s'annule au point a est définie par $\forall x \in I, \quad F_{a,A}(x) = A + \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$.

Notation : *$\int^x f(t)\,dt$ désigne une primitive quelconque de f, sans préciser de valeur particulière en un point. Il s'agit donc en fait d'une famille de fonctions définies à une constante additive près.*

Théorème fondamental du calcul intégral

Théorème 8.3.— Théorème fondamental du calcul intégral —. Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ et F une primitive *quelconque* de f sur I, alors

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = \Big[F(t)\Big]_a^b = F(b) - F(a)}$$

En particulier, comme une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ est une primitive de sa dérivée, nous obtenons :

Corollaire 8.4.— Soit $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$, $a \in I$, alors $\forall x \in I, \quad f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,dt$.

Calculs d'intégrales et de primitives

Le **théorème 19.9** permet d'obtenir d'autres outils pour le calcul d'intégrales :

Théorème 8.5.— Intégration par parties —. Soit $(u, v) \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})^2$, alors

$$\boxed{\int_a^b u'(t) \times v(t)\,dt = \Big[u(t) \times v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t) \times v'(t)\,dt}$$

Théorème 8.6.— Changement de variable —. Soit I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $\varphi : J \to I$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $(\alpha, \beta) \in J^2$. Alors :

$$\boxed{\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u))\varphi'(u)\,du}$$

Remarque : comme une primitive quelconque de f est de la forme $\int^x f(t)\ dt$, ces formules de calcul d'intégrales s'appliquent aussi au calcul de primitives.

Quelques primitives usuelles

Fonction	Primitive	Intervalle	Fonction	Primitive	Intervalle
x^α	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$I \subset \mathcal{D}_\alpha$	$\dfrac{1}{\sin^2(x)}$	$-\dfrac{1}{\tan(x)} + C$	$I \subset \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$
e^{cx}	$\dfrac{1}{c}e^{cx} + C$	$I \subset \mathbb{R}$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$	$\ln\left\lvert x + \sqrt{x^2-a^2}\right\rvert + C$	$I \cap [-a, a] = \emptyset$
$\sin(ax)$	$-\dfrac{1}{a}\cos(ax) + C$	$I \subset \mathbb{R}$	$\dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$	$\ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right) + C$	$I \subset \mathbb{R}$
$\cos(ax)$	$\dfrac{1}{a}\sin(ax) + C$	$I \subset \mathbb{R}$	$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\operatorname{Arcsin}\dfrac{x}{a} + C$	$I \subset]-a, a[$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$	$I \subset \mathcal{D}_{\tan}$	$\dfrac{1}{a^2-x^2}$	$\dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{a+x}{a-x}\right\rvert + C$	$I \subset \mathbb{R} \setminus \{\pm a\}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	$I \subset \mathbb{R}^\star$	$\dfrac{1}{a^2+x^2}$	$\dfrac{1}{a}\operatorname{Arctan}\dfrac{x}{a} + C$	$I \subset \mathbb{R}$
$\operatorname{ch}(ax)$	$\dfrac{1}{a}\operatorname{sh}(ax) + C$	$I \subset \mathbb{R}$	$\ln(x)$	$x\ln(x) - x + C$	$I \subset \mathbb{R}^{+\star}$
$\tan(x)$	$-\ln\lvert\cos(x)\rvert + C$	$I \subset \mathcal{D}_{\tan}$	$\operatorname{sh}(ax)$	$\dfrac{1}{a}\operatorname{ch}(ax) + C$	$I \subset \mathbb{R}$

Dans ce tableau, $b \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^{+\star}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $c \in \mathbb{R}^\star$ ou $c \in \mathbb{C}^\star$ et C est une constante réelle (ou complexe). Enfin, on a noté $\mathcal{D}_{\tan}$ le domaine de défintion de la fonction tangente : $\mathcal{D}_{\tan} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]\}$ et $\mathcal{D}_\alpha$ le domaine de dérivabilité de la fonction puissance d'exposant α, ($\mathcal{D}_\alpha = \mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{N}$, $\mathcal{D}_\alpha = \mathbb{R}^\star$ si $\alpha \in \mathbb{Z}^-$, $\mathcal{D}_\alpha = \mathbb{R}^{+\star}$ lorsque α est un réel quelconque).

■ Primitives de fonctions à valeurs complexes

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. D'après l'unicité de la notation algébrique des nombres complexes, pour tout réel $x \in I$, $f(x)$ s'écrit de manière unique sous la forme $f(x) = u(x) + iv(x)$.

Définition : *Les fonctions $u, v : I \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions réelles définies sur I appelées* ***parties réelle et imaginaire*** *de f. On note $u = \mathfrak{Re}\, f$ et $v = \mathfrak{Im}\, f$.*

La fonction $f : I \to \mathbb{C}$ est **continue** sur I si $\mathfrak{Re}\ f$ et $\mathfrak{Im}\ f$ sont continues sur I. En ce cas, la fonction f possède des primitives sur I : $\displaystyle\int^x f(t)\,dt = \int^x u(t)\,dt + i\int^x v(t)\,dt + C$, où $C \in \mathbb{C}$.

Proposition 8.7.—

- Pour $\alpha \in \mathbb{C}^\star$, $\displaystyle\int^x e^{\alpha t}\,dt = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x} + C$.
- Pour $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$, $\displaystyle\int^x t^\alpha\,dt = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$.

■ Équations différentielles linéaires du premier ordre

On désigne par $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{C}^1(I,\mathbb{K})$) l'ensemble des fonctions continues sur I (resp. dont la dérivée existe et est continue sur I).

Définition : *Soit $a, f : I \to \mathbb{K}$ des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 1,(E_1) et l'équation homogène associée (H_1) :*

$$y' + a(x)y = f(x) \qquad (E_1)$$
$$y' + a(x)y = 0 \qquad (H_1)$$

*Une fonction $y : I \to \mathbb{K}$ est **solution** de (E_1) si y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et vérifie*

$$\forall x \in I, \quad y'(x) + a(x)y(x) = f(x)$$

Résolution de l'équation homogène

Théorème 8.8.— Solution générale de (H_1) —. Soit $a : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue. Notons $A : I \to \mathbb{K}$ une primitive de a sur I.

$$\boxed{\text{Les solutions de } (H_1) \text{ sont les fonctions de la forme } x \mapsto h(x) = Ce^{-A(x)}, \quad \text{où } C \in \mathbb{K}}$$

Recherche d'une solution particulière

Proposition 8.9.— Principe de superposition —. Soit $y_i : I \to \mathbb{K}$ $(i = 1, 2)$ une solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 $y' + a(x)y = f_i(x)$. Alors $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est solution de

$$y' + a(x)y = \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)$$

Théorème 8.10.— Variation de la constante —. Soit $a, f : I \to \mathbb{K}$ des fonctions continues. On note comme précédemment $A : I \to \mathbb{K}$ une primitive de a sur I et $c : I \to \mathbb{K}$ une primitive de $x \mapsto f(x)e^{A(x)}$ sur I. Une solution particulière de (E_1) est la fonction $f_0 : I \to \mathbb{K}$ définie par

$$\boxed{\text{Pour tout } t \in I, \quad f_0(t) = c(t)e^{-A(t)}}$$

Résolution de l'équation complète

Théorème 8.11.— Solution générale de (E_1) —. Les solutions de (E_1) sont les fonctions de la forme $f = f_0 + h$, où $f_0 : I \to \mathbb{K}$ est une solution particulière de (E_1) et h est la solution générale de (H_1).

Théorème 8.12.— Pour tout $x_0 \in I$, pour tout $y_0 \in \mathbb{K}$, il existe une fonction dérivable $y : I \to \mathbb{K}$, unique, solution du **problème de Cauchy** : $\left\{ \begin{array}{rcl} y' + a(x)y & = & f(x) \\ y(x_0) & = & y_0 \end{array} \right.$.

■ Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

On désigne par $\mathcal{C}^2(I)$ l'ensemble des fonctions dont la dérivée seconde existe et est continue sur I. On désigne par $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{C}^1(I,\mathbb{K})$) l'ensemble des fonctions continues sur I (resp. dont la dérivée existe et est continue sur I).

Définition : *Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, $(a,b) \in \mathbb{K}^2$. On considère l'**équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants**, (E_2), et l'**équation homogène associée** (H_2).*

$$y'' + ay' + by = f(x) \qquad (E_2)$$
$$y'' + ay' + by = 0 \qquad (H_2)$$

*Une fonction $y : I \to \mathbb{K}$ est **solution** de (E_2) si y est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I et vérifie*

$$\forall x \in I, \quad y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x)$$

Résolution de l'équation homogène

Définition : *On appelle **équation caractéristique** associée à l'équation homogène (H_2) l'équation polynomiale du second degré :* $\quad r^2 + ar + b = 0 \qquad (EC)$

Théorème 8.13.— Solutions complexes de (H_2) —. Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$. On note Δ le discriminant de (EC). Les solutions de (H_2) sont les fonctions définies sur I par

- si $\Delta \neq 0$: pour tout $x \in I$ $\quad h(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}, \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2$
- si $\Delta = 0$: pour tout $x \in I$ $\quad h(x) = (C_1 + C_2 t)e^{r_0 x}, \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2$

où on a noté suivant les cas (r_1, r_2) les racines distinctes et r_0 la racine double de (EC).

Théorème 8.14.— Solutions réelles de (H_2) —. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On note Δ le discriminant de (EC). Les solutions réelles de (H_2) sont les fonctions définies sur I par

- si $\Delta > 0$: pour tout $x \in I$ $\quad h(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}, \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$
- si $\Delta = 0$: pour tout $x \in I$ $\quad h(x) = (C_1 + C_2 t)e^{r_0 x}, \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$
- si $\Delta < 0$: pour tout $x \in I$ $\quad h(x) = e^{\rho x}\big[C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x)\big], \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$

où on a noté, suivant les cas r_1 et r_2 les racines réelles distinctes, r_0 la racine réelle double, $\rho \pm i\omega$ les racines complexes et conjuguées de (EC).

Résolution de l'équation complète

Théorème 8.15.— Solution générale de (E_2) —. Les solutions de (E_2) sur $\mathbb{K}$ sont les fonctions de la forme $f = f_0 + h$, où $f_0 : I \to \mathbb{K}$ est une solution particulière de (E_2) et h est la solution générale de (H_2) sur $\mathbb{K}$.

Théorème 8.16.— Soit $(a,b) \in \mathbb{K}^2$, $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue. Pour tout $x_0 \in I$, pour tout $(y_0, y_0') \in \mathbb{K}^2$, le **problème de Cauchy** il existe une fonction deux fois dérivable $y : I \to \mathbb{K}$, unique telle que

$$(S) \begin{cases} y'' + ay' + by = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \text{ et } y'(x_0) = y_0' \end{cases}$$

Méthodes

Techniques de calcul de primitives

Démarche générale

D'après le théorème **Primitives d'une fonction continue** (**théorème 19.8**), nous savons qu'une fonction continue sur un intervalle y admet des primitives. Pour déterminer une primitive quelconque de f, notée $\displaystyle\int^x f(t)\,dt$.

$\boxed{1}$ On détermine le domaine de continuité $\mathcal{D}_f$ de f, puis on considère un **intervalle** I contenu dans $\mathcal{D}_f$.

$\boxed{2}$ On calcule $\displaystyle\int^x f(t)\,dt$ au moyen des méthodes qui suivent.

$\boxed{3}$ À la fin, on n'oublie pas la constante dite d'intégration : les primitives de f sur un intervalle $I \subset \mathcal{D}_f$ sont les fonctions de la forme $\displaystyle\int^x f(t)\,dt = F(x) + C, \quad$ où $C \in \mathbb{R}$.

> ❑ **Méthode 8.1.— Comment déterminer les primitives de f**
>
> Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue. Pour déterminer ses primitives sur I, quatre pistes sont à explorer :
>
> - Si f est une fonction usuelle, il n'y a pas de problème puisque vous connaissez parfaitement le tableau des primitives usuelles (voir page 224).
> - Si f s'écrit comme une combinaison linéaire de fonctions usuelles, vous exploitez la linéarité de l'intégrale.
> - Lorsque f s'écrit comme un produit, vous pouvez utiliser une intégration par parties.
> - Lorsque f est composée de fonctions usuelles, vous pouvez effectuer un changement de variable pour vous ramener à des primitives plus simples.

Exploiter la linéarité

La méthode est très simple à mettre en œuvre. Pour l'illustrer déterminons les primitives de $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 6x + 5}$.

$\boxed{1}$ f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1, 5\}$. On cherche ses primitives sur un intervalle $I \subset \mathbb{R} \setminus \{1, 5\}$.

$\boxed{2}$ f est une fraction rationnelle. On la décompose en fraction plus simples :

$$\begin{aligned}\int^x f(t)\,dt &= \int^x \frac{dt}{(t-1)(t-5)} = \frac{1}{4}\int^x \frac{(t-1)-(t-5)}{(t-1)(t-5)}\,dt = \frac{1}{4}\int^x \frac{dt}{t-5} - \frac{1}{4}\int^x \frac{dt}{t-1} \\ &= \frac{1}{4}\Big[\ln(|t-5|)\Big]^x - \frac{1}{4}\Big[\ln(|t-1|)\Big]^x = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-5}{x-1}\right| + C\end{aligned}$$

$\boxed{3}$ Les primitives de f sur un intervalle $I \subset \mathbb{R} \setminus \{1, 5\}$ sont les fonctions de la forme

$$F(x) = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-5}{x-1}\right| + C, x \in I \text{ où } C \in \mathbb{R}.$$

Effectuer une intégration par parties

❑ Méthode 8.2.— Comment utiliser la formule de l'intégration par parties

Lorsque l'intégrande $f(t)$ s'écrit sous la forme d'un produit, on peut intégrer par parties.

$\boxed{1}$ On identifie clairement u' et v :

$$\left\| \begin{array}{ll} u'(t) = \cdots & v(t) = \cdots \\ u(t) = \cdots & v'(t) = \cdots \end{array} \right.$$

Au passage, on vérifie que u et v sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

$\boxed{2}$ Puis on écrit $\displaystyle\int^x u'(t)v(t)\,dt = \Big[u(t)v(t)\Big]^x - \int^x u(t)v'(t)\,dt$.

$\boxed{3}$ Il reste à intégrer $u(t)v'(t)$.

Exemple : déterminons les primitives de la fonction ln, continue sur $]0,+\infty[$. On pose $u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln(t)$. Les fonctions u et v sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et :

$$\int^x 1 \times \ln(t)\,dt = \Big[t\ln(t)\Big]^x - \int^x t\,\frac{1}{t}\,dt = x\ln(x) - x + C, \text{ où } C \in \mathbb{R}.$$

Effectuer un changement de variable

Dans le cours, on a rappelé la formule d'intégration par changement de variable. En faisant varier la borne supérieure, on obtient une méthode de calcul de primitive par changement de variable.

❑ Méthode 8.3.— Comment effectuer un changement de variable

La formule de changement de variables s'applique aussi au calcul de primitives :

$$\int^x f \circ \varphi(t) \times \varphi'(t)\,dt = \int^{\varphi(x)} f(u)\,du$$

La méthode est la suivante :

$\boxed{1}$ On pose $u = \varphi(t)$,

$\boxed{2}$ On dérive formellement $du = \varphi'(t)\,dt$,

$\boxed{3}$ On remplace TOUT ! sans oublier les nouvelles bornes !

Exemple : déterminons les primitives de $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x + x(\ln x)^2}$. f est continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$, nous cherchons ses primitives sur $I \subset \mathbb{R}^{+\star}$. Il s'agit donc de calculer $\displaystyle\int^x \frac{\ln(t)}{t(1+\ln^2(t))}\,dt$. Pour ce faire, on pose $u = \ln(t)$, et on dérive formellement : $du = \dfrac{dt}{t}$. On remplace alors dans l'intégrale $\dfrac{dt}{t}$ par du, $\ln(t)$ par u, ainsi que la borne supérieure. Il vient :

$$\begin{aligned} \int^x \frac{\ln(t)}{t(1+\ln^2(t))}\,dt &= \int^{\ln(x)} \frac{u}{1+u^2}\,du = \frac{1}{2}\int^{\ln(x)} \frac{2u}{1+u^2}\,du = \frac{1}{2}\Big[\ln(1+u^2)\Big]^{\ln(x)} \\ &= \frac{1}{2}\,\ln\left(1+\ln^2(x)\right) + C \end{aligned}$$

Remarque : en définitive, la méthode de changement de variable appliquée au calcul de primitives revient à relire les formules de dérivation en chaîne à rebours. Par exemple, si u et f sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur leurs intervalles de définition alors :

- $\displaystyle\int^x u(t)u'(t)\,dt = \frac{1}{2}u^2(x) + C$
- $\displaystyle\int^x \frac{u'(t)}{u(t)}\,dt = \ln|u(x)| + C,$
- $\displaystyle\int^x u^\alpha(t)u'(t)dt = \frac{u^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + C$ avec $\alpha \neq -1,$
- $\displaystyle\int^x \frac{u'(t)}{2\sqrt{u(t)}}\,dt = \sqrt{u(x)} + C, \ldots$

■ Calculs de primitives types

❑ Méthode 8.4.— Comment intégrer une fonction type polynôme-trigo

Soit $P : I \to \mathbb{R}$ une fonction polynomiale de degré supérieur à 1. Pour intégrer $x \mapsto P(x)\cos(x)$ ou $x \mapsto P(x)\sin(x)$, on effectue des intégrations par parties :

$\boxed{1}$ On pose $v(t) = P(t)$ et $u'(t) = \cos(t)$. Les fonctions P et sin sont de classe $\mathcal{C}^1$ et la formule d'**intégration par parties** donne :

$$\int^x P(t)\cos(t)\,dt = \Big[P(t)\sin(t)\Big]^x - \int^x P'(t)\sin(t)\,dt$$

$\boxed{2}$ Si P' est de degré 0, on connaît les primitives de $t \mapsto P'(t)\sin(t)$. Si P' est de degré supérieur à 1, on effectue une nouvelle intégration par parties, toujours en dérivant la fonction polynomiale et en intégrant la fonction trigonométrique.

Exemple : soit $f : x \mapsto (x^2 + x + 2)\sin(x)$ Cette fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}$ et nous allons déterminer ses primitives sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{1}$ On pose $v(t) = t^2 + t + 2$ et $u'(t) = \sin t$. On a alors $v'(t) = 2t + 1$ et $u(t) = -\cos t$.

$\boxed{2}$ On continue en prenant maintenant (avec les notations de la formule d'intégration par parties) : $v(t) = 2t + 1$ et $u'(t) = \cos t$. On obtient : $v'(t) = 2$ et $u(t) = \sin t$. D'où :

$$\begin{aligned}
\int^x f(t)\,dt &= \int^x (2t+1)\cos t\,dt - \Big[(t^2+t+2)\cos(t)\Big]^x \\
&= -\int^x 2\sin t\,dt + \Big[(2t+1)\sin(t) - (t^2+t+2)\cos(t)\Big]^x \\
&= -(x^2+x)\cos x + (2x+1)\sin(x) + C
\end{aligned}$$

Mise en œuvre : exercice 8.2.

❑ Méthode 8.5.— Comment intégrer une fonction type polynôme-exponentielle

Soit $P : I \to \mathbb{R}$ une fonction polynomiale de degré supérieur à 1, $a \in \mathbb{R}^\star$. Pour intégrer $x \mapsto P(x)e^{ax}$, on effectue des intégrations par parties successives :

$\boxed{1}$ On pose $u'(t) = e^{at}$ et $v(t) = P(t)$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ et la formule d'**intégration par parties** donne :

$$\int^x P(t)e^{at}\,dt = \frac{1}{a}\Big[P(t)e^{at}\Big]^x - \frac{1}{a}\int^x P'(t)e^{at}\,dt$$

$\boxed{2}$ Si P' est de degré 0, on connaît les primitives de $t \mapsto \frac{1}{a}P'(t)e^{at}$. Si P' est de degré supérieur à 1, on effectue une nouvelle intégration par parties, toujours en dérivant la fonction polynomiale et en intégrant la fonction exponentielle.

Exemple : soit $f : x \mapsto (x^2+x+2)e^x$. Cette fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}$ et nous allons trouver ses primitives sur $\mathbb{R}$, on écrit

$$\begin{aligned}\int^x f(t)\,dt &= -\int^x (2t+1)e^t\,dt + \Big[(t^2+t+2)e^t\Big]^x = \int^x 2e^t\,dt - \Big[(2t+1)e^t - (t^2+t+2)e^t\Big]^x \\ &= (x^2-x+3)e^x + C.\end{aligned}$$

❑ Méthode 8.6.— Comment déterminer les primitives de $\cos^m(x)\sin^n(x)$

Pour calculer $\displaystyle\int^x \cos^m(t)\sin^n(t)\,dt$, on discute suivant l'existence d'un exposant impair.

- Si m et n sont pairs, on linéarise à l'aide des formules de trigo ou d'Euler.
- Si m est impair, on effectue le changement de variable $u = \sin(t)$.
- Si n est impair, on effectue le changement de variable $u = \cos(t)$.

Exemples :

• Déterminons les primitives de $x \mapsto \cos^2(x)$. Conformément à la méthode, nous linéarisons. À l'aide des formules de trigo, il vient

$$\int^x \cos^2(t)\,dt = \frac{1}{2}\int^x \big(1+\cos(2t)\big)\,dt = \frac{1}{2}\Big[t+\frac{1}{2}\sin(2t)\Big]^x = \frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin(2x)+C$$

• Déterminons les primitives de $x \mapsto \sin^2 x\cos^3 x$. Comme la puissance de cos est impaire, on effectue le changement de variable $u = \sin(t)$. Il vient $du = \cos(t)dt$ et

$$\int^x \sin^2(t)\cos^3(t)\,dt = \int^{\sin(x)} u^2(1-u^2)\,du = \Big[\frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{5}u^5\Big]^{\sin(x)} = \frac{1}{3}\sin^3(x) - \frac{1}{5}\sin^5(x) + C.$$

❑ Méthode 8.7.— Comment calculer les primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, avec $a \neq 0$.

1 On met le trinôme sous forme canonique : $at^2+bt+c = a\big[(t+\frac{b}{2a})^2 - (\frac{b^2-4ac}{4a^2})\big]$

2 On pose $\alpha = \sqrt{|\frac{b^2-4ac}{4a^2}|}$ et on effectue le changement de variable $u = t+\frac{b}{2a}$:

3 On se ramène ainsi à une primitive usuelle $\displaystyle\int^x \frac{dt}{at^2+bt+c} = \frac{1}{a}\int^{\frac{2ax+b}{2a}} \frac{du}{u^2 \pm \alpha^2}$

Exemple : calculons les primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x+x^2}$ sur $I \subset \mathbb{R}$.

1 On a $1+t+t^2 = \big(t+\frac{1}{2}\big)^2 + \frac{3}{4}$.

2 On effectue le changement de variable $u = t+\frac{1}{2}$, avec $dt = du$.

3 Ainsi $\displaystyle\int^x \frac{dt}{1+t+t^2} = \int^{x+\frac{1}{2}} \frac{du}{u^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\Big[\mathrm{Arctan}\Big(\frac{2u}{\sqrt{3}}\Big)\Big]^{x+\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{Arctan}\Big(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Big) + C.$

Mise en œuvre : exercice 8.3

■ Primitives de fonctions à valeurs complexes

❑ Méthode 8.8.— Comment trouver les primitives d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$

Soit $f : I \to \mathbb{C}$:

1 On vérifie que $u : t \mapsto \mathfrak{Re}\,(f)(t)$ et $v : t \mapsto \mathfrak{Im}\,(f)(t)$ sont continues sur I ;

2 On détermine les primitives de $u = \mathfrak{Re}\,(f)$, et $v = \mathfrak{Im}\,(f)$

3 Alors $\displaystyle\int^x f(t)dt = \int^x \big(u(t) + iv(t)\big)\,dt = \int^x u(t)\,dt + i\int^x v(t)\,dt$

Mise en œuvre : exercice 8.6.

Remarque : ainsi, déterminer les primitives d'une fonction à valeurs complexes revient simplement à déterminer les primitives de ses parties réelle et imaginaire. Inversement, pour déterminer les primitives d'une fonction réelle, il peut être utile de passer en complexes.

❑ Méthode 8.9.— Comment trouver les primitives de $f : I \to \mathbb{R}$ en passant par $\mathbb{C}$

On procède de la façon suivante :

1 On remarque que f est la partie réelle (resp. imaginaire) d'une fonction $\tilde{f} : I \to \mathbb{C}$.

2 On détermine les primitives $\tilde{f}$ sur I.

3 Les primitives de f sont les parties réelles (resp. imaginaires) des primitives de $\tilde{f}$.

Exemple : donnons les primitives de $f : x \mapsto e^{2x+1}\cos(3x+4)$. Pour cela, on pose

$$\tilde{f} : x \mapsto e^{2x+1+i(3x+4)} = e^{1+4i+(2+3i)t}.$$

Il est clair que $\mathfrak{Re}\,(\tilde{f}) = f$. Une primitive de $\tilde{f}$ est $\tilde{F} : x \mapsto \dfrac{e^{1+4i+(2+3i)x}}{2+3i}$.

Il reste à décomposer ce complexe : $\dfrac{e^{1+4i+(2+3i)t}}{2+3i} = \dfrac{(2-3i)e^{2t+1+i(3t+4)}}{(2-3i)(2+3i)} = \dfrac{(2-3i)e^{2t+1+i(3t+4)}}{13}$.

$$\frac{(2-3i)e^{2x+1+i(3x+4)}}{13} = \left(\frac{2}{13} - i\frac{3}{13}\right)\left(\cos(3x+4) + i\sin(3x+4)\right)e^{2x+1}.$$

On développe et on récupère la partie réelle de ce développement qui est :

$$\frac{3\sin(3x+4) + 2\cos(3x+4)}{13}e^{2x+1}$$

Ainsi, sur $\mathbb{R}$: $\displaystyle\int^x f(t)\,dt = \frac{3\sin(3x+4) + 2\cos(3x+4)}{13}e^{2x+1} + C$, où $C \in \mathbb{R}$.

Mise en œuvre : exercice 8.6.

■ Équations différentielles linéaires

❑ **Méthode 8.10.— Comment résoudre une équation différentielle linéaire**
La résolution d'une équation différentielle linéaire se déroule en trois phases.

1 **Résolution de l'équation homogène**
La solution générale de l'équation homogène est donnée par les **théorèmes 8.13, 8.14**.

2 **Recherche d'une solution particulière**
Lorsqu'il n'y a pas de solution évidente ou que l'énoncé ne fournit pas d'indication, les méthodes qui suivent vous permettront de trouver une solution particulière.

3 **Expression de la solution générale**
Elle est la somme d'une solution particulière de l'équation complète et de la solution générale de l'équation homogène associée.

Notation : *$\mathcal{S}_E(\mathbb{K})$ dénote l'ensemble des solutions à valeurs dans $\mathbb{K}$ de l'équation différentielle (E).*

Les méthodes présentées dans ce chapitre sont classées suivant le type d'équation différentielle. Pour choisir la méthode appropriée, posez-vous les questions simples qui suivent :

- Quel est l'ordre de l'équation ?
- Les coefficients sont-ils constants ?

■ EDL d'ordre 1 à coefficient continu

Soit $a, f : I \to \mathbb{K}$ des fonctions continues sur I. Dans cette partie, nous suivons le cadre général exposé ci-dessus (**méthode 8.10**) pour résoudre l'équation

$$y' + a(x)y = f(x) \qquad (E_1)$$

Résolution de l'équation homogène (H_1)
On commence par résoudre l'équation homogène associée à (E_1) :

$$y' + a(x)y = 0 \qquad (H_1)$$

❑ **Méthode 8.11.— Comment résoudre l'équation homogène** (H_1)
Soit $a : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue. Pour résoudre $y' + a(x)y = 0$ sur I. On procède de la façon suivante :

1 On identifie la fonction continue $x \mapsto a(x)$.

2 On détermine une primitive notée A de a sur I.

3 Les solutions $h : I \to \mathbb{K}$ de (H_1) sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ sont les fonctions de la forme

$$h : x \mapsto Ce^{-A(x)}, \text{ où } C \in \mathbb{K}.$$

Exemple : on considère (H_1) : $y' - 2xy = 0$ définie sur $I = \mathbb{R}$. Il s'agit bien d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1.

1 Ici, $a : x \to -2x$ est continue sur $\mathbb{R}$.

2 On prend $A : x \to -x^2$ comme primitive de a

3 Les solutions de (H_1) sur I sont les fonctions de la forme $h : x \mapsto Ce^{-A(x)} = Ce^{x^2}, C \in \mathbb{R}$.

Mise en œuvre : exercice 8.8, exercice 8.9.

Recherche d'une solution particulière de (E_1)

Pour déterminer une solution particulière de l'équation complète (E_1), on regarde d'abord s'il n'y a pas de solution évidente ! Sinon, la **méthode de la variation de la constante** permet d'obtenir une solution.

On part de la solution générale de l'équation homogène (H_1) $h : x \mapsto Ce^{-A(x)}$, où $A : I \to \mathbb{K}$ est une primitive de a sur I, et comme le nom de la méthode l'indique, on fait varier la constante C.

❑ Méthode 8.12.— Méthode de la variation de la constante

Pour déterminer une solution particulière $y_0 : I \to \mathbb{K}$ de (E_1),

$\boxed{1}$ On cherche y_0 sous la forme $y_0(x) = c(x)e^{-A(x)}$, où $c : I \to \mathbb{K}$ est dérivable.

$\boxed{2}$ On calcule les dérivées de y_0. Comme $A'(x) = a(x)$, il vient :

$$\begin{array}{r|rcl} a(x)\times & y_0(x) & = & c(x)e^{-A(x)} \\ +1\times & y_0'(x) & = & \left[c'(x) - a(x)c(x)\right]e^{-A(x)} \\ & y_0'(x) + a(x)y_0(x) & = & c'(x)e^{-A(x)} \end{array}$$

y_0 sera solution de (E_1) si et seulement si $\forall x \in I,\ c'(x) = f(x)e^{A(x)}$.

$\boxed{3}$ On choisit pour $c : I \to \mathbb{K}$ une primitive de la fonction (continue sur I) $x \mapsto f(x)e^{A(x)}$.
La fonction $y_0 : x \mapsto c(x)\,e^{-A(x)}$ est une solution particulière de (E_1).

Exemple : on considère $(E_1) : y'(x) - 2xy(x) = e^x e^{x^2}$ définie sur $\mathbb{R}$. L'équation homogène associée a déjà été traitée plus haut. On détermine une solution particulière de (E_1), à l'aide de la **méthode de la variation de la constante**.

$\boxed{1}$ On cherche y_0 sous la forme $y_0 : x \mapsto c(x)e^{x^2}$.

$\boxed{2}$ On a alors

$$\begin{array}{r|rcl} -2x\times & y_0(x) & = & c(x)e^{x^2} \\ +1\times & y_0'(x) & = & \left[c'(x) + 2xc(x)\right]e^{x^2} \\ & y_0'(x) - 2xy_0(x) & = & c'(x)e^{x^2} \end{array}$$

y_0 est solution de (E_1) ssi $\forall x \in \mathbb{R},\ c'(x)e^{x^2} = e^x e^{x^2}$ ssi $\forall x \in \mathbb{R},\ c'(x) = e^x$.

$\boxed{3}$ On choisit $c(x) = e^x$. Il en résulte que $y_0 : x \mapsto e^{x+x^2}$ est solution de (E_1).

Finalement, on peut conclure à l'aide du **théorème 8.11** que les solutions de (E_1) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme

$$y(t) = (C + e^x)\ e^{x^2}$$

Mise en œuvre : exercice 8.8, exercice 8.9, exercice 8.10, exercice 8.11.

■ EDL d'ordre 1 à coefficient constant

Dans cette partie, $a \in \mathbb{K}$ est une constante, $f : I \to \mathbb{K}$ est une fonction continue sur I et nous résolvons l'équation

$$y' + ay = f(x) \qquad (E_1)$$

Pour cela, nous suivons la démarche générale (**méthode 8.10**).

Résolution de l'équation homogène (H_1)

D'après le **théorème 8.8**, les solutions de (H_1) dans ce cas sont les fonctions de la forme

$$h : x \mapsto Ce^{-ax},\ \text{où } C \in \mathbb{K}.$$

Recherche d'une solution particulière de (E_1)

Il est clair que le type d'équation différentielle linéaire qui est développé dans la **méthode 8.12** englobe tous les autres cas. Toutefois, en fonction du type de second membre proposé, il y a parfois plus rapide. Par exemple, si le second membre est une fonction constante égale à b et $a \neq 0$, la fonction constante $y = \frac{b}{a}$ est une solution évidente de (E_1).

Avant tout, on commence à décomposer le second membre en fonctions plus simples. Si $f(x) = \lambda_1 f_1(x) + \cdots + \lambda_n f_n(x)$, où chaque fonction f_i est un polynôme, une exponentielle ou une fonction sin ou cos, on peut chercher une solution particulière y_i de l'équation différentielle notée (E_i) : $y' + ay = f_i(x)$. Pour cela, on utilise les méthodes suivantes. D'après le **principe de superposition**, $y_0 = \lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_n y_n$ est une solution particulière de (E_1).

❑ **Méthode 8.13.— Comment trouver une solution lorsque f est un polynôme**

On considère l'équation $y' + ay = P_m(x)$, où P_m est un polynôme de degré m.

- Si $a \neq 0$, (E_1) a une solution particulière de la forme $x \mapsto Q_m(x)$.
- Si $a = 0$, (E_1) a une solution particulière de la forme $x \mapsto xQ_m(x)$.

où Q_m est un polynôme de degré m.

❑ **Méthode 8.14.— Comment trouver une solution lorsque f est une exponentielle**

On considère l'équation $y' + ay = e^{\alpha x}$, où $\alpha \in \mathbb{K}$ est un nombre réel ou complexe.

- Si $\alpha \neq -a$, (E_1) a une solution particulière de la forme $x \mapsto b_0\, e^{\alpha x}$.
- Si $\alpha = -a$, (E_1) a une solution particulière de la forme $x \mapsto b_0\, x\, e^{\alpha x}$.

❑ **Méthode 8.15.— Comment trouver une solution lorsque f est un (co)sinus**

On considère l'équation $y' + ay = \cos(\omega x)$ ou $y' + ay = \sin(\omega x)$, avec $\omega \in \mathbb{R}$ réel. (E_1) admet une solution particulière réelle de la forme $y_0 : x \mapsto b_0 \cos(\omega x) + b_1 \sin(\omega x)$. Pour déterminer les constantes b_0 et b_1, on pose

$$\begin{array}{r|rcl} a\times & y_0(x) & = & b_0 \cos(\omega x) + b_1 \sin(\omega x) \\ 1\times & y_0'(x) & = & \cdots \end{array}$$

y_0 est solution de (E_1) ssi (b_0, b_1) est solution d'un système d'équations linéaires.

Exemple : on considère l'équation différentielle $(E) : 2y'(x) - 3y(x) = 2\sin^2 x$ définie sur $\mathbb{R}$. On commence par linéariser $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$. Ce travail fait, le second membre de (E) devient $f(x) = 1 - \cos 2x$. On peut utiliser la méthode de superposition avec $f_1(x) = 1$ et $f_2(x) = \cos 2x$.

- **Résolution de (H_1)**

Pour commencer, il est clair que l'équation homogène associée a pour solution les fonctions du type $x \mapsto Ce^{3x/2}$, où $C \in \mathbb{R}$.

- **Recherche d'une solution particulière**

Nous commençons par l'équation

$$(E_1) : 2y'(x) - 3y(x) = 1$$

D'après la **méthode 8.13**, cherchons une solution particulière $y_1(x)$ constante car le polynôme P_m est ici de degré 0. Rapidement, $y_1(x) = -\dfrac{1}{3}$.

Nous terminons par l'équation (E_2) : $2y'(x) - 3y(x) = \cos 2x$. D'après la **méthode 8.15**, nous devons chercher une solution particulière $y_2(x)$ de la forme
$y_2(x) = a\cos(2x) + b\sin(2x)$, où a et b sont deux constantes réelles. On remplace dans (E_2) la forme $y_2(x) = a\cos(2x) + b\sin(2x)$ et on aboutit à $a = -\dfrac{3}{25}$ et $b = \dfrac{4}{25}$.

- **Expression de la solution générale**

Finalement, l'ensemble des solutions réelles de l'équation est

$$\mathcal{S}_E(\mathbb{R}) = \{\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto C\exp(3x/2) - \frac{1}{3} - \frac{3}{25}\cos 2x + \frac{4}{25}\sin 2x,\ C \in \mathbb{R}\}$$

Mise en œuvre : exercice 8.8.

■ EDL d'ordre 2 à coefficients constants

Dans cette partie, $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ désignent des nombres réels ou complexes, $f : I \to \mathbb{K}$ est une fonction continue. Nous résolvons sur $\mathbb{K}$ l'équation :

$$y'' + ay' + by = f(x), \qquad (E_2)$$

Pour cela nous suivons le plan général (**méthode 8.10**).

Résolution de l'équation homogène (H_2)

Pour résoudre l'équation homogène $\quad y'' + ay' + by = 0 \qquad (H_2)$

nous introduisons l'**équation caractéristique associée**, d'inconnue $r \in \mathbb{K}$.

$$r^2 + ar + b = 0 \qquad (EC)$$

❑ **Méthode 8.16.— Comment trouver les solutions complexes de** (H_2)

$\boxed{1}$ On résout l'**équation caractéristique associée** : $r^2 + ar + b = 0$.

$\boxed{2}$ Deux cas se présentent suivant la valeur du discriminant Δ de l'équation caractéristique :

- Si $\Delta \neq 0$, la solution générale est de la forme $h : x \mapsto C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$ où r_1 et r_2 sont les racines de (EC).
- Si $\Delta = 0$, la solution générale est de la forme $h : x \mapsto (C_1 + C_2 x)e^{r_0 x}$ où r_0 est la racine double de (EC).

Exemple : déterminons les solutions à valeurs complexes de l'équation $y'' + (1+2i)y' + (i-1)y = 0$

$\boxed{1}$ L'équation caractéristique est $r^2 + (1+2i)r + (i-1) = 0$. Le discriminant est $\Delta = 1$ et les racines de (EC) sont donc $-1-i$ et $-i$.

$\boxed{2}$ Ici, $\Delta \neq 0$ et par conséquent les solutions complexes de (H_2) sont les fonctions de la forme $h : x \mapsto C_1 e^{-ix} + C_2 e^{(-1-i)x}$. Autrement dit

$$\mathcal{S}_{H_2}(\mathbb{C}) = \{I \to \mathbb{C} : x \mapsto C_1 e^{-ix} + C_2 e^{(-1-i)x},\ (C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2\}$$

❑ **Méthode 8.17.— Comment trouver les solutions réelles de** (H_2)

$\boxed{1}$ On résout l'**équation caractéristique associée** : $r^2 + ar + b = 0$.

$\boxed{2}$ La solution générale sur $\mathbb{R}$ de (H_2) est obtenue en discutant suivant le signe du discriminant Δ de l'équation caractéristique.

- Si $\Delta > 0$, la solution générale est de la forme $h : x \mapsto C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$ où r_1 et r_2 sont les racines réelles distinctes de (EC).
- Si $\Delta = 0$, la solution générale est de la forme $h : x \mapsto (C_1 + C_2 x)e^{r_0 x}$ où r_0 est la racine double de (EC).
- Si $\Delta < 0$, la solution générale est est de la forme $h : x \mapsto e^{\rho x}\big[C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x)\big]$ où $\rho \pm i\omega$ sont les racines complexes conjuguées de (EC).

Exemples :

- Soit $(H_2) : y''(x) - y(x) = 0$. L'équation caractéristique associée : $r^2 - 1 = 0$ a deux racines distinctes ± 1, donc l'ensemble des fonctions à valeurs réelles, solutions de (H_2) est $\mathcal{S}_{H_2}(\mathbb{R}) = \{I \to \mathbb{R} : x \mapsto C_1 e^{-x} + C_2 e^{x},\ (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2\}$.
- Soit $(H_2) : y'' - 2y'(x) + y(x) = 0$. L'équation caractéristique associée : $r^2 - 2r + 1 = 0$ a une racine double 1, donc : $\mathcal{S}_{H_2}(\mathbb{R}) = \{I \to \mathbb{R} : x \mapsto (C_1 + C_2 x)e^{x},\ (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2\}$.
- Soit $(H_2)\ : y''(x) + y'(x) + y(x) = 0$. L'équation caractéristique associée : $r^2 + r + 1 = 0$ a deux racines complexes conjuguées j et $\bar{j}$. Il faut préciser si les solutions cherchées sont à valeurs dans $\mathbb{C}$ ou à valeurs dans $\mathbb{R}$. Les solutions à valeurs dans $\mathbb{C}$ sont : $\mathcal{S}_{H_2}(\mathbb{C}) = \{I \to \mathbb{C} : x \mapsto C_1 e^{jx} + C_2 e^{\bar{j}x},\ (C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2\}$ et les solutions à valeurs dans $\mathbb{R}$ sont (comme $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$) : $\mathcal{S}_{H_2}(\mathbb{R}) = \{I \to \mathbb{R} : x \mapsto C_1 e^{-\frac{1}{2}x} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + C_2 e^{-\frac{1}{2}x} \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x),\ (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2\}$.

Mise en œuvre : exercice 8.12.

Recherche d'une solution particulière (E_2)

❑ **Méthode 8.18.— Comment trouver une solution lorsque** f **est un polynôme**

On considère l'équation $y'' + ay' + by = P_m(x)$, où P_m est un polynôme de degré m.

- Si $b \neq 0$, (E_2) possède une solution particulière de la forme $y_0 : x \mapsto Q_m(x)$.
- Si $b = 0$ et $a \neq 0$, (E_2) a une solution particulière de la forme $y_0 : x \mapsto x\, Q_m(x)$.
- Si $b = 0$ et $a = 0$, (E_2) a une solution particulière de la forme $y_0 : x \mapsto x^2\, Q_m(x)$.

où $Q_m(x)$ est un polynôme de degré m : $Q_m(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$. On détermine Q_m par identification des coefficients. On pose (en prenant $i = 0, 1$ ou 2 suivant le cas)

$$\begin{array}{r||rcl} b\times & y_0(x) & = & x^i Q_m(x) = b_0 x^i + b_1 x^{1+i} + \cdots b_m x^{m+i} \\ a\times & y_0'(x) & = & \cdots \\ 1\times & y_0''(x) & = & \cdots \end{array}$$

y_0 est solution de (E_2) ssi $(b_0, \ldots, b_m)$ est solution d'un système d'équations linéaires.

❑ Méthode 8.19.— Comment trouver une solution lorsque f est une exponentielle
On considère l'équation $y'' + ay' + by = e^{\alpha x}$, où $\alpha \in \mathbb{K}$.

- Si α n'est pas racine de (EC), (E_2) a une solution de la forme $y_0 : x \mapsto b_0\, e^{\alpha x}$.
- Si α est racine simple de (EC), (E_2) a une solution de la forme $y_0 : x \mapsto b_0\, x\, e^{\alpha x}$.
- Si α est la racine double de (EC), (E_2) a une solution de la forme $y_0 : x \mapsto b_0\, x^2\, e^{\alpha x}$.

Pour déterminer b_0, on pose (en prenant $i = 0, 1$ ou 2 suivant le cas)

$$\begin{array}{r|rcl} b\times & y_0(x) & = & b_0\, x^i e^{\alpha x} \\ a\times & y_0'(x) & = & \cdots \\ 1\times & y_0''(x) & = & \cdots \end{array}$$

y_0 est solution de (E_2) si et seulement si b_0 est solution d'une équation linéaire.

❑ Méthode 8.20.— Comment trouver une solution lorsque f est un (co-)sinus
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et ω un réel. On cherche une fonction réelle, solution de l'équation

$$y'' + ay' + by = \cos(\omega x) \qquad (E_{21})$$
$$\text{ou } y'' + ay' + by = \sin(\omega x) \qquad (E_{22})$$

La méthode consiste à *passer en complexes*. On note

$$y'' + ay' + by = e^{i\omega x} \qquad (\tilde{E}_2)$$

- Une solution particulière réelle de l'équation (E_{21}) est obtenue en prenant la partie réelle d'une solution complexe de l'équation $(\tilde{E}_2)$.
- Une solution particulière réelle de l'équation (E_{22}) est obtenue en prenant la partie imaginaire d'une solution complexe de l'équation $(\tilde{E}_2)$.

Exemple : soit $E : y''(x) - 4y'(x) + 3y(x) = \sin x + \cos x$.

- **Résolution de l'équation homogène :** 1 et 3 sont racines évidentes de l'équation caractéristique $r^2 - 4r + 3 = 0$. Par conséquent, la solution générale de l'équation homogène est $h : x \mapsto C_1 e^x + C_2 e^{3x}$, où $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$.
- **Recherche d'une solution particulière :** considérons les 3 équations suivantes.

$$y'' - 4y' + 3y = \cos(x) \qquad (E_{21})$$
$$y'' - 4y' + 3y = \sin(x) \qquad (E_{22})$$
$$y'' - 4y' + 3y = e^{ix} \qquad (\tilde{E}_2)$$

On cherche une solution particulière complexe $\tilde{y}_0$ de $(\tilde{E}_2)$ sous la forme $x \mapsto ae^{ix}$. On trouve $\tilde{y}_0(x) = \left(\frac{1}{10} + \frac{2i}{5}\right)e^{ix}$. On obtient alors une solution particulière réelle de l'équation (E_{21}) (resp. (E_{22})) en prenant la partie réelle (resp. imaginaire) de $\tilde{y}_0$. Par superposition, il en résulte finalement que $y_0 : x \mapsto \frac{3}{10}\cos(x) - \frac{1}{10}\sin(x)$ est une solution particulière de (E_2).

- **Expression de la solution générale :** finalement, nous obtenons

$$\mathcal{S}_E(\mathbb{R}) = \{\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \tfrac{1}{10}(3\cos x - \sin x) + C_1 e^x + C_2 e^{3x}, (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2\}$$

Mise en œuvre : exercice 8.12, exercice 8.14 .

Vrai/Faux

	Vrai	Faux
1. Une primitive de $x \mapsto \sin x e^{\sin x}$ est $x \mapsto e^{\sin x}(-1+\sin x)$ car une primitive de $u \mapsto ue^u$ est $u \mapsto e^u(-1+u)$.	☐	☐
2. Une primitive de $x \mapsto \sin^2 x$ est $x \mapsto \dfrac{\sin^3 x}{3}$.	☐	☐
3. Les primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$ sont $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)+K$, $K \in \mathbb{R}$, sachant que $\dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x-1}\right)$.	☐	☐
4. Une équation différentielle linéaire $y'(x)+a(x)y(x)=0$ définie sur $\mathbb{R}$, admet seulement la fonction nulle pour solution si on impose $y(0)=0$.	☐	☐
5. L'ensemble des solutions de (1) : $y'-\alpha y(x) = f(x)$, où f est une fonction fixée définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$ et α est une constante de $\mathbb{R}^\star$ est de la forme $x \mapsto z(x)+\alpha e^{\lambda x}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ et z est une solution particulière de (1).	☐	☐
6. Les courbes représentatives de deux solutions (sur $\mathbb{R}$) distinctes d'une même équation différentielle linéaire d'ordre un du type $y'(x)+a(x)y(x) = f(x)$, où a et f sont définies sur $\mathbb{R}$, peuvent être sécantes.	☐	☐
7. Les équations différentielles d'ordre un ont toujours des solutions.	☐	☐
8. Pour résoudre $xy'+y^2 = \sin x$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$, on ajoute une solution particulière de cette équation à une solution quelconque de l'équation homogène $xy'+y^2=0$.	☐	☐
9. Le principe de superposition est applicable à toutes les équations différentielles.	☐	☐
10. L'équation différentielle $\alpha y''(x)+\beta y'(x)+\gamma y(x)=0$ avec $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^\star \times \mathbb{R}^2$ peut très bien n'avoir aucune solution à valeurs dans $\mathbb{R}$ hormis la fonction nulle car $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ peut ne pas avoir de solution réelle.	☐	☐

Énoncé des exercices

Calcul pratique de primitives

Exercice 8.1 : Déterminez les primitives suivantes :

1. $\displaystyle\int^x te^{t^2}\,dt$
2. $\displaystyle\int^x \tan(t)\,dt$
3. $\displaystyle\int^x \frac{\sin(t)}{\cos^3(t)}\,dt$
4. $\displaystyle\int^x (t+2)\sin(t^2+4t-6)\,dt$
5. $\displaystyle\int^x \frac{t}{1+t^4}\,dt$
6. $\displaystyle\int^x \frac{1}{\cos(t)}\,dt$

Exercice 8.2 : Déterminez les primitives suivantes :

1. $\displaystyle\int^x \mathrm{Arctan}\,(t)\,dt$
2. $\displaystyle\int^x t\ln(t)\,dt$
3. $\displaystyle\int^x t\mathrm{Arctan}\,(t)\,dt$
4. $\displaystyle\int^x t\sin^3(t)\,dt$
5. $\displaystyle\int^x (t+1)\cos(t)\,dt$
6. $\displaystyle\int^x t^2e^t\,dt$

Exercice 8.3 : Déterminez les primitives suivantes :

1. $\displaystyle\int^x \tan^2(t)\,dt$
2. $\displaystyle\int^x \tan^3(t)\,dt$
3. $\displaystyle\int^x \frac{dt}{t^2-5t+6}\,dt$
4. $\displaystyle\int^x \frac{t+2}{1+t+t^2}\,dt$
5. $\displaystyle\int^x \frac{t^4}{2+t}\,dt$
6. $\displaystyle\int^x \cos^3(t)\,dt$

Exercice 8.4 : Déterminer sur $I =]-1,1[$ les primitives suivantes :

1. $\displaystyle\int^x t\sqrt{1-t^2}dt.$
2. $\displaystyle\int^x \frac{t^4}{(1-t^2)^{3/2}}dt.$

Exercice 8.5 : Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $G_k(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^k}$, pour $k = 1, 2, 3$.

1. Calculer $G_1(x)$.
2. Exprimer $G_1(x)$ en fonction de $G_1(x)$ et de $G_2(x)$. En déduire $G_2(x)$.
3. Calculer $G_3(x)$. Calculer

Primitives de fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Exercice 8.6 : Déterminer une primitive de $t \mapsto 2e^t\sin^2 t$ en utilisant une fonction complexe.

Exercice 8.7 : Déterminer une primitive de $t \mapsto \sin(\ln t)$:

1. en utilisant une fonction de $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{+\star}, \mathbb{C})$;
2. en effectuant le changement de variable $x = \ln t$ puis une double intégration par parties.

Équations différentielles d'ordre 1

Exercice 8.8 : Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'(x) - y(x) = x$
2. $y'(x) + y(x) = 2(e^x + e^{-x})$

3. $y'(x) = 2\,y(x) + (2x^2 - 1)e^{x^2}$
4. $(x^2 + 1)y'(x) + x\,y(x) = 0$
5. $y'(x) + y(x)\tan x = \cos^2 x$

Exercice 8.9 : Résoudre sur $\mathbb{R}^{+\star}$: $xy'(x) + y(x) = \operatorname{Arctan} x$.

Exercice 8.10 : Résoudre le système différentiel (E) : $\begin{cases} x'(t) = 2t\,x(t) - y(t) + t\cos t \\ y'(t) = x(t) + 2t\,y(t) + t\sin t \end{cases}$.

Exercice 8.11 : Résoudre le problème de Cauchy : $(\mathcal{C})$: $\begin{cases} (x+1)y'(x) - x\,y(x) + 1 = 0 \\ y(0) = 2 \\ x \in]-1, +\infty[\end{cases}$.

■ Équations différentielles linéaires d'ordre 2

Exercice 8.12 : Résoudre (dans $\mathbb{R}$) les équations différentielles suivantes :

1. $(E_1) : y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = x^2 + 1$
2. $(E_2) : y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 2e^x$,
3. $(E_3) : y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = e^{-x}$
4. $(E_4) : y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = \sin x$.

Exercice 8.13 : Déterminer (en effectuant le changement de fonction $y(x) = e^{2x}z$), l'unique fonction $y : \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}$ qui vérifie : (E) : $y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = \dfrac{e^{2x}}{x^2}$ avec $y(1) = 1$ et $y'(1) = 0$.

Exercice 8.14 : Déterminer l'unique fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qui vérifie :
(E) : $y''(x) - 2(1+i)y'(x) + 2i\,y(x) = x + i$ avec $y(0) = y'(0) = 0$.

Exercice 8.15 : Soit $(E) : y''(x) + y'(x) + y(x) = 8e^x \cos^3 x$. En linéarisant $\cos^3 x$ puis en utilisant une formule d'Euler, déterminer une solution particulière de (E) en passant dans $\mathbb{C}$.

■■ Indications

Ex. 8.3

5. *On pourra écrire* $t^4 = t^4 - 16 + 16$.

Ex. 8.4

On pourra faire le changement de variable $t = \sin(u)$.

Ex. 8.5

2. *Effectuez une intégration par parties.*

Ex. 8.6

On commence par linéariser $\sin^2 t$ *puis la fonction complexe vient toute seule.*

Ex. 8.7

On admettra qu'une primitive de $t \mapsto t^\alpha = e^{\alpha \ln t}$ *est* $t^{\alpha+1}/(\alpha+1)$, *pour* $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$.

Ex. 8.10

On pourra introduire la fonction à valeurs complexes $t \mapsto u(t) = x(t) + iy(t)$, et déterminer une équation différentielle linéaire du premier ordre vérifiée par u.

Ex. 8.11

Résoudre un problème de Cauchy, c'est déterminer quand elle existe l'unique solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, une condition initiale étant fixée. De plus, ici, on remarquera que $\dfrac{x}{x+1} = 1 - \dfrac{1}{x+1}$.

Corrigé des vrai/faux

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F	F	F	V	F	F	F	F	F	F

1. C'est faux car pour utiliser une primitive de $u \mapsto ue^u$, il faudrait avoir à primitiver une fonction de la forme $x \mapsto L\cos x \sin x e^{\sin x}$, où L est un réel donné car si l'on pose $u = \sin x, du = \cos x dx$ et donc la dérivée de u doit apparaître dans la fonction à intégrer.
2. C'est faux pour la même raison que précédemment !
3. Le problème est que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ alors que les primitives proposées non. Il faut prendre : $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| + K$, $K \in \mathbb{R}$.
4. Les solutions de cette équation sont de la forme $y : x \mapsto \lambda \exp(-A(x))$, où A est une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Comme $y(0) = 0$, cela impose $\lambda = 0$ et il ne reste que la fonction nulle.
5. Faux c'est $\lambda e^{\alpha x}$ et non $\alpha e^{\lambda x}$.
6. Toutes les solutions sont de la forme $y_1 + \lambda g$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ et y_1, g sont deux fonctions fixes avec $g(x_0) \neq 0$. Le choix $y(x_0) = a$ impose une valeur à λ et donc deux solutions sécantes en x_0 seront égales (car λ est alors le même).
7. L'équation différentielle $y'^2 + y^2 + 1 = 0$ n'a pas de solutions.
8. L'équation $xy'(x) + y^2(x) = \sin x$ n'est pas linéaire !
9. Faux, il faut que l'équation différentielle soit linéaire.
10. $y'' + y' + y = 0$ avec $y(0) = y'(0) = 1$ a une solution unique qui est non nulle et pourtant $X^2 + X + 1 = 0$ n'a pas de solution réelle.

❑ **Erreurs classiques**

- Intégrer une fonction du type $f(u)dx$ avec u du type $\varphi(x)$ directement, ce qui laisse supposer $dx = du$ ce qui est probablement faux.
- Intégrer une fonction en oubliant son domaine de définition (attention, cet oubli est très fréquent !), ce qui peut donner des résultats dangereux à utiliser.
- Appliquer dans le cas d'une équation différentielle non linéaire la méthode de résolution d'une équation différentielle linéaire (résolution équation homogène + solution particulière).
- Appliquer les méthodes de recherche d'une solution particulière (comme **méthode 8.13** ou **méthode 8.19**) à une équation différentielle linéaire à coefficients non constants ou ayant un second membre différent des types exponentielle, polynôme ou fonction trigonométrique.
- Oublier d'être sur un intervalle où la fonction devant y' ne s'annule pas.

Corrigé des exercices

Exercice 8.1

1. La fonction $t \mapsto te^{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Elle admet des primitives sur tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$. De plus, $\displaystyle\int^x te^{t^2}\ dt = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$, où $C \in \mathbb{R}$.

2. tan est continue sur $\mathcal{D}_{\tan}$. Elle admet des primitives sur tout intervalle $I \subset \mathcal{D}_{\tan}$ et $\displaystyle\int^x \tan(t)\ dt = \int^x \frac{\sin(t)}{\cos(t)}\ dt = \Big[\ln(|\cos(t)|\Big]^x = -\ln(|\cos(x)|) + C$, $C \in \mathbb{R}$.

3. $t \mapsto \frac{\sin(t)}{\cos^3(t)}$ admet des primitives sur tout intervalle $I \subset \mathcal{D}_{\tan}$. Pour les déterminer, on effectue le changement de variable $u = \cos(t$. Il vient $du = -\sin(t)\,dt$ et par suite

$$\int^x \frac{\sin(t)}{\cos^3(t)}\ dt = \int^{\cos(x)} \frac{-du}{u^3} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{u^2}\right]^{\cos(x)} = \frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2(x)} + C, C \in \mathbb{R}.$$

4. $t \mapsto (t+2)\sin(t^2+4t-6)$ admet des primitives sur tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Pour les calculer, on effectue le changement de variable

$$\begin{aligned} u &= t^2+4t-6 \\ du &= (2t+4)\ dt \end{aligned}$$

Il vient

$$\int^x (t+2)\sin(t^2+4t-6)\ dt = \int^{x^2+4x-6} \frac{1}{2}\sin(u)du = -\frac{1}{2}\cos(x^2+4x-6)+C,$$

où $C \in \mathbb{R}$.

5. $t \mapsto \frac{t}{1+t^4}$ admet des primitives sur tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On pose $u = t^2$ de sorte que $du = 2tdt$. La formule d'intégration par changement de variable donne :

$$\int^x \frac{t}{1+t^4}\ dt = \frac{1}{2}\int^{x^2} \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{2}\Big[\mathrm{Arctan}\,(u)\Big]^{x^2} = \frac{1}{2}\mathrm{Arctan}\,(x^2)+C, C \in \mathbb{R}.$$

6. $t \mapsto \frac{1}{\cos(t)}$ admet des primitives sur tout intervalle $I \subset \mathcal{D}_{\tan}$. Pour les déterminer, commençons par multiplier numérateur et dénominateur par cos, puis effectuons le changement de variable $u = \sin(t)$, il vient

$$\begin{aligned} \int^x \frac{1}{\cos(t)}\ dt &= \int^x \frac{\cos(t)}{\cos^2(t)}\ dt = \int^x \frac{\cos(t)}{1-\sin^2(t)}\ dt \\ &= \int^{\sin(x)} \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}\right) + C, C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

▲

Exercice 8.2

1. Arctan a des primitives sur tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Pour les calculer, nous allons intégrer par parties en intégrant la fonction constante 1 et en dérivant Arctan .

$$\left\| \begin{array}{ll} u'(t) = 1 & v(t) = \text{Arctan}\,(t) \\ u(t) = t & v'(t) = \frac{1}{1+t^2} \end{array} \right.$$

Il vient

$$\begin{aligned} \int^x \text{Arctan}\,(t)\ dt &= \Big[t\ \text{Arctan}\,(t)\Big]^x - \int^x \frac{t}{1+t^2} dt \\ &= x\ \text{Arctan}\,(x) - \Big[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\Big]^x \\ &= x\ \text{Arctan}\,(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C, C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2. $t \mapsto t\ln(t)$ est continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$, elle admet des primitives sur tout intervalle $I \subset \mathbb{R}^{+\star}$. Intégrons par parties. On pose

$$\left\| \begin{array}{ll} u'(t) = t & v(t) = \ln(t) \\ u(t) = \frac{1}{2}t^2 & v'(t) = \frac{1}{t} \end{array} \right.$$

$$\int^x t\ln(t)\ dt = \Big[\frac{1}{2}t^2\ln(t)\Big]^x - \frac{1}{2}\int^x t dt = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{1}{4}x^2 + C, C \in \mathbb{R}.$$

3. Pour calculer les primitives de $t \mapsto t\text{Arctan}\,(t)$ sur $I \subset \mathbb{R}$, on intègre par parties en décidant de dériver Arctan Il vient :

Plus précisément, on intègre t et on dérive Arctan .

$$\begin{aligned} \int^x t\text{Arctan}\,(t)\ dt &= \Big[\frac{1}{2}t^2\text{Arctan}\,(t)\Big]^x - \frac{1}{2}\int^x \frac{t^2}{1+t^2} dt \\ &= \Big[\frac{1}{2}t^2\text{Arctan}\,(t)\Big]^x - \frac{1}{2}\int^x (1 - \frac{1}{1+t^2}) dt \\ &= \frac{1}{2}x^2\text{Arctan}\,(x) - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\text{Arctan}\,(x) + C, C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$\frac{t^2}{1+t^2} = 1 - \frac{1}{1+t^2}.$$

4. Pour calculer les primitives de $t \mapsto t\sin^3(t)$, on intègre par parties en dérivant t. Cela nécessite que nous connaissions une primitive de $t \mapsto \sin^3(t)$. On va l'obtenir en linéarisant cette expression polynomiale en $\sin(t)$.

$$\begin{aligned} \sin^3(t) &= \frac{1}{2}\sin(t)(1-\cos(2t)) = \frac{1}{2}\sin(t) - \frac{1}{2}\sin(t)\cos(2t) \\ &= \frac{1}{2}\sin(t) - \frac{1}{4}(\sin(3t) - \sin(t)) = \frac{3}{4}\sin(t) - \frac{1}{4}\sin(3t). \end{aligned}$$

Ainsi, une primitive de $t \mapsto \sin^3(t)$ est donc $t \mapsto -\frac{3}{4}\cos(t) + \frac{1}{12}\cos(3t)$. Il en résulte que :

$$\begin{aligned} \int^x t\sin^3(t)\ dt &= \Big[-\frac{3}{4}t\cos(t) + \frac{1}{12}t\cos(3t)\Big]^x + \int^x (\frac{3}{4}\cos(t) - \frac{1}{12}\cos(3t)) dt \\ &= \frac{1}{12}x\cos(3x) - \frac{3}{4}x\cos(x) + \frac{3}{4}\sin(x) - \frac{1}{36}\sin(3x) + C, C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

5. On obtient une primitive de $t \mapsto (t+1)\cos(t)$ sur $I \subset \mathbb{R}$ par parties :

$$\begin{aligned} (t+1)\cos(t)\int^x dt &= \Big[(t+1)\sin(t)\Big]^x - \int^x \sin(t) dt \\ &= (x+1)\sin(x) + \cos(x) + C, C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

6. Pour déterminer les primitives de $t \mapsto t^2e^t$ sur $I \subset \mathbb{R}$, nous allons réaliser une double intégration par parties.

Quand on aime on ne compte pas !

$$\begin{aligned}\int^x t^2e^t\ dt &= \Big[t^2e^t\Big]^x - 2\int^x te^t dt = \Big[t^2e^t\Big]^x - 2\Big[te^t\Big]^x + 2\int^x e^t dt \\ &= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C, C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

▲

Exercice 8.3

1. Pour déterminer les primitives sur $I \subset \mathbb{R}$ de $t \mapsto \tan^2(t)$, on remarque qu'il est bien plus aisé de déterminer celles de $t \mapsto 1 + \tan^2(t)$. Par linéarité, il vient :

$$\begin{aligned}\int^x \tan^2(t)\ dt &= \int^x 1 + \tan^2(t)\ dt - \int^x 1dt = \Big[\tan(t) - t\Big]^x \\ &= \tan(x) - x + C, C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

2. Cette fois, on écrit $\tan^3(t) = \tan(t)\big(1 + \tan^2(t) - 1\big)$, il vient

$$\begin{aligned}\int^x \tan^3(t)\ dt &= \int^x \tan(t)\big(1 + \tan^2(t)\big)\ dt - \int^x \tan(t)dt \\ &= \Big[\frac{1}{2}\tan^2(t)\Big]^x + \Big[\ln(|\cos(t)|)\Big]^x \\ &= \frac{1}{2}\tan^2(x) + \ln|\cos(x)| + C, C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

3. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2 - 5t + 6} = \dfrac{1}{(t-3)(t-2)}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$, elle admet donc des primitives sur tout intervalle $I \subset \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$. Pour tout $t \in I$, on a :

$$\frac{1}{t^2 - 5t + 6} = \frac{1}{(t-3)(t-2)} = \frac{1}{t-3} - \frac{1}{t-2}$$

Par linéarité, $\displaystyle\int^x \frac{1}{t^2 - 5t + 6}\ dt = \Big[\ln|t-2| - \ln|t-3|\Big]^x = \ln\left|\frac{x-2}{x-3}\right| + C$ avec $C \in \mathbb{R}$..

4. Comme le dénominateur de cette fraction rationnelle ne s'annule pas, elle admet des primitives sur tout intervalle I de $\mathbb{R}$. Pour déterminer ses primitives, on met en œuvre la **méthode 8.7**

$$\begin{aligned}\int^x \frac{t+2}{1+t+t^2}\ dt &= \int^x \frac{\frac{1}{2}(2t+1) + \frac{3}{2}}{t^2+t+1}\ dt \\ &= \frac{1}{2}\int^x \frac{2t+1}{t^2+t+1}\ dt + \frac{3}{2}\int^x \frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \\ &= \frac{1}{2}\Big[\ln(t^2+t+1)\Big]^x + \frac{3}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\Big[\text{Arctan}\,(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\Big]^x \\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \sqrt{3}\text{Arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C,\ C \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

5. Pour $t \mapsto \dfrac{t^4}{2+t}$, on écrit que $t^4 = t^4 - 16 + 16 = (t^2+4)(t^2-4) + 16$ et donc :

$$\int^x \frac{t^4}{2+t}\,dt = \int^x (t^2+4)(t-2)\,dt + \int^x \frac{16}{t+2}\,dt.$$

L'intégration devient rapide. Finalement :

$$\int^x \frac{t^4}{2+t}\,dt = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + 2x^2 - 8x + 16\ln|x+2| + C, C \in \mathbb{R}.$$

C'est le moment de revoir vos lignes de trigonométrie !

6. $\displaystyle\int^x \cos^3(t)\,dt$. On linéarise $\cos^3(t)$ sous la forme

$$\cos^3(t) = \frac{3}{4}\cos(t) + \frac{1}{4}\cos(3t)$$

Par conséquent, les primitives de $\cos^3$ sont définies sur $I \subset \mathbb{R}$ par :

$$\int^x \cos^3(t)\,dt = \frac{3}{4}\sin(x) + \frac{1}{12}\sin(3x) + C, C \in \mathbb{R}.$$

▲

Exercice 8.4

1. On effectue le changement de variable $t = \sin(u)$, de sorte que $dt = \cos(u)\,du$, avec $u \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Il vient :

$$\begin{aligned}
\int^x t\sqrt{1-t^2}dt &= \int^{\mathrm{Arcsin}\,(x)} \sin(u)\sqrt{1-\sin^2(u)}\cos(u)\,du \\
&= \int^{\mathrm{Arcsin}\,(x)} \sin(u)\cos^2(u)\,du = -\frac{1}{3}\Big[\cos^3(u)\Big]^{\mathrm{Arcsin}\,(x)} \\
&= -\frac{1}{3}\cos^3(\mathrm{Arcsin}\,(x)) + C = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C, C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

2. On remarque que comme $(1-t^2)^{3/2} = (1-t^2)\sqrt{1-t^2}$. Posons comme ci-dessus $t = \sin(u)$ avec $u \in]-\pi/2, \pi/2[$. On btient :

$$\begin{aligned}
\int^x \frac{t^4}{(1-t^2)^{3/2}}\,dt &= \int^{\mathrm{Arcsin}\,(x)} \tan^2 u \sin^2 u\,du = \int^{\mathrm{Arcsin}\,(x)} (\tan^2 u - \sin^2 u)\,du \\
&= \int^{\mathrm{Arcsin}\,(x)} (1 + \tan^2 u - 1 - \sin^2 u)\,du \\
&= \Big[\tan u - \frac{3}{2}u + \frac{1}{4}\sin 2u\Big]^{\mathrm{Arcsin}\,(x)}
\end{aligned}$$

Enfin, en se rappelant que $\mathrm{Arccos}\,(\sin t) = \sqrt{1-t^2}$

$$\int^x \frac{t^4}{(1-t^2)^{3/2}}\,dt = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{3}{2}\mathrm{Arcsin}\,x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C, C \in \mathbb{R}$$

▲

Exercice 8.5

1. On remarque que $G_1(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \Big[\mathrm{Arctan}\,(t)\Big]_0^x = \mathrm{Arctan}\,(x)$.

2. Intégrons par parties, il vient :

$$\begin{aligned} G_1(x) &= \left[\frac{t}{1+t^2}\right]_0^x - \int_0^x t \times \frac{(-2t)}{(1+t^2)^2}\ dt = \frac{x}{1+x^2} + 2\int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\ dt \\ &= \frac{x}{1+x^2} + 2\int_0^x \frac{1+t^2-1}{(1+t^2)^2}\ dt = \frac{x}{1+x^2} + 2G_1(x) - 2G_2(x) \end{aligned}$$

On en déduit que

$$G_2(x) = \frac{1}{2}\ \frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\mathrm{Arctan}\,(x).$$

3. Appliquons la même démarche.

$$\begin{aligned} G_2(x) &= \left[\frac{t}{(1+t^2)^2}\right]_0^x - \int_0^x t \times \frac{(-4t)}{(1+t^2)^3}\ dt \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^2} + 4\int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^3}\ dt = \frac{x}{(1+x^2)^2} + 4G_2(x) - 4G_3(x) \end{aligned}$$

On en déduit que

$$G_3(x) = \frac{1}{4}\ \frac{x}{(1+x^2)^2} + \frac{3}{8}\ \frac{x}{1+x^2} + \frac{3}{8}\mathrm{Arctan}\,(x).$$

▲

Exercice 8.6

Comme $2\sin^2(t) = 1 - \cos(2t)$, on peut écrire

$$\int^x 2e^t \sin^2(t)\ dt = \int^x e^t(1-\cos(2t)\ dt = \int^x e^t\ dt - \int^x e^t\ \cos(2t)\ dt$$

Or $\int^x e^t\ dt = e^x + C$. D'autre part, comme $\cos(2t) = \mathfrak{Re}\, e^{2it}$, il vient :

$$\begin{aligned} \int^x e^t\ \cos(2t)\ dt &= \int^x e^t \mathfrak{Re}\, e^{2it}\ dt = \int^x \mathfrak{Re}\, e^{(1+2i)t}\ dt = \mathfrak{Re} \int^x e^{(1+2i)t}\ dt \\ &= \mathfrak{Re}\left[\frac{1}{1+2i}e^{(1+2i)t}\right]^x = \frac{1}{5}\mathfrak{Re}\left((1-2i)e^{(1+2i)t}\right) + C \\ &= \frac{e^x}{5}\big(\cos(2x) + 2\sin(2x)\big) + C. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\int^x 2e^t \sin^2(t)\ dt = e^x\left[1 - \frac{1}{5}\cos(2x) - \frac{2}{5}\sin(2x)\right] + C, C \in \mathbb{R}$$

▲

Exercice 8.7

1. On remarque que $\sin(\ln t) = \mathfrak{Im}\,(t^i)$. Une primitive de $f : t \mapsto \sin(\ln(t))$ est donc obtenue en prenant la partie imaginaire d'une primitive de $t \mapsto t^i$, soit de

$$\frac{t^{i+1}}{i+1} = \frac{t}{i+1}e^{i\ln t} = \frac{t(1-i)}{(i+1)(1-i)}e^{i\ln t} = \frac{t}{2}(1-i)e^{i\ln t}.$$

Il reste donc à récupérer la partie imaginaire de $\frac{t^{i+1}}{i+1}$.

Par conséquent, une primitive de f est donc $t \mapsto \frac{t}{2}\left(\sin(\ln t) - \cos(\ln t)\right)$.

2. Procédons à une double intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\int^x f(t)\ dt &= \Big[t\sin(\ln t)\Big]^x - \int^x t \times \cos(\ln t) \times \frac{1}{t}\ dt \\
&= \Big[t\sin(\ln t)\Big]^x - \int^x \cos(\ln t)\ dt \\
&= \Big[t\sin(\ln t)\Big]^x - \Big[t\cos(\ln t)\Big]^x - \int^x \sin(\ln t)\ dt \\
&= \Big[t\sin(\ln t)\Big]^x - \Big[t\cos(\ln t)\Big]^x - \int^x f(t)\ dt
\end{aligned}$$

Ainsi, les primitives de f sur $I \subset \mathbb{R}$ sont toutes les fonctions de la forme :

$$\int^x \sin(\ln t)\ dt = \frac{x}{2}\sin(\ln x) - \frac{x}{2}\cos(\ln x) + C, C \in \mathbb{R}.$$

▲

Exercice 8.8

On met en œuvre la démarche générale de résolution (**méthode 8.10**).

1. Résolution de l'équation différentielle $(E_1) : y'(x) - y(x) = x$.

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1, à coefficient constant et second membre polynomial. On cherche les solutions définies sur $\mathbb{R}$.

• **Résolution de l'équation homogène :** ici $a = -1$. Par conséquent, les solutions de l'équation $(H_1) : y'(x) - y(x) = 0$ sont toutes les fonctions de la forme :

$$h : x \mapsto Ce^x, \text{ où } C \in \mathbb{R}$$

• **Recherche d'une solution particulière :** conformément à la **méthode 8.13**, on cherche une solution particulière polynomiale de (E_1). Après calculs, la fonction $y_1 : x \mapsto -x - 1$ est une solution particulière de (E_1).

• **Expression de la solution générale :** finalement, les solutions de (E_1) sur $\mathbb{R}$ sont toutes les fonctions de la forme :

$$f : x \mapsto -x - 1 + Ce^x,\ x \in \mathbb{R}, \text{ où } C \in \mathbb{R}.$$

2. Résolution de l'équation différentielle $(E_1) : y'(x) + y(x) = 2(e^x + e^{-x})$ sur $\mathbb{R}$. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1, à coefficient constant.

• **Résolution de l'équation homogène associée** $(H_1) : y' + y = 0$ a pour solutions toutes les fonctions de la forme :

$$h : x \mapsto Ce^{-x}, \text{ où } C \in \mathbb{R}.$$

Méthode de superposition des solutions.

• **Recherche d'une solution particulière :** le second membre est une combinaison linéaire d'exponentielles. D'après la **méthode 8.14**, l'équation (E_{11}) : $y' + y = 2e^{-x}$ admet une solution du type axe^{-x}. On trouve $a = 2$ d'où $y_1 : x \mapsto 2xe^{-x}$ est solution particulière de (E_{11}).

On cherche également une solution particulière de $(E_{12}) : y' + y = 2e^x$ du type be^x. Par identification, on trouve $b = 1$ d'où $y_2 : x \mapsto e^x$ est solution particulière de (E_{12}).

• **Expression de la solution générale :** ainsi les solutions de (E_1) sur $\mathbb{R}$ sont toutes les fonctions de la forme :

$$f : x \mapsto e^x + 2xe^{-x} + Ce^{-x};\ x \in \mathbb{R} \text{ où } C \in \mathbb{R}$$

3. Résolution de l'équation différentielle $(E_1) : y' = 2y + (2x^2 - 1)e^{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$:

• **Résolution de l'équation homogène :** $(H_1) : y' - 2y = 0$ a pour ensemble de solutions

$$\mathcal{S}_{H_1}(\mathbb{R}) = \{\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto Ce^{2x}, C \in \mathbb{R}\}$$

• **Recherche d'une solution particulière :** on cherche une solution particulière du type $P(x)e^{x^2}$, où P est un polynôme.

$$\begin{array}{r|l} -2\times & y_0(x) = P(x)e^{x^2} \\ 1\times & y_0'(x) = \left[P'(x) + 2xP(x)\right]e^{x^2} \end{array}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} y_0 \text{ est solution de } (E_1) \text{ sur } \mathbb{R} &\iff \forall x \in \mathbb{R}, y_0'(x) - 2y_0(x) = (2x^2 - 1)e^{x^2} \\ &\iff P'(x) + 2xP(x) = 2x^2 - 1 \end{aligned}$$

P est donc solution d'une EDL à second membre polynomial. En examinant les degrés, on se convainc aisément qu'on peut trouver une solution polynomiale de degré 1, $P(x) = ax + b$. Par identification des coefficients, on trouve $P(x) = x + 1$. Par conséquent, $y_0(x) = (x+1)e^{x^2}$ est une solution particulière de (E_1).

• **Expression de la solution générale :** en conclusion, les solutions de (E_1) sur $\mathbb{R}$ sont toutes les fonctions de la forme

$$f : x \mapsto (x+1)e^{x^2} + Ce^{2x}, \text{ où } C \in \mathbb{R}.$$

4. Résolution de l'équation différentielle $(E_1) : (x^2 + 1)y' + xy = 0$, $x \in \mathbb{R}$:
Il s'agit d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 à coefficient continu sur $\mathbb{R}$.

$$(E_1) \iff y' + \frac{x}{x^2+1}y = 0$$

Le coefficient $a(x) = \frac{x}{x^2+1}$ admet comme primitive $A(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1)$. Par conséquent, les solutions de (E_1) sur $\mathbb{R}$ sont toutes les fonctions de la forme :

$$h : x \mapsto Ce^{-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)} = \frac{C}{\sqrt{1+x^2}} \text{ où } C \in \mathbb{R}.$$

5. Résolution de l'équation différentielle $(E_1) : y' + y\tan(x) = \cos^2(x)$.
Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficient continu sur $\mathcal{D}_{\tan}$. On détermine les solutions sur un intervalle $I \subset \mathcal{D}_{\tan}$.

• **Résolution de l'équation homogène :** ici $a(x) = \tan(x)$. Une primitive est $A(x) = -\ln(|\cos x|)$. Par conséquent, les solutions de (H_1) sur I sont toutes les fonctions de la forme

$$h : x \mapsto C\cos(x), \text{ où } C \in \mathbb{R}.$$

Comme la fonction cos *garde un signe constant sur I, et toutes les constantes réelles C sont permises, les valeurs absolues sont inutiles finalement.*

• **Recherche d'une solution particulière :** on met en œuvre la **méthode de la variation de la constante**. On cherche donc une solution particulière y_0 de la forme $y_0(x) = c(x)\cos(x)$, où $c : I \to \mathbb{R}$ est dérivable. Il vient :

$$\begin{array}{r|l} -2\times & y_0(x) = c(x)\cos(x) \\ 1\times & y_0'(x) = c'(x)\cos(x) - c(x)\sin(x) \end{array}$$

Ainsi, y_0 est solution de (E_1) sur I $\iff \forall x \in I, y_0'(x) + \tan(x)y_0(x) = \cos^2(x)$

$$\iff \forall x \in I, c'(x)\cos(x) = \cos^2(x)$$
$$\iff \forall x \in I, c'(x) = \cos(x)$$

Le choix $c(x) = \sin(x)$ convient : la fonction $y_0 : x \mapsto \sin(x)\cos(x)$ est une solution particulière de (E_1).

• **Expression de la solution générale :** finalement, les solutions de (E_1) sur I sont toutes les fonctions de la forme :

$$f : x \mapsto \sin(x)\cos(x) + C\cos(x), \text{ où } C \in \mathbb{R}.$$

▲

Exercice 8.9

• **Résolution de l'équation homogène :** $(H_1) \iff y'(x) + \frac{1}{x}y(x) = 0$. Ici $a(x) = \frac{1}{x}$ admet comme primitive $A(x) = \ln(x)$. Par suite, les solutions de (H_1) sur $I = \mathbb{R}^{+\star}$ sont toutes les fonctions de la forme :

$$h : x \mapsto Ce^{-A(x)} = \frac{C}{x}, \text{ où } C \in \mathbb{R}.$$

• **Recherche d'une solution particulière :** on met en œuvre la **méthode de la variation de la constante**. On cherche une solution y_0 sous la forme $y_0(x) = \frac{c(x)}{x}$. Il vient :

$$\begin{array}{r|l} 1\times & y_0(x) = c(x)\frac{1}{x} \\ x\times & y_0'(x) = c'(x)\frac{1}{x} - c(x)\frac{1}{x^2} \end{array}$$

Ainsi, y_0 est solution de (E_1) sur I $\iff \forall x \in I, xy_0'(x) + y_0(x) = \text{Arctan}\,(x)$

$$\iff \forall x \in I, c'(x) = \text{Arctan}\,(x)$$

Déterminons une primitive de Arctan. On obtient en intégrant par parties que $c(x) = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \text{Arctan}\,(x)$ convient.

Exercice 8.2

• **Expression de la solution générale :** en conclusion, les solutions de (E_1) sur I sont toutes les fonctions de la forme

$$f : x \mapsto -\frac{1}{2x}\ln(1+x^2) + \text{Arctan}\,(x) + \frac{C}{x}, \text{ où } C \in \mathbb{R}.$$

▲

Exercice 8.10

Nous effectuons le changement de fonction inconnue $u = x+iy$ dans le système différentiel (E) $\begin{cases} x'(t) = 2tx(t) - y(t) + t\cos t \\ y'(t) = x(t) + 2ty(t) + t\sin t \end{cases}$.

En identifiant parties réelle et imaginaire, il vient :

$$\begin{aligned} (E) &\iff x'(t) + iy'(t) = (2t+i)x(t) + (-1+2it)y(t) + te^{it} \\ &\iff x'(t) + iy'(t) = (2t+i)x(t) + (2t+i)iy(t) + te^{it} \\ &\iff \begin{cases} u(t) = x(t) + iy(t) \\ u'(t) = (2t+i)u(t) + te^{it} \quad (F) \end{cases} \end{aligned}$$

$\boxed{1}$ (F) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

• **Résolution de l'équation homogène associée** $(H_1) : u' - (2t+i)u = 0$. Ici $a(t) = -(2t+i)$. On prendra $A(t) = -(t^2+it)$. Les solutions complexes de (H_1) sont toutes les fonctions de la forme :

$$h : t \mapsto Ce^{t^2+it}, \text{ où } C \in \mathbb{C}.$$

• **Recherche d'une solution particulière :** on met en œuvre la **méthode de la variation de la constante**. On cherche u_0 sous la forme $u_0(t) = c(t)e^{t^2+it}$. On a :

$$\begin{array}{r|l} -(2t+i)\times & u_0(t) = c(t)e^{t^2+it} \\ 1\times & u_0'(t) = \left[c'(t) + (2t+i)c(t)\right]e^{t^2+it} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, } u_0 \text{ est solution de } (F) \text{ sur } \mathbb{R} &\iff \forall t \in \mathbb{R}, u_0'(t) - (2t+i)u_0(t) = te^{it} \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}, c'(t)e^{t^2+it} = te^{it} \\ &\iff \forall x \in I, c'(t) = te^{-t^2} \end{aligned}$$

Prenons $c(t) = -\frac{1}{2}e^{-t^2}$. On obtient alors que $u_0(t) = -\frac{1}{2}e^{it}$ est une solution particulière de (F).

• **Expression de la solution générale :** finalement, les solutions à valeurs complexes de (F) sont toutes les fonctions de la forme :

$$t \mapsto \frac{-1}{2}e^{it} + Ce^{t^2+it}; C \in \mathbb{C}\}$$

$\boxed{2}$ Les parties réelles et imaginaires des solutions de (F) forment les couples solutions du système (E). Ce sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} x : t \mapsto -\frac{1}{2}\cos t + Ce^{t^2}\cos t \\ y : t \mapsto -\frac{1}{2}\sin t + Ce^{t^2}\sin t \end{cases}, \text{ où } C \in \mathbb{R}.$$

▲

Exercice 8.11

• **Résolution de l'équation homogène associée**

$$(H_1) : (x+1)y' - xy = 0 \iff y' - \frac{x}{x+1}y = 0.$$

Ici, le coefficient est la fonction (continue sur $I =]-1, +\infty[$) définie par $a(x) = -\frac{x}{x+1} = -1 + \frac{1}{1+x}$. On prendra comme primitive $A(x) = x - \ln(x+1)$, de sorte que les solutions de (H_1) sur I sont toutes les fonctions de la forme :

$$h : x \mapsto C\,\frac{e^x}{x+1}, \text{ où } C \in \mathbb{R}.$$

• **Recherche d'une solution particulière** de $(E) : (x+1)y'(x) - x\,y(x) + 1 = 0$. Suivant la méthode de la variation de la constante, on cherche y_0 sous la forme $y_0(x) = c(x)\,\frac{e^x}{x+1}$. On a :

$$\begin{array}{r|l} -x\times & y_0(x) = c(x)\,\frac{e^x}{x+1} \\ (x+1)\times & y_0'(x) = c'(x)\,\frac{e^x}{x+1} + c(x)\,\frac{xe^x}{(x+1)^2} \end{array}$$

Résoudre un problème de Cauchy d'ordre 1, rajoute une étape après résolution de l'équation.

On commence par résoudre l'équation différentielle linéaire d'ordre 1. Ses solutions dépendent d'une constante $C \in \mathbb{R}$.

La dernière étape, consiste à choisir la constante, de sorte que la condition initiale soit également vérifiée.

Corrigé

Ainsi, y_0 est solution de (E) sur I $\iff \forall x \in I, (x+1)y'(x) - x\,y(x) + 1 = 0$

$$\iff \forall x \in I, c'(x)\ e^x = -1$$
$$\iff \forall x \in I, c'(x) = -e^{-x}$$

Prenons $c(x) = e^{-x}$, il s'ensuit que $y_0(x) = \frac{1}{x+1}$ est une solution particulière (E).

• **Expression de la solution générale de** (E) **:** finalement, les solutions de l'équation (E) sur I sont toutes les fonctions de la forme

$$f : x \mapsto \frac{1}{x+1} + C\ \frac{e^x}{x+1},\ \text{où } C \in \mathbb{R}.$$

• **Résolution du problème de Cauchy** $(\mathcal{C})$ **:** pour obtenir la solution f_0 du problème de Cauchy, il reste à déterminer la valeur de la constante réelle C. En évaluant en 0, il vient que $2 = f_0(0) = 1 + C$, d'où l'on tire immédiatement que C doit être égal à 1. En conclusion, la solution du problème de Cauchy $\mathcal{C}$ est la fonction définie opur $x \in I$ par $f_0(x) = \dfrac{1+e^x}{x+1}$.

▲

Exercice 8.12

1. Pour (E_1) : l'équation caractéristique $r^2 - 5r + 6 = 0$ a pour racines $\{3, 2\}$. On cherche une solution particulière sous forme d'un polynôme du second degré. Le lecteur remplace $y(x)$ par $ax^2 + bx + c$ dans le premier membre de (E_1) et identifie le résultat à $x^2 + 1$. Après identification, on trouve :

$$x \mapsto \frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{18}x + \frac{37}{108}$$

Voir la **méthode 8.18.**

et finalement

$$\mathcal{S}_{E_1}(\mathbb{R}) = \{\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{18}x + \frac{37}{108} + \lambda e^{2x} + \mu e^{3x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

Méthode 8.19

2. Pour (E_2) : l'équation caractéristique est $r^2 - 2r + 1 = 0$ et 1 est la racine double. On cherche une solution particulière de la forme

$$y_1(x) = b_0 x^2 e^x$$

Après un travail d'identification, on trouve $y_1 : x \mapsto x^2 e^x$ et la récompense de nos efforts est :

$$\mathcal{S}_{E_2}(\mathbb{R}) = \{\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2\ e^x + (\lambda x + \mu)e^x,\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

3. Voici enfin (E_3) et son équation caractéristique indispensable $r^2 + 4r + 4 = 0$ de racine double -2. On cherche alors une solution particulière de la forme $x \mapsto b_0 e^{-x}$. Le lecteur trouve (après moultes calculs pas trop pénibles) $x \mapsto 1e^{-x}$ et on récolte nos fruits :

$$\mathcal{S}_{E_3}(\mathbb{R}) = \{\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto e^{-x} + (\lambda x + \mu)e^{-2x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

4. Il reste (E_4) : l'équation caractéristique $r^2 - 4r + 4 = 0$ a pour racine double : $r = 2$. Les solutions de l'équation homogène sont :

$$\mathcal{S}_{E_{4,0}}(\mathbb{R}) = \{\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{2x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

On cherche alors une solution particulière. Pour ce faire, conformément à la **méthode 8.20**, on passe en complexes : l'équation $(\tilde{E}_4)$ $y'' - 4y' + 4y = e^{ix}$ admet pour solution particulière $\tilde{y}_0 = \frac{3+4i}{25}e^{ix} = \frac{3+4i}{25}\left(\cos(x) + i\sin(x)\right)$. En prenant la partie imaginaire il s'ensuit que la fonction $x \mapsto \frac{3}{25}\sin x + \frac{4}{25}\cos x$ est une solution particulière de (E_4). Ainsi,
$\mathcal{S}_{E_4}(\mathbb{R}) = \{x \mapsto \frac{4}{25}\cos x + \frac{3}{25}\sin x + (\lambda x + \mu)e^{2x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$. ▲

Exercice 8.13

On effectue le changement de fonction $y(x) = e^{2x}z(x)$. On obtient :

$$e^{2x}(4z(x) + 4z'(x) + z''(x) - 8z(x) - 4z'(x) + 4z(x)) = \frac{e^{2x}}{x^2}.$$

On a : $y' = (2z(x) + z'(x))e^{2x}$ et $y''(x) = (4z(x) + 4z'(x) + z''(x))e^{2x}$.

Cela donne : $z''(x) = \dfrac{1}{x^2}$. On intègre deux fois et on a :

$$z(x) = -\ln x + K_1 x + K_2, \text{ où } (K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Les conditions initiales donnent $K_1 = 1 - 2e^{-2}$ et $K_2 = 3e^{-2} - 1$.

Il reste : $y(x) = e^{2x}\left(-\ln x + K_1 x + K_2\right)$. ▲

Exercice 8.14

On résout l'équation caractéristique de (H_2) associée :

$$z^2 - 2(1+i)z + 2i = 0$$

On voit facilement que $z = 1 + i$ est solution double. Finalement

$$\mathcal{S}_{H_2}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} :\ x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{(1+i)x},\ (\lambda,\ \mu) \in \mathbb{C}^2\}$$

Il nous reste à trouver une solution particulière de l'équation (E). On calque la méthode vue pour des équations à coefficients réels. Comme le second membre est $x \mapsto x + i$, on cherche une solution particulière de la forme $y_1(x) = ax + b$, où a et b sont deux complexes. On a : $-2a(1+i) + 2i(ax+b) = x + i$ ce qui donne $a = b = -i/2$. Il reste à écrire que notre solution a la forme

$$x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{(1+i)x} - \frac{i}{2}(1+x)$$

Les conditions initiales donnent $\lambda = \dfrac{1}{2}$ et $\mu = \dfrac{i}{2}$. La solution est :

$$x \mapsto \frac{1}{2}(i + x)e^{(1+i)x} - \frac{i}{2}(1+x)$$

▲

Exercice 8.15

On commence par remarquer que :
$8e^x\cos^3 x = e^{(1+3i)x} + e^{(1-3i)x} + 3e^{(1-i)x} + 3e^{(1+i)x}$.
En couplant la méthode de superposition et la **méthode 8.19**, on considère les quatre équations :

$$(E_1) : y''(x) + y'(x) + y(x) = e^{(1+3i)x},\ (E_2) : y''(x) + y'(x) + y(x) = e^{(1-3i)x},$$

$(E_3) : y''(x) + y'(x) + y(x) = 3e^{(1-i)x}$, $(E_2) : y''(x) + y'(x) + y(x) = 3e^{(1+i)x}$.

On cherche une solution particulière de (E_1) de la forme $y_1(x) = \lambda e^{(1+3i)x}$, où λ est un complexe à trouver. On trouve $\lambda = -\dfrac{2}{39} - \dfrac{i}{13}$. Une solution particulière de (E_2) est donc $\overline{y}_1$. De même, on cherche une solution particulière de (E_3) de la forme $y_3(x) = \mu e^{(1-i)x}$, où μ est un complexe à trouver. On trouve $\mu = \dfrac{6}{13} + \dfrac{9i}{13}$. Une solution particulière de (E_4) est donc $\overline{y}_3$. Une solution particulière de (E) est $y_0 = y_1 + \overline{y}_1 + y_3 + \overline{y}_3$. En arrangeant, on obtient : $y_0(x) = \dfrac{2}{39} e^x \left[-2\cos 3x + 3\sin 3x + 18\cos x + 27\sin x\right]$. ▲

Chapitre 9

Suites numériques

UN MATHÉMATICIEN

Fils d'un commerçant toscan, **Fibonacci** parcourt de nombreux pays méditerranéens et entre en contact avec les mathématiques grecques et arabes.
Il revient persuadé de la supériorité du système d'écriture des nombres par les chiffres arabes, ce que nous utilisons de nos jours, et en expose le maniement en détail. Sa célébrité provient de la suite définie par récurrence par $u_0 = u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ et dont le quotient u_{n+1} / u_n tend vers le nombre d'or.

Un peu d'histoire

La notion de suite de nombres est très présente en mathématiques. Elle est utilisée dès l'Antiquité pour calculer des aires ou des volumes par approximations successives. À la Renaissance, on étudie les suites géométriques pour les calculs d'intérêts et dans les siècles suivants, ceci se généralise dans des modèles de croissance exponentielle.

Cette notion prend son essor en analyse lorsqu'on a pris conscience que les solutions de nombreux problèmes ne pouvaient s'exprimer à l'aide de formules mais que seules des méthodes approchées pouvaient y répondre. C'est par exemple le cas de l'équation polynomiale du cinquième degré comme l'ont montré Niels Abel et Évariste Galois au début du XIXe siècle. Par ailleurs, les suites ont pris toute leur importance pour l'étude de limites de fonctions. Le développement de l'informatique a amplifié leur importance.

Objectifs

les incontournables

- Étudier des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, en extraire leurs principales caractéristiques :
  - monotonie ;
  - convergence.
- Calculer des limites dans des formes indéterminées.
- Étudier des suites définies implicitement.

et plus si affinités

- Se ramener à des suites convergentes grâce à des sous-suites.

Résumé de cours

Propriété de la borne supérieure

Majorants, minorants

Définition : *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$ un nombre réel. On dit que :*

- *x est un* **majorant** *de A* *si* $\forall a \in A, \quad a \leqslant x$;
- *x est un* **minorant** *de A* *si* $\forall a \in A, \quad a \geqslant x$;
- *x est le* **plus grand élément** *de A* *si* *x est un élément et un majorant de A ;*
- *x est le* **plus petit élément** *de A* *si* *x est un élément et un minorant de A.*

Vocabulaire : *A est dite* **minorée** *(resp.* **majorée***) si elle admet un minorant (resp. un majorant). A est dite* **bornée** *si elle est à la fois minorée et majorée.*
Une partie A de $\mathbb{R}$ est bornée si et seulement si il existe $C > 0$ telle que : $\forall a \in A, \ |a| \leqslant C$. On dit alors que la partie A est bornée par C.

Bornes supérieure, inférieure

Définition : *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$, α un nombre réel. On dit que*

- *α est la* **borne supérieure** *de A et on note $\alpha = \sup A$ si α est le plus petit majorant de A.*
- *α est la* **borne inférieure** *de A et on note $\alpha = \inf A$ si α est le plus grand minorant de A.*

Théorème 9.1.— R a la propriété de la borne supérieure —.

- Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.
- Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ possède une borne inférieure.

Remarque : à la différence de $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$, dans $\mathbb{R}$ une partie non vide et majorée n'admet pas toujours un plus grand élément. À la place, elle possède toujours un plus petit majorant (borne supérieure).

Convexité des intervalles

Proposition 9.2.— Parties convexes de $\mathbb{R}$ —. Les intervalles sont les seules parties convexes de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire les seules parties vérifiant :

$$\boxed{\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad a, b \in I \Rightarrow [a,b] \subset I}$$

Droite numérique achevée

Définition : *On appelle* **droite numérique achevée**, *et on note $\overline{\mathbb{R}}$, l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels auquel on ajoute deux éléments* **non réels**, *notés $+\infty$ et $-\infty$. On note aussi $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.*

Remarque : une partie non vide de $\mathbb{R}$ possède toujours des bornes supérieure et inférieure dans $\overline{\mathbb{R}}$:

- Si A est majorée $\sup A$ est le plus petit majorant – réel– de A, si A n'est pas majorée, on convient que $\sup A = +\infty$;
- Si A est minorée $\inf A$ est le plus grand minorant – réel– de A, si A n'est pas minorée, on convient que $\inf A = -\infty$.

■ Généralités sur les suites

Premières notions sur les suites

Définition : *On appelle* ***suite de nombres réels****, toute fonction* $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *définie sur l'ensemble des entiers naturels* $\mathbb{N}$*. On note pour tout entier* $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u(n)$ *et* $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Notation : $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *désigne l'ensemble des suites réelles.*

Définition : *Soit* $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *une suite de nombres réels. On dit que la suite* u *est :*

- ***minorée****, majorée ou bornée si l'ensemble des valeurs* $A = \{u_n \in \mathbb{R}\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ *l'est ;*
- ***croissante*** *(resp. strictement croissante) si :* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_{n+1}$ *(resp.* $u_n < u_{n+1}$*) ;*
- ***décroissante*** *(resp. strictement décroissante) si :* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant u_{n+1}$ *(resp.* $u_n > u_{n+1}$*) ;*
- ***monotone*** *(resp. strictement monotone) si elle est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante).*

Suites extraites

Définition : *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites de nombres réels. On dit que* v *est une* ***suite extraite*** *de* u *s'il existe une fonction* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *strictement croissante telle que :* $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{\varphi(n)}$. *Les suites extraites de la suite* u *sont notées* $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *ou encore* $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.

Limite d'une suite

Définition : *Soit* $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *une suite de nombres réels et* $\ell \in \mathbb{R}$*. On dit que*

- u ***converge vers*** ℓ *si* $(\forall \varepsilon > 0), (\exists n_0 \in \mathbb{N});\ (\forall n \in \mathbb{N})\ \big((n \geqslant n_0) \Rightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon\big)$;
- u ***diverge vers*** $+\infty$ *si* $(\forall A \in \mathbb{R}),\ (\exists n_0 \in \mathbb{N});\ (\forall n \in \mathbb{N})\ \big((n \geqslant n_0) \Rightarrow (u_n \geqslant A)\big)$.
- u ***diverge vers*** $-\infty$ *si* $(\forall A \in \mathbb{R}),\ (\exists n_0 \in \mathbb{N});\ (\forall n \in \mathbb{N})\ \big((n \geqslant n_0) \Rightarrow (u_n \leqslant A)\big)$.

On note ces relations $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ *ou* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Vocabulaire : u *est dite* ***convergente*** *s'il existe* $\ell \in \mathbb{R}$ *telle que* u *converge vers* ℓ*. Dans le cas contraire,* u *est dite* ***divergente****.*

Théorème 9.3.— Unicité de la limite —. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels, $(\ell, \ell') \in \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$.

$$\boxed{\textbf{Si } \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \text{ et } \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell'\ ,\ \textbf{alors } \ell = \ell'.}$$

Remarque : une suite de nombres réels converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ ssi il existe une suite v, convergente vers 0 telle que $u = \ell + v$.

Limites et inégalités

Proposition 9.4.— Soit u et v deux suites de nombres réels convergentes.

- **Si** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n < \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ **alors** $(\exists n_0 \in \mathbb{N});\ (\forall n \in \mathbb{N}),\ \big(n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n < v_n\big)$
- **Si** $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n$ **alors** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

Retenez que : le passage à la limite dans une inégalité large ou stricte conduit toujours à une inégalité large.

Théorème 9.5.— Bornitude d'une suite convergente —. Toute suite convergente est bornée.

■ Théorèmes d'existence de limites

Suites extraites

Proposition 9.6.— Suites extraites d'une suite convergente —. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose que u est convergente vers ℓ. Alors toute suite extraite de u est convergente de limite ℓ.

Proposition 9.7.— Convergence par complémentarité —. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{Si } \left.\begin{array}{l} \bullet \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \ell \\ \bullet \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \ell \end{array}\right) \text{ alors } u \text{ est convergente et } \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell.}$$

Opérations sur les limites

Théorème 9.8.— Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ deux suites réelles, $\ell, \ell' \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lambda \in \mathbb{R}^\star$ un nombre réel. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell'$. Alors

- $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = |\ell|$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (\lambda \cdot u_n) = \lambda.\ell$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = \ell + \ell'$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n) = \ell \times \ell'$.
- Si de plus $\ell \neq 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1/u_n\right) = 1/\ell$.
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0^+$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1/u_n\right) = +\infty$.

Existence de limite par comparaison, encadrement

Théorème 9.9.— Existence de limite par encadrement —. Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{Si } \left.\begin{array}{l} \bullet\ u \text{ et } w \text{ convergent vers } \ell. \\ \bullet\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \end{array}\right) \text{ alors } v \text{ est convergente et } \lim_{n\to+\infty} v_n = \ell.}$$

Vocabulaire : *ce théorème est aussi appelé le* **théorème des gendarmes**.

Théorème 9.10.— Existence de limite par comparaison —. Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

$$\text{Si } \left.\begin{array}{l} \bullet \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \\ \bullet\ \forall n \in \mathbb{N},\ |v_n| \leqslant |u_n| \end{array}\right) \text{ alors } v \text{ est convergente et } \lim_{n\to+\infty} v_n = 0$$

$$\text{Si } \left.\begin{array}{l} \bullet \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \\ \bullet\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_n \geqslant u_n \end{array}\right) \text{ alors } v \text{ est divergente et } \lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$$

Corollaire 9.11.— Si u est une suite bornée et v est une suite convergente de limite 0, alors le produit $u \times v$ est une suite convergente de limite 0.

Limite des suites monotones

Théorème 9.12.— Théorème de la limite monotone —. Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite **monotone**.

- On suppose que u est **croissante**.
  - Si u est majorée, alors u est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sup\limits_n u_n = \sup\{u_n;\ n \in \mathbb{N}\}$.
  - Si u n'est pas majorée alors u est divergente vers $+\infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- On suppose que u est **décroissante**.
  - Si u est minorée, alors u est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \inf\limits_n u_n = \inf\{u_n;\ n \in \mathbb{N}\}$.
  - Si u n'est pas minorée alors u est divergente vers $-\infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Convergence des suites adjacentes

Définition : *Soit $(u, v) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^2$. Les suites u et v sont dites **adjacentes** si*

- *l'une est croissante et l'autre décroissante.*
- *$(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite nulle.*

Théorème 9.13.— Théorème de convergence des suites adjacentes —. Soit u et v deux suites adjacentes. Alors :

$$\boxed{u \text{ et } v \text{ sont convergentes et ont même limite.}}$$

De plus, si u est croissante et v est décroissante, alors $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2,\ u_n \leqslant \ell \leqslant v_p$.

Proposition-Définition 9.14.— Approximation décimales d'un réel — Soit $x \in \mathbb{R}$ un réel.
On note pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $p_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ et $q_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$.
Les suites (p_n) et (q_n) sont adjacentes de limite commune x. En conséquence, les ensembles $\mathbb{D}$ des nombres décimaux et $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels sont denses dans $\mathbb{R}$.

Vocabulaire : *p_n et q_n sont les **approximations décimales par défaut et par excès de x à** 10^{-n} près.*

■ Suites de référence

Suites récurrentes classiques

Définition : *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On dit que :*

- *u est **arithmétique** s'il existe $r \in \mathbb{R}$, appelée raison, tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r$;*
- *u est **géométrique** s'il existe $q \in \mathbb{R}$, appelée raison, tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = q \cdot u_n$;*
- *u est **arithmético-géométrique** s'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = a \cdot u_n + b$.*

Remarque : les suites arithmétiques et géométriques sont des cas particuliers de suites arithmético-géometriques.

Proposition 9.15.— Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombre réels.

- Si u est la suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$.
- Si u est la suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \cdot q^n$.

Proposition 9.16.— Somme des premiers termes d'une suite géométrique —. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$, alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \, \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Définition : *On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est* ***récurrente linéaire d'ordre*** *2 s'il existe deux constantes a et b telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+2} = a \cdot u_{n+1} + b \cdot u_n$.*

Suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Théorème-Définition 9.17.— Étant donné une fonction $f : I \to I$ définie et à valeurs dans un même intervalle I et $a \in I$, il existe une suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, unique, telle que $u_0 = a$ et

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)} \tag{9.1}$$

De plus, $(u_n) \in I^{\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de I.

Vocabulaire : *la fonction $f : I \to I$ est appelée la* ***fonction itératrice****.*

Théorème 9.18.— Cas d'une itératrice monotone —. Soit $f : I \to I$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par (9.1). On suppose que f est monotone.

- Si f est croissante sur I alors (u_n) est monotone.
- Si f est décroissante sur I alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et de monotonies contraires.

Théorème 9.19.— Cas d'une itératrice continue —. Soit $f : I \to I$ une fonction continue et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par (9.1).

Si (u_n) convergente vers $\ell \in I$, **alors** sa limite ℓ est solution dans I de l'équation : $f(x) = x$.

Vocabulaire : *les solutions de l'équation $f(x) = x$ sont appelées les* ***points fixes*** *de f.*

Méthodes

Méthode 9.1.— Comment exploiter une borne supérieure ou inférieure

Étant donné une partie A de $\mathbb{R}$ et un nombre réel τ :

- pour exploiter le fait que $\tau = \sup A$, on utilise souvent les assertions suivantes (la deuxième est impliquée par la troisième) :
  - il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante d'éléments de A et convergeant vers τ ;
  - il existe une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement décroissante d'éléments n'appartenant pas à A et convergeant vers τ ;
  - le nombre τ est un majorant de A ;
- pour exploiter de même le fait que $\tau = \inf A$, on utilise l'existence de deux suites adjacentes $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers τ, l'une à éléments hors de A et l'autre à éléments dans A, et le fait que le nombre τ est un minorant de A.

Mise en œuvre : exercice 9.3

Exemple : montrer que si $f : [0,1] \to [0,1]$ est une fonction croissante, alors la fonction f admet au moins un point fixe.

Pour le démontrer, on pose $\mathcal{F} = \{x \in [0,1] \mid f(x) \geqslant x\}$. L'ensemble $\mathcal{F}$ est non vide car il contient 0 et est majoré par 1 : la partie $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}$ admet donc une borne supérieure τ.

On en déduit l'existence d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante d'éléments dans $\mathcal{F}$ et convergeant vers τ. Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leqslant f(a_n)$. Or, chaque a_n est inférieur au majorant τ de $\mathcal{F}$ et par croissance de la fonction f, on en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(a_n) \leqslant f(\tau)$, donc $a_n \leqslant f(\tau)$. En passant à la limite dans cette dernière inégalité lorsque n tend vers $+\infty$, on obtient : $\tau \leqslant f(\tau)$.

De par $\tau = \sup \mathcal{F}$, on en déduit que pour tout $n \geqslant 1$, le nombre $\tau + \dfrac{1}{n}$ ne peut appartenir à l'ensemble $\mathcal{F}$. Cependant, il ne faut pas perdre de vue qu'il y a plusieurs façons de ne pas appartenir à cet ensemble, d'où la distinction de cas.

- **Premier cas** : $\tau = 1$. Alors, comme $f(\tau)$ appartient à l'intervalle $[0,1]$, on a : $f(1) \leqslant 1$, puis $f(\tau) \geqslant \tau = 1$, d'où l'égalité $f(1) = 1$.
- **Second cas** : $\tau < 1$. Pour n assez grand, le nombre $\tau + \dfrac{1}{n}$ est dans l'intervalle $[0,1]$ et comme ce nombre n'appartient pas à $\mathcal{F}$, il ne reste que :

$$f\left(\tau + \frac{1}{n}\right) < \tau + \frac{1}{n} \quad \text{puis :} \quad f(\tau) \leqslant f\left(\tau + \frac{1}{n}\right) < \tau + \frac{1}{n},$$

  et le passage à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ conduit à : $f(\tau) \leqslant \tau$.

Dans tous les cas, $f(\tau) = \tau$ et la borne supérieure τ est un point fixe pour la fonction f.

❑ **Méthode 9.2.— Comment étudier une suite de nombres réels**

Étant donné une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels, voici les questions qu'il faut se poser :

1 La suite u est-elle monotone ? Pour le savoir,

- déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n$;
- lorsque u_n est donné par un produit ou un quotient de nombres positifs, comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 ;

2 La suite u est-elle convergente ? Voici quelques pistes selon les situations rencontrées.

- Pour établir seulement la convergence, utiliser le théorème des suites monotones, lequel ne permet en aucune façon de calculer la valeur de la limite.
- Lorsque l'on a une idée de la limite ℓ, simplifier l'expression $u_n - \ell$ ou procéder à un encadrement de u_n pour appliquer le théorème de convergence par encadrement.
- En l'absence de monotonie et d'intuition concernant la valeur de la limite, utiliser une relation éventuelle entre les différents termes de la suite (par exemple, u_n en fonction de u_{n-1} et u_{n-2}), puis passer à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ pour obtenir une équation pour ℓ.
- On peut accéder à la convergence d'une suite à travers les sous-suites : si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite, la suite u est convergente si et seulement si les deux sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes vers la même limite.

Mise en œuvre : exercice 9.8, exercice 9.9, exercice 9.11, exercice 9.12

Exemple : étudier la suite (u_n) définie pour $n \geqslant 1$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 + k\cdot\sin(2^k)}$.

1 On commence par étudier la monotonie de la suite u. Pour tout n dans $\mathbb{N}^\star$:

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2 + k\cdot\sin(2^k)} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 + k\cdot\sin(2^k)} = \frac{1}{(n+1)^2 + (n+1)\cdot\sin(2^{n+1})}$$

Or, $(n+1)^2 + (n+1)\cdot\sin(2^{n+1}) \geqslant (n+1)^2 - (n+1) = n\cdot(n+1) > 0$. La suite u est strictement croissante.

2 De plus $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 + k\cdot\sin(2^k)} = \frac{1}{1+\sin 2} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2 + k\cdot\sin(2^k)} \leqslant \frac{1}{1+\sin 2} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2 - k}$.

Par ailleurs, pour tout entier $k \geqslant 2$: $\dfrac{1}{k^2-k} = \dfrac{1}{k\cdot(k-1)} = \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$, de sorte que :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-k} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n} \leqslant 1.$$

On en déduit que pour tout entier $n \geqslant 1$: $u_n \leqslant \dfrac{1}{1+\sin 2} + 1$. La suite u est croissante et majorée : elle est donc convergente d'après le théorème de la limite monotone.

■ Suites complexes

Soit (z_n) une suite de nombres complexes, $\ell \in \mathbb{C}$. Par définition, (z_n) **converge vers** ℓ si

$$(\forall \varepsilon > 0), (\exists n_0 \in \mathbb{N});\ (\forall n \in \mathbb{N})\ \big((n \geqslant n_0) \Rightarrow |z_n - \ell| \leqslant \varepsilon\big)$$

> ❑ **Méthode 9.3.— Comment étudier une suite de nombres complexes**
> En l'absence de relation d'ordre compatible avec les opérations dans $\mathbb{C}$, nombre de théorèmes valables pour les suites réelles ne sont plus envisageables pour les suites complexes. Pour étudier une suite (z_n) de nombres complexes, on utilisera l'écriture algébrique.
> $\boxed{1}$ On détermine $u_n = \mathfrak{Re}\,(z_n)$ et $v_n = \mathfrak{Im}\,(z_n)$.
> $\boxed{2}$ On étudie les suites réelles (u_n) et (v_n).
> $\boxed{3}$ Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \beta \in \mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = \alpha + i\beta$.

Remarque : ainsi, l'étude d'une suite de nombres complexes (z_n) se ramène à l'étude des deux suites réelles $(\mathfrak{Re}\,(z_n))$ et $(\mathfrak{Im}\,(z_n))$.

■ Calculs pratiques

> ❑ **Méthode 9.4.— Comment déterminer la limite d'une suite**
> Pour avoir la valeur exacte de la limite d'une suite convergente $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il faut :
> - éventuellement procéder à un encadrement de u_n pour simplifier les expressions ;
> - obtenir à un moment ou à un autre une expression exacte de u_n ou des termes encadrant u_n ;
> - procéder à un calcul direct de la limite dans ces expressions simplifiées.

Mise en œuvre : exercice 9.6, exercice 9.13, exercice 9.14

Exemple : déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour $n \geqslant 2$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1}$.

On remarque que : $\forall k \geqslant 2,\ \dfrac{1}{k^2-1} = \dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k+1}\right)$. Ainsi :

$$\forall n \geqslant 2, \quad u_n = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} - \sum_{k=3}^{n+1}\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

On conclut que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{3}{4}$.

Exemple : en posant $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$, déterminer la limite : $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

Il semble hors de question de simplifier directement l'expression de la somme en fonction de n.
On remarque que lorsque n est grand, tous les termes $\dfrac{k}{n^2}$ sont compris entre 0 et $\dfrac{1}{n}$, donc sont proches de 0. Une étude de la fonction f montre qu'au voisinage à droite en 0 : $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant f(x) \leqslant x$.
On en déduit pour n assez grand : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}$. Or, nous connaissons les sommes qui encadrent ces inégalités :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2} \quad \text{puis} \quad \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2n^4} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^4} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Le théorème des gendarmes montre que la limite vaut $\dfrac{1}{2}$.

■ Suites de référence

❑ Méthode 9.5.— Comment traiter les suites arithmético-géométriques
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmético-géométrique vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = a \cdot u_n + b$, avec $a \neq 1$ et b deux constantes. Pour trouver la formule u_n en fonction de n :

1. On résout l'équation $\lambda = a \cdot \lambda + b$; on trouve : $\lambda_0 = \dfrac{b}{1-a}$.
2. On pose $v_n = u_n - \lambda_0$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison a.
3. On trouve la formule pour v_n en fonction de $v_0 = u_0 - \lambda_0$ par exemple.
4. On trouve la formule pour $u_n = v_n + \lambda_0$.

Mise en œuvre : exercice 9.15

Exemple : au jeu des tours de Hanoï, on dispose d'une planche sur laquelle sont fixées trois barres verticales numérotées 1, 2 et 3. Sur la première barre sont disposés n disques troués empilés les uns sur les autres, les rayons des disques étant de plus en plus petits au fur et à mesure que l'on monte dans la pile des disques. Le but du jeu est de transférer les n disques de la barre verticale 1 à la barre verticale 3 en suivant les instructions suivantes : on a le droit de transférer un disque à la fois d'une barre à une autre à condition de le poser soit sur une barre vide, soit sur un disque de rayon plus grand que le disque transféré. En combien de coups au minimum peut-on transférer les n disques de la barre numéro 1 à la barre numéro 3 ?

Désignons pas u_n le nombre minimal de coups pour transférer les n disques troués. Il est clair que $u_1 = 1$ car un seul coup suffit pour transférer un seul disque.
Imaginons que l'on doive transférer $n+1$ disques de la barre 1 vers la barre 3. Vient un moment dans le jeu où l'on va transférer le disque le plus grand de la barre 1 à la barre 3. Juste avant

que ce moment n'arrive, il faut impérativement que les n disques les plus petits soient situés sur la barre numéro 2, sinon le disque le plus grand serait immobilisé. Il faut au minimum u_n coups pour arriver juste avant l'étape de transfert du $n+1$-ième disque le plus grand. On transfère alors ce plus grand disque : on a déjà fait $u_n + 1$ transferts. Il reste à transférer les n disques les plus petits de la barre 2 à la barre 3, ce qui revient à effectuer le jeu pour n disques seulement : cela fait encore u_n étapes. Finalement, on obtient la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad u_{n+1} = 2u_n + 1 \quad \text{et} \quad u_1 = 1.$$

Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique! L'équation $\lambda = 2\lambda + 1$ a pour solution $\lambda = -1$. La suite $(v_n = u_n + 1)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est géométrique de raison 2, donc : $u_n + 1 = 2^{n-1} \cdot (u_1 + 1) = 2^n$.
En conclusion, il faut au minimum $2^n - 1$ coups pour terminer le jeu avec n disques.

❑ Méthode 9.6.— Comment traiter les suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = a \cdot u_{n+1} + b \cdot u_n$, avec a et b deux constantes. Pour trouver la formule de u_n en fonction de n, on suit la méthode de l'équation caractéristique :

1. On considère le polynôme caractéristique $P(X) = X^2 - a \cdot X - b$.
2. On trouve ses deux racines réelles ou complexes q_1 et q_2 (éventuellement confondues).
3. On exprime la formule générale de u_n en fonction de n :
   - si $q_1 \neq q_2$ (racines différentes), on écrit : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \alpha \cdot q_1^n + \beta \cdot q_2^n$, avec deux constantes α et β ;
   - si $q_1 = q_2 = q$ (racines confondues), on écrit : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (\alpha \cdot n + \beta) \cdot q^n$, avec deux constantes α et β.
4. On trouve les deux constantes α et β éventuellement complexes en utilisant la donnée de deux valeurs – par exemple u_0 et u_1 – puis en résolvant un système linéaire de deux équations à deux inconnues.

Mise en œuvre : exercice 9.15

Exemple : pour tout entier naturel n, calculer u_n le nombre d'entiers naturels comportant exactement n chiffres significatifs en base 10 sans la séquence «42». Par exemple, les nombres 2403 ou 4320 comptent 4 chiffres significatifs sans la séquence «42» alors que le nombre 274425 compte 6 chiffres significatifs avec la séquence «42».
Prenons n'importe quel nombre à $(n+1)$ chiffres significatifs et rajoutons lui un chiffre tout à droite. On obtient un nombre à $(n+2)$ chiffres significatifs. Lorsque le premier nombre à $(n+1)$ chiffres est quelconque sans séquence «42», le nouveau nombre avec un chiffre de plus à droite peut renfermer la séquence «42». Cela n'arrive que lorsque dans le premier nombre à $(n+1)$ chiffres sans séquence «42», le chiffre des unités vaut 4 et que l'on a rajouté un 2 tout à droite.
En résumé, lorsque l'on prend un nombre à $(n+1)$ chiffres significatifs sans séquence «42», on a u_{n+1} possibilités. Lorsque l'on rajoute un autre chiffre à droite, cela fait $10 \cdot u_{n+1}$ possibilités et ces possibilités se rangent en deux catégories : les nombres à $(n+2)$ chiffres sans séquence «42»(u_{n+2} choix) et les nombres à $(n+2)$ chiffres avec séquence «42», c'est-à-dire se terminant par «42», avec les n chiffres les plus à gauche sans séquence «42» (u_n choix). Par conséquent :

$$10 \cdot u_{n+1} = u_{n+2} + u_n \quad \text{ou encore} \quad u_{n+2} = 10 \cdot u_{n+1} - u_n.$$

On tombe sur une suite récurrente linéaire d'ordre 2 ! Après calculs, on peut écrire pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $u_n = \alpha \cdot (5+2\sqrt{6})^n + \beta \cdot (5-2\sqrt{6})^n$, avec deux constantes α et β. Or, $u_1 = 9$ car les seuls nombres à 1 chiffre significatif forment l'ensemble $\{1, \cdots, 9\}$ et $u_2 = 89$ car les seuls nombres à 2 chiffres significatifs sans séquence «42» forment $\{10, 11, \cdots, 99\} \setminus \{42\}$. On remarque alors que la formule de récurrence marche encore lorsque $n = 0$ car u_0 désigne le nombre de nombre à zéro chiffre significatif sans séquence «42» et il n'y a qu'un seul tel nombre : le chiffre 0. La résolution du système : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 9 \end{cases}$ conduit à $\alpha = \dfrac{3+\sqrt{6}}{6}$ et $\beta = \dfrac{3-\sqrt{6}}{6}$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{3+\sqrt{6}}{6} \cdot \left(5+2\sqrt{6}\right)^n + \dfrac{3-\sqrt{6}}{6} \cdot \left(5-2\sqrt{6}\right)^n$, qui est toujours un nombre entier contrairement aux apparences.

❑ **Méthode 9.7.— Comment traiter les suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$**

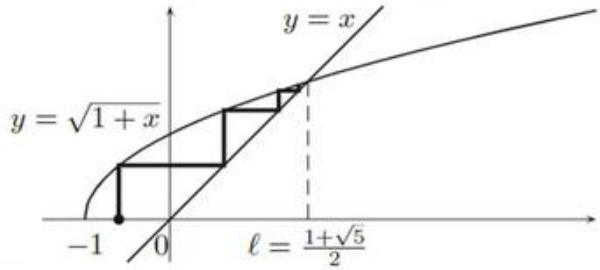
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction d'une variable réelle définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Voici la démarche pour l'étude des suites récurrentes u de type $u_{n+1} = f(u_n)$:

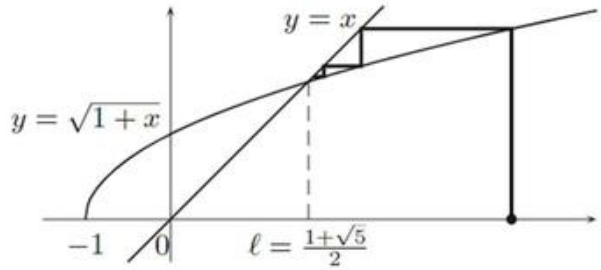
- pour éviter les mauvaises surprises, il est d'abord conseillé de visualiser graphiquement le comportement de la suite :
  - tracer dans un repère la courbe $y = f(x)$ sur l'intervalle I ;
  - tracer la première bissectrice $y = x$;
  - tracer le point de coordonnées $(u_0, 0)$ (noté M_0) ;
  - la droite verticale passant par M_0 coupe la courbe $y = f(x)$ en un point $M_0'(u_0, u_1)$;
  - la droite horizontale passant par M_0' coupe la droite $y = x$ en un point $M_0''(u_1, u_1)$;
  - la droite verticale passant par M_0'' coupe l'axe des abscisses en le point de coordonnées $(u_1, 0)$ (noté M_1) ;
  - recommmencer le procédé à partir du point M_1 pour former les points $M_2, M_3, \cdots$;
- repérer un sous-intervalle $J \subset I$ contenant u_0 et stable par f (i.e. : $f(J) \subset J$) ; la suite u prendra ses valeurs dans J ;
- étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle J ; en cas de croissance pour f, la suite u sera monotone et en cas de décroissance pour f, il s'agira d'étudier les deux sous-suites d'indices pairs et impairs ;
- étudier éventuellement la fonction $x \mapsto f(x) - x$ sur l'intervalle J pour repérer le signe de $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$;
- résoudre éventuellement l'équation $f(x) = x$ d'inconnue $x \in J$ (abscisse(s) de(s) point(s) d'intersection entre la courbe $y = f(x)$ et la droite $y = x$) pour déterminer les valeurs possibles de la limite de u en cas de convergence et en cas de continuité de f sur J.

Mise en œuvre : exercice 9.17

On donne un premier exemple avec une fonction itératrice f croissante.

Exemple : étudier la suite récurrente : $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$, avec $u_0 \geqslant -1$.
On commence par traiter graphiquement le problème selon différents points de départ :





L'intervalle $[-1, +\infty[$ est stable par f et contient u_0 : la suite u est toujours bien définie. De plus, la fonction f est croissante sur cet intervalle : la suite u est monotone, quel que soit le point de départ u_0.
Ensuite, l'étude de la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ montre qu'elle s'annule une seule fois en $\ell \geqslant 0$ tel que : $\sqrt{1+\ell} = \ell$, donc $\ell^2 - \ell - 1 = 0$, puis $\ell = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ et enfin $\ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, la seule racine positive et que :

$$\forall x \in [-1, +\infty[, \quad g(x) \geqslant 0 \iff f(x) \geqslant x \iff x \leqslant \ell.$$

On distingue finalement trois cas, selon le point de départ.

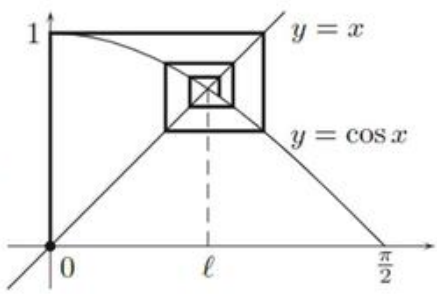
- Si $u_0 < \ell$, alors $f(u_0) > u_0$: la suite u est croissante, majorée par ℓ (par récurrence, si $u_n \leqslant \ell$, alors $f(u_n) \leqslant f(\ell)$, donc $u_{n+1} \leqslant \ell$) donc converge vers le seul point fixe de f (par continuité de f) qui est ℓ.
- Si $u_0 = \ell$, la suite u est constante égale à ℓ.
- Si $u_0 > \ell$, alors $f(u_0) < u_0$: la suite u est décroissante, minorée par -1, donc convergente vers le seul point fixe de f : ℓ.

Dans tous les cas, la suite u converge vers $\ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Voici un second exemple avec une fonction itératrice f décroissante.

Exemple : étudier la suite récurrente $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \cos u_n \end{cases}$.
On procède toujours de la même façon :

L'intervalle $[0, 1]$ est stable par la fonction cosinus et contient u_0 : tous les termes u_n appartiennent à $[0, 1]$. De plus, la fonction cos y est décroissante : les sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones, de monotonies contraires (en fait, la sous-suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, alors que la sous-suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante). Il s'agit en outre de deux suites bornées. D'après le théorème des suites monotones, ces deux sous-suites convergent vers un point fixe dans $[0, 1]$ de la fonction continue $\cos \circ \cos$ associée à ces deux suites récurrentes.



D'autre part, la fonction $g : x \mapsto \cos x - x$ est strictement décroissante sur l'intervalle $[0, 1]$. Les nombres $g(0)$ et $g(1)$ sont de signes contraires. Le théorème des valeurs intermédiaires nous dit que la fonction g ne s'annule qu'une seule fois et donc que la fonction cos n'a qu'un seul point fixe sur $[0, 1]$ noté ℓ.

Pour revenir à nos deux sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, en posant $h : x \mapsto \cos(\cos x) - x$ sur $[0,1]$, on a :

$$\forall x \in [0,1], \quad h'(x) = -\sin(\cos x)\cdot\cos x - 1 < 0 \quad \text{puis} \quad h(\ell) = \cos(\cos \ell) = \cos(\ell) = \ell.$$

La fonction h s'annule une seule fois sur l'intervalle $[0,1]$ et le nombre ℓ est le seul point d'annulation de la fonction h : les deux sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes vers la même limite ℓ. On sait alors que la suite u elle-même converge vers cette limite ℓ.

On peut remarquer que le nombre ℓ n'admet pas d'expression explicite mais que les encadrements : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} \leqslant \ell \leqslant u_{2n+1}$ permettent d'obtenir des approximations par excès ou par défaut du point fixe ℓ avec une précision aussi grande que l'on veut. Par exemple, $\ell \simeq 0,73908$ par défaut.

❑ **Méthode 9.8.— Comment traiter une suite définie implicitement**

Étant donné des fonctions $f_n : I \to \mathbb{R}$ définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ (ces fonctions dépendant de la variable entière non muette n), pour étudier l'équation $f_n(x) = 0$ d'inconnue $x \in I$:

- établir le tableau de variations de la fonction f_n
- utiliser éventuellement le théorème de la **bijection bicontinue**.

On se place dans le cas où l'équation $f_n(x) = 0$ d'inconnue $x \in I$ n'admet qu'une seule solution notée x_n. Pour étudier la suite (x_n) définie ainsi implicitement :

- utiliser que les x_n sont dans I pour en déduire un encadrement des x_n ,
- lorsque $x \in I$, comparer $f_{n+1}(x)$ et $f_n(x)$ en calculant le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$,
- déterminer alors le signe de $f_{n+1}(x_{n+1}) - f_n(x_{n+1}) = -f_n(x_{n+1})$,
- utiliser alors que $f_n(x_n) = 0$ pour obtenir le signe de $f_n(x_{n+1}) - f_n(x_n)$,
- utiliser la monotonie de la fonction f_n pour obtenir le signe de $x_{n+1} - x_n$,
- utiliser éventuellement le théorème des suites monotones pour établir la convergence de (x_n),
- utiliser la relation $f_n(x_n) = 0$ et faire tendre n vers $+\infty$ pour calculer la limite.

Mise en œuvre : exercice 9.18, exercice 9.19

Exemple : étudions la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie implicitement par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre u_n est la seule solution réelle à l'équation $x^3 + nx = 1$.
On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : x \mapsto x^3 + nx - 1$. Si n est fixé, la fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f_n'(x) = 3x^2 + n.$$

On en déduit que pour tout x non nul, alors $f_n'(x) > 0$, ce qui impose (même si lorsque $n = 0$, on a $f_0'(0) = 0$) que la fonction f_n est strictement croissante.
De plus, par les croissances comparées, on peut écrire :

$$\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty.$$

La fonction f_n établit donc une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, ce qui justifie pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'existence d'une seule solution u_n à l'équation $f_n(x) = 0$.

Passons à l'étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

• **Encadrement**

Si n est fixé dans $\mathbb{N}$, alors $f_n(0) = -1 < 0$ et $f_n(1) = n \geqslant 0$. On en déduit que $u_n \in]0, 1]$.

• **Monotonie**

Si n est fixé dans $\mathbb{N}$ et x est fixé dans $]0, 1]$, alors :

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = x > 0.$$

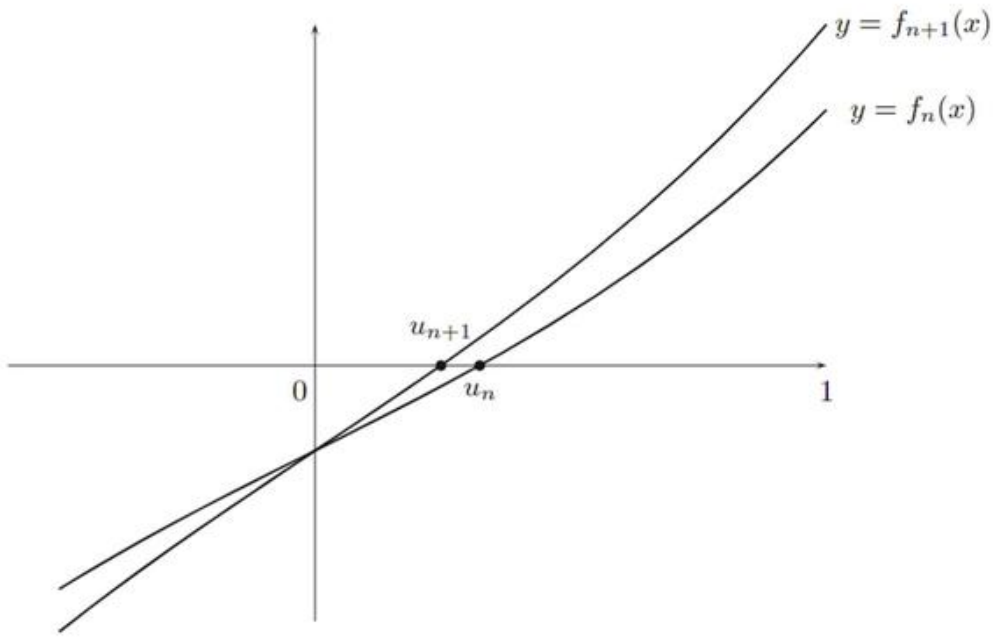
On en déduit, conformément à la méthode décrite ci-dessus que le nombre $f_{n+1}(u_{n+1}) - f_n(u_{n+1})$ est strictement positif. Autrement dit, le nombre $-f_n(u_{n+1}) = f_n(u_n) - f_n(u_{n+1})$ est strictement positif, ce qui impose :

$$f_n(u_{n+1}) < f_n(u_n).$$

Par stricte croissance de la fonction f_n, on peut écrire :

$$u_{n+1} < u_n.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
On retrouve ce résultat graphiquement :



• **Convergence**

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0 : elle converge vers une limite ℓ comprise entre 0 et 1.

• **Calcul de la limite**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient : $f_n(u_n) = 0$, donc $u_n^3 + n \cdot u_n = 1$, ou encore :

$$0 \leqslant u_n = \frac{1 - u_n^3}{n} \leqslant \frac{1}{n}.$$

Le théorème de convergence par encadrement permet de conclure que :

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

Vrai/Faux

	Vrai	Faux
1. Si une partie A de $\mathbb{R}$ admet 4 comme borne supérieure, pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, le nombre $4 - \varepsilon$ appartient à A.	☐	☐
2. Si une suite converge vers 1, à partir d'un certain rang, tous les termes sont strictement supérieurs à $0,999$.	☐	☐
3. Une suite de termes strictement positifs et tendant vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.	☐	☐
4. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée si et seulement si il existe une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ strictement croissante et tendant vers $+\infty$.	☐	☐
5. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si les deux sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes.	☐	☐
6. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^{u_n}}{e^{v_n}} = 1$.	☐	☐
7. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$.	☐	☐
8. Si u est une suite dont toutes les sous-suites convergentes tendent vers 0, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.	☐	☐
9. On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{1000} \times \dfrac{2^{3n+1}}{3^{2n-4}} = 0$.	☐	☐
10. Une suite croissante et majorée par 2 converge vers 2.	☐	☐

Énoncé des exercices

Partie entière, bornes supérieure

Exercice 9.1 : 1. Montrer que l'application $x \mapsto \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor$ prend ses valeurs dans l'ensemble $\{0, 1\}$.

2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \dfrac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor$.

Exercice 9.2 : Soit A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$. Montrer que :

$$A \subset B \Rightarrow \big(\sup A \leqslant \sup B \text{ et } \inf A \geqslant \inf B\big).$$

Études de suites réelles : définition de la convergence

Exercice 9.3 : Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée.

1. Montrer que l'on peut poser pour tout n dans $\mathbb{N}$, $v_n = \sup\{u_k \,;\, k \geqslant n\}$ et $w_n = \inf\{u_k \,;\, k \geqslant n\}$.

2. Montrer que les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes.

3. Montrer que la suite u est convergente si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

Exercice 9.4* : Montrer qu'une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$ est convergente si et seulement si elle est constante à partir d'un certain rang.

Exercice 9.5 : Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels telle que les trois sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{13n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Montrer que la suite u converge.

Études de suites réelles : application des théorèmes

Exercice 9.6 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} 0 \leqslant u_n \leqslant 2 \\ 0 \leqslant v_n \leqslant 3 \end{cases}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \cdot v_n = 6$.
Que peut-on dire des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 9.7 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite croissante telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $u_{2n} - u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$. Montrer que la suite est convergente.

Exercice 9.8 : On définit pour tout n dans $\mathbb{N}^\star$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n \cdot n!}$.

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ sont adjacentes. Ces deux suites convergent vers $e \approx 2,71828\cdots$

2. On suppose que e est rationnel. On pose $e = \dfrac{p}{q}$, avec p et q deux entiers supérieurs à 1.

- **a.** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n < e < v_n$.
- **b.** Montrer que le nombre $q! \cdot (e - u_q)$ est un entier.
- **c.** En déduire que le nombre e est irrationnel.

Exercice 9.9 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite définie par : $\begin{cases} 0 < u_0, u_1 < 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \dfrac{\sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}}{2} \end{cases}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0, 1[$.
2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \min\{u_n, u_{n+1}\}$.
   a. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   b. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} \geqslant \sqrt{v_n}$.
   c. Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Exercice 9.10 : On définit les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $b_0 > a_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n \cdot b_n}$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$. Montrer que ces deux suites sont bien définies et qu'elles convergent vers le même nombre ℓ.

Exercice 9.11* : On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \cdots + \sqrt{n}}}}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $u_{n+1}^2 \leqslant 1 + u_n \cdot \sqrt{2}$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est convergente.

Exercice 9.12* : Étudier la suite complexe z donnée par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{2}$.

■ Calculs de limites

Exercice 9.13 :

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\sin x - x| \leqslant \dfrac{x^2}{2}$.
2. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \sin\left(\dfrac{k}{n^2}\right)$.

Exercice 9.14 :

1. Montrer que pour tout $x \neq 0$, $\operatorname{ch} x = \dfrac{\operatorname{sh}(2x)}{2\operatorname{sh} x}$.
2. Soit x dans $\mathbb{R}$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \operatorname{ch}\left(\dfrac{x}{2^k}\right)$.

■ Suites de référence

Exercice 9.15 : Déterminer dans les deux cas une expression de u_n :

1. $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \lambda \cdot u_n + 3$, où λ est une constante réelle.
2. $u_1 = -1$ et $u_2 = 1$, puis $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$.

Exercice 9.16 :

1. On définit $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1 + u_n}{2 + u_n}$. Déterminer les points fixes $\ell_1 < \ell_2$ de la fonction associée. Montrer que la suite $\left(v_n = \dfrac{u_n - \ell_1}{u_n - \ell_2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de référence. Calculer $\xi = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

2. On définit $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{-1+u_n}{3+u_n}$. Déterminer le seul point fixe ℓ de la fonction associée. Montrer que la suite $\left(w_n = \dfrac{1}{u_n - \ell}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de référence. Calculer $\xi = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 9.17 : Étudier la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n(1-u_n)$.

■ Suites implicites

Exercice 9.18 :
1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x + \cdots + x^n = 1$ admet une seule solution dans l'intervalle $[0, +\infty[$, solution que l'on note x_n.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone puis convergente et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

Exercice 9.19 :
1. Montrer que pour tout $n \geq 2$, l'équation $e^x = x + n$ admet deux solutions réelles que l'on note $x_n < y_n$.
2. Montrer que les suites $(x_n)_{n\geq 2}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont monotones, puis calculer leur limite.

■■ Indications

Ex. 9.4

On pourra utiliser la définition de la convergence avec $\varepsilon = 1/3$.

Ex. 9.7

On pourra considérer la sous-suite $(u_{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$.

Ex. 9.11

On fera intervenir le polynôme $P(X) = X^2 - \sqrt{2}\cdot X - 1$ pour calculer le signe de $P(u_n)$.

Ex. 9.12

On pourra faire une interprétation géométrique des points d'affixe z_n. On étudiera la suite des arguments principaux de z_n et la suite des parties imaginaires.

Corrigé des vrai/faux

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F	V	F	V	F	F	F	F	V	F

1. La partie $A = \{4\}$ vérifie : $\sup A = 4$ mais $\forall \varepsilon > 0$, $4 - \varepsilon \notin A$.
2. Il suffit de revenir à la définition de la convergence, en prenant par exemple $\varepsilon = 0,0001$.
3. La suite $\left(u_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{(-1)^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est un contre-exemple.
4. On peut construire une sous-suite par récurrence. La suite u n'est pas majorée par 0. Il existe un entier $\varphi(0)$ tel que : $u_{\varphi(0)} > 0$. On suppose les entiers $\varphi(0) < \varphi(1) < \cdots < \varphi(n)$ construits de telle sorte que : $\forall k \in \{0, \cdots, n\}$, $u_{\varphi(k)} > k$ et $u_{\varphi(0)} < u_{\varphi(1)} < \cdots < u_{\varphi(n)}$.
Le nombre $M = \max\{u_0, u_1, \cdots, u_{\varphi(n)}, n+1\}$ ne majore pas la suite. Il existe un entier p tel que : $u_p > M$. Il est impossible que l'entier p soit inférieur ou égal à $\varphi(n)$ car sinon $u_p \leqslant M$. On pose $p = \varphi(n+1)$ et $\varphi(n) < \varphi(n+1)$ puis le nombre $u_{\varphi(n+1)}$ est à la fois strictement supérieur à $u_{\varphi(n)}$ et à $(n+1)$. La sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ répond à la question.
5. La suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ en est un contre-exemple. Le résultat devient vrai si l'on ajoute que les deux sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.
6. On a un contre-exemple avec $u_n = n$ et $v_n = n+1$.
7. Le sens $\Rightarrow$ est toujours vrai. Pour l'autre implication, la suite harmonique $\left(u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est un contre-exemple, comme on peut s'en convaincre en comparant u_n avec des intégrales.
8. La suite $\left(u_n = n \times (1 + (-1)^n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ vaut alternativement $2n$ et 0. Elle n'est pas bornée donc est divergente. Cependant, pour qu'une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de u ait une chance de converger, il faut absolument que les indices $\varphi(n)$ soient tous impairs à partir d'un certain rang (sinon, on pourrait extraire de $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une sous suite tendant vers $+\infty$) et donc que la sous-suite soit constante égale à 0 à partir d'un certain rang, donc convergente vers 0.

❑ **Erreurs classiques**

- Ne pas croire que les éléments justes plus petits que $\tau = \sup A$ appartiennent à l'ensemble A.
- Ne pas s'orienter dans une monotonie lorsque rien ne le laisse présager. On évitera les erreurs du type : « comme $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $0 < u_n < \dfrac{1}{n}$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est décroissante ».
- Ne pas oublier que le théorème des suites monotones ne permet pas de calculer explicitement la valeur d'une limite.

Corrigé des exercices

Exercice 9.1

1. Soit x dans $\mathbb{R}$. On pose $p = \lfloor x \rfloor$. On distingue deux cas.

• Si $p \leqslant x < p + \frac{1}{2}$, alors $p \leqslant p + \frac{1}{2} \leqslant x + \frac{1}{2} < p + 1$ et $\left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = p$, puis $2p \leqslant 2x < 2p + 1$, donc $\lfloor 2x \rfloor = 2p$ et $\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor = 0$.

• Si $p + \frac{1}{2} \leqslant x < p + 1$, alors $p + 1 \leqslant x + \frac{1}{2} < p + 2$ et $\left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = p + 1$, puis $2p + 1 \leqslant 2x < 2p + 2$, donc $\lfloor 2x \rfloor = 2p + 1$ et $\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor = 1$.

Dans tous les cas, $\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \in \{0, 1\}$.

2. De plus $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor$, ce qui résout dans la foulée la deuxième question. ▲

Exercice 9.2

Comme A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$, on sait, d'après les **propriétés de la borne supérieure et inférieure** que A et B possèdent une borne inférieure et supérieure.

• Montrons que $\sup(A) \leqslant \sup(B)$.
Soit $a \in A$. Comme $A \subset B$, on a $a \in B$. Or $\sup(B)$ majore B donc en particulier $a \leqslant \sup(B)$. Ainsi,

$$\forall a \in A,\ a \leqslant \sup(B)$$

Autrement dit, $\sup B$ est un majorant de A. Comme $\sup A$ est par définition le plus petit majorant de A, il s'ensuit que $\sup(A) \leqslant \sup(B)$.

• Montrons que $\inf(A) \geqslant \inf(B)$.
Soit $a \in A$. Comme $A \subset B$, on a $a \in B$. Or $\inf(B)$ minore B donc en particulier $a \geqslant \inf(B)$. Ainsi,

$$\forall a \in A,\ a \geqslant \inf(B)$$

Autrement dit, $\sup B$ est un minorant de A. Comme $\inf A$ est par définition le plus grand minorant de A, il s'ensuit que $\inf(A) \geqslant \inf(B)$. ▲

Exercice 9.3

1. Soit n dans $\mathbb{N}$. Comme la suite u est bornée (par M), l'ensemble $\{u_k\ ;\ k \geqslant n\}$ est à la fois majoré et minoré et non vide, ce qui permet de définir sa borne inférieure w_n et sa borne supérieure v_n.

2. Soit n dans $\mathbb{N}$. Comme $\{u_k\ ;\ k \geqslant n+1\} \subset \{u_k\ ;\ k \geqslant n\}$ et que w_n minore $\{u_k\ ;\ k \geqslant n\}$, alors le nombre w_n minore également $\{u_k\ ;\ k \geqslant n+1\}$, donc est un moins bon minorant que $\inf\{u_k\ ;\ k \geqslant n+1\} = w_{n+1}$. Ainsi : $w_n \leqslant w_{n+1}$ et la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

De la même façon, le nombre v_n est un moins bon majorant de l'ensemble $\{u_k\ ;\ k \geqslant n+1\}$ que $\sup\{u_k\ ;\ k \geqslant n+1\} = v_{n+1}$, d'où $v_{n+1} \leqslant v_n$ et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Par ailleurs, comme la suite u est bornée par M, alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\{u_k \ ; \ k \geqslant n\} \subset [-M, M]$, puis $-M \leqslant w_n \leqslant v_n \leqslant M$. Les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones et bornées : elles convergent !

3. On suppose que la suite u est convergente de limite ℓ. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang n_0 à partir duquel on a : $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$ ou encore : $u_n \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$. On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant n_0 \Rightarrow \{u_k \ ; \ k \geqslant n\} \subset [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon] \Rightarrow \ell - \varepsilon \leqslant w_n \leqslant v_n \leqslant \ell + \varepsilon.$$

Les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers ℓ.
Réciproquement, on suppose que les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers ℓ. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on a : $u_n \in \{u_k \ ; \ k \geqslant n\}$. Comme v_n et w_n majorent et minorent respectivement la partie $\{u_k \ ; \ k \geqslant n\}$, alors : $w_n \leqslant u_n \leqslant v_n$. Le théorème des gendarmes conclut la question. ▲

Exercice 9.4

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments dans $\mathbb{Z}$ convergente de limite ℓ Par définition de la convergence appliquée à $\varepsilon = \dfrac{1}{3}$, il existe un rang n_0 à partir duquel tous les termes u_n appartiennent à $\left[\ell - \dfrac{1}{3}, \ell + \dfrac{1}{3}\right]$. Or, deux entiers différents sont distants d'au moins 1, ce qui montre que l'ensemble $\left[\ell - \dfrac{1}{3}, \ell + \dfrac{1}{3}\right] \cap \mathbb{Z}$ contient au maximum un élément et en fait au moins un (par exemple u_{n_0}) et donc est un singleton $\{\alpha\}$. En définitive, pour $n \geqslant n_0$, $u_n \in \left[\ell - \dfrac{1}{3}, \ell + \dfrac{1}{3}\right] \cap \mathbb{Z} = \{\alpha\}$ et $u_n = \alpha$. La suite est constante égale à α à partir du rang n_0.

Rien pour l'instant ne permet de dire que la limite est un entier !

En fait, $\alpha = \ell \in \mathbb{Z}$.

Réciproquement, si la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à α à partir d'un certain rang n_0, alors : $\forall \varepsilon > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - \alpha| = 0 \leqslant \varepsilon$. Ceci signifie exactement que la suite u est convergente de limite α. ▲

Exercice 9.5

Posons ℓ_1, ℓ_2 et ℓ_3 les limites respectives des sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{13n})_{n\in\mathbb{N}}$.
Il suffit de montrer que : $\ell_1 = \ell_2$.
La suite $(u_{26n})_{n\in\mathbb{N}}$ est à la fois une sous-suite de $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et de $(u_{13n})_{n\in\mathbb{N}}$: elle converge donc à la fois vers ℓ_1 et ℓ_3. Par unicité de la limite :

$$\ell_1 = \ell_3.$$

De même, la suite $(u_{26n+13})_{n\in\mathbb{N}}$ est à la fois une sous-suite de $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et de $(u_{13n})_{n\in\mathbb{N}}$: elle converge à la fois vers ℓ_2 et ℓ_3 et l'unicité de la limite implique :

$$\ell_2 = \ell_3.$$

Résultat des courses : $\ell_1 = \ell_2 \ (= \ell_3)$. ▲

Exercice 9.6

La réponse est que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers 2 et 3. En effet : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_n \cdot v_n}{3} \leqslant u_n \leqslant 2$ et $\dfrac{u_n \cdot v_n}{2} \leqslant v_n \leqslant 3$. Le théorème des gendarmes appliqué deux fois permet de conclure. ▲

Exercice 9.7

Il suffit de montrer que la suite u est majorée.
Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = u_{2^n}$. Par croissance de la suite u, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est encore croissante.
L'hypothèse de l'énoncé fournit : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} - v_n = u_{2\times 2^n} - u_{2^n} \leqslant \dfrac{1}{2^n}$, donc :

$$v_n - v_0 = \sum_{k=0}^{n-1}(v_{k+1} - v_k) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k} = \frac{1-1/2^n}{1-1/2} \leqslant 2.$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par $2 + v_0$. Si la suite u n'était pas majorée, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, ce qui n'est manifestement pas le cas : la suite u est donc majorée, puis convergente. ▲

Exercice 9.8

1. Soit n dans $\mathbb{N}^\star$. Alors, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)!} > 0$: la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est strictement croissante. De plus,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+1)!} - \frac{1}{n\cdot n!} \\ &= -\frac{1}{n(n+1)\cdot(n+1)!} < 0 \end{aligned}$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est strictement décroissante et il est évident que la différence $(v_n - u_n)$ tend vers 0 : les deux suites sont adjacentes.

2.

On a seulement $u_n \leqslant e \leqslant v_n$ a priori...

a. Soit n dans $\mathbb{N}$. On en déduit par stricte monotonie des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$: $u_n < u_{n+1} \leqslant e \leqslant v_{n+1} < v_n$.

b. On a : $q!\cdot e = q!\cdot\dfrac{p}{q} = (q-1)!\cdot p$ et le nombre $q!\cdot e$ est un entier. En outre, $q!\cdot u_q = q!\cdot\displaystyle\sum_{k=0}^{q}\frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{q}\frac{q!}{k!} = \sum_{k=0}^{q} q(q-1)\times\cdots\times(k+1)$, qui est une somme d'entiers. Le nombre $q!\cdot(e-u_q)$ est la différence de deux entiers donc appartient à $\mathbb{Z}$.

c. D'après ce qui précède : $0 < q!\cdot(e-u_q) < q!\cdot(v_q - u_q) = \dfrac{1}{q} \leqslant 1$. L'entier $q!\cdot(e-u_q)$ est strictement compris entre 0 et 1, donc appartient à l'intersection $]0,1[\cap\mathbb{Z}$, qui n'est autre que... l'ensemble vide ! On aboutit à une contradiction et la limite e est en fait un nombre irrationnel. ▲

Exercice 9.9

Effectuer une récurrence portant seulement sur le terme u_n ne mène à rien !

1. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n) =$ « $u_n \in]0,1[$ et $u_{n+1} \in]0,1[$ ». Par hypothèse, la propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Supposons la propriété $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain rang n. Alors, il suffit de montrer que $u_{n+2} \in]0,1[$ ce qui est plus ou moins évident car $0 < \sqrt{u_n} < 1$ et $0 < \sqrt{u_{n+1}} < 1$ par hypothèse de récurrence.
2. Soit n dans $\mathbb{N}$. On utilisera dans la suite l'inégalité : $\forall x \in]0,1[,\ \sqrt{x} \geqslant x$.
On distingue maintenant deux cas.

• Si $u_n \leqslant u_{n+1}$, alors $v_n = u_n$ et comme $u_{n+2} \geqslant \dfrac{u_{n+1}+u_n}{2} \geqslant u_n$, les deux nombres u_{n+1} et u_{n+2} sont supérieurs à $u_n = v_n$, on aboutit à $v_{n+1} = \min\{u_{n+1}, u_{n+2}\} \geqslant v_n$.
• Si $u_n > u_{n+1}$, alors de nouveau : $v_{n+1} \geqslant v_n$.
Dans tous les cas : $v_{n+1} \geqslant v_n$.

a. On sait d'emblée que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et majorée par 1 converge vers $\ell \leqslant 1$. D'autre part, si n est dans $\mathbb{N}$, en supposant par exemple $u_n \leqslant u_{n+1}$, on obtient $\sqrt{v_n} = \sqrt{u_n} \leqslant u_{n+2}$ et $u_{n+3} = \dfrac{\sqrt{u_{n+2}}+\sqrt{u_{n+1}}}{2} \geqslant \sqrt{u_n}$ et on a ce qu'il faut.

b. Le passage à la limite dans l'inégalité précédente (la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue) fournit : $\ell \geqslant \sqrt{\ell}$, donc $\ell \geqslant 1$, puis $\ell = 1$.

c. En définitive, comme $u_n \leqslant v_n \leqslant 1$, le **théorème de convergence par encadrement** permet de conclure. ▲ Théorème 9.6

Exercice 9.10

On commence par montrer par récurrence sur n : $\mathcal{P}(n) =$ "$b_n > a_n > 0$" est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

• **Initialilsation :** Lorsque $n = 0$, l'affaire est entendue.

• **Hérédité :** Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain rang $n \geqslant 0$. Alors,

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{(\sqrt{b_n}-\sqrt{a_n})^2}{2} > 0.$$

• **Conclusion :** par récurrence sur n, on a bien établi que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n.

Une autre récurrence facile montre que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n$. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par b_0 alors que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par a_0. Ces deux suites convergent respectivement vers ℓ_a et ℓ_b. Le passage à la limite dans la formule $b_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$ conduit à : $\ell_a = \ell_b$. En fait, il s'agit de deux suites adjacentes ! ▲

Exercice 9.11

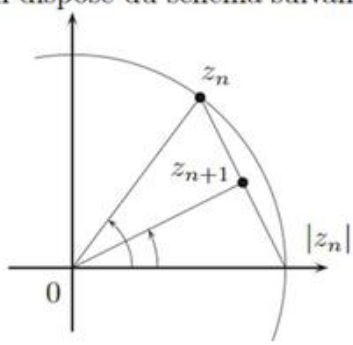
1. Soit n dans $\mathbb{N}^\star$. Alors, $u_{n+1}^2 = 1+\sqrt{2+\sqrt{3+\cdots+\sqrt{n+\sqrt{n+1}}}}$, avec n racines carrées. D'autre part, $1+u_n\cdot\sqrt{2} = 1+\sqrt{a_1+\sqrt{a_2+\sqrt{a_3+\cdots+\sqrt{a_n}}}}$, avec $\forall k \in \{1,\cdots,n\}$, $a_k = k\cdot 2^{2^{k-1}}$, car à chaque fois que l'on fait rentrer $\sqrt{2}$ sous une racine carrée, il devient égal à 2^1, puis 2^2, puis 2^4, jusqu'à $2^{2^{k-1}}$ après avoir traversé k racines carrées. On en déduit que les nombres u_{n+1}^2 et $1+u_n\cdot\sqrt{2}$ sont de la même forme, avec à chaque fois $a_k \geqslant k+1$: l'inégalité tombe alors sous le sens.

2. Comme $n \leqslant n+\sqrt{n+1}$ et par croissance des fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$, alors $\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\cdots+\sqrt{n}}}} \leqslant \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\cdots+\sqrt{(n+\sqrt{n+1})}}}}$, ce qui signifie que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est croissante et bien entendu à valeurs positives. Le polynôme $P(X) = X^2-\sqrt{2}\cdot X-1$ vérifie donc $P(u_n) \leqslant 0$ car $u_n^2 \leqslant u_{n+1}^2 \leqslant 1+u_n\cdot\sqrt{2}$: le nombre u_n est compris entre les deux racines

du polynôme $P(X)$ qui sont $\dfrac{\sqrt{2}\pm\sqrt{6}}{2}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée par $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$ donc convergente. ▲

Exercice 9.12

Si $z_0 = 0$, la suite z est constante égale à 0. Si z_0 est un réel strictement négatif, alors $z_1 = 0$ et la suite reste nulle.
Dans toute la suite, on suppose $z_0 \neq 0$ et que z_0 n'est pas un réel strictement négatif. Pour tout entier n, on dispose du schéma suivant :



Il devient clair que le triangle $0, z_n, |z_n|$ est isocèle en 0 et le segment $[0, z_{n+1}]$ est à la fois médiane, hauteur et bissectrice. Par conséquent :

$$|z_{n+1}| \leqslant |z_n| \quad \text{et} \quad \arg(z_{n+1}) = \frac{\arg(z_n)}{2}.$$

La suite $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0 donc convergente de limite $\ell \geqslant 0$.
En posant $\arg(z_n) \in [-\pi, \pi[$ l'argument principal de z_n, la suite $(\arg(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$: $\arg(z_n) = \dfrac{\arg(z_0)}{2^n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \arg(z_n) = 0$. Les suites $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\arg(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes : la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers le nombre complexe ℓ.
On remarque d'autre part que la suite $(\mathfrak{Im}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est également géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$, d'où pour tout entier n :

$$\begin{aligned} |z_n| &= \mathfrak{Im}(z_n) \times (\sin\arg(z_n))^{-1} = \frac{\mathfrak{Im}(z_0)}{2^n} \times \left(\sin\frac{\arg(z_0)}{2^n}\right)^{-1} \\ &\sim \frac{\mathfrak{Im}(z_0)}{2^n} \times \left(\frac{\arg(z_0)}{2^n}\right)^{-1} \sim \frac{\mathfrak{Im}(z_0)}{\arg(z_0)}, \end{aligned}$$

car si $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$, alors $\dfrac{\sin\alpha_n}{\alpha_n} = 1$.
Résultat des courses : $\ell = \dfrac{\mathfrak{Im}(z_0)}{\arg(z_0)} = |z_0| \cdot \dfrac{\sin\arg(z_0)}{\arg(z_0)}$. ▲

Exercice 9.13

1. Définissons les fonctions $f : x \mapsto \sin x - x - \dfrac{x^2}{2}$ et $g : x \mapsto \sin x - x + \dfrac{x^2}{2}$.
Ces deux fonctions sont deux fois dérivables de dérivées seconde : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$f''(x) = -\sin x - 1 \leqslant 0$ et $g''(x) = -\sin x + 1 \geqslant 0$. Les fonctions f' et g' sont respectivement décroissantes et croissantes. Or, $f'(0) = 0 = g'(0)$ et $f(0) = g(0) = 0$, d'où les tableaux de variation :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

et

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

On conclut que : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \leqslant 0 \leqslant f(x)$, c'est-à-dire : $-\dfrac{x^2}{2} \leqslant \sin x - x \leqslant \dfrac{x^2}{2}$ et $|\sin x - x| \leqslant \dfrac{x^2}{2}$.

2. Soit n dans $\mathbb{N}^\star$. D'après la première question :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2n^4} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2n^4},$$

et donc : $\dfrac{n+1}{2n} - \dfrac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \leqslant \frac{n+1}{2n} + \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3}$.

Une levée de forme indéterminée montre que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} = 0.$$

Le **théorème des gendarmes** s'applique et la limite vaut $\dfrac{1}{2}$. ▲ Théorème 9.10

Exercice 9.14

1. Soit $x \neq 0$ dans $\mathbb{R}$. Alors,

$$2\operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} x = \frac{(e^x + e^{-x}) \cdot (e^x - e^{-x})}{2} = \frac{(e^x)^2 - (e^{-x})^2}{2} = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \operatorname{sh}(2x),$$

d'où la formule escomptée puisque $\operatorname{sh} x \neq 0$.

2. On commence par distinguer deux cas.

▸ **Premier cas** : $x = 0$. Dans ce cas, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\operatorname{ch}\left(\dfrac{x}{2^k}\right) = 1$, et le produit $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \operatorname{ch}\left(\frac{x}{2^k}\right)$ vaut constamment 1.

▸ **Second cas** : $x \neq 0$. Par la première question appliquée à $\dfrac{x}{2^k} \neq 0$, on obtient :

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n} \operatorname{ch}\left(\frac{x}{2^k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)}{2\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^k}\right)} &= \frac{1}{2^n} \times \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right)} \\ &= \frac{\operatorname{sh} x}{x} \times \frac{u_n}{\operatorname{sh} u_n}, \quad \text{avec} \quad u_n = \frac{x}{2^n}\end{aligned}$$

La fonction sh est dérivable en 0, d'où : $\displaystyle\lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{sh} u}{u} = \operatorname{sh}'(0) = 1$, ce qui conduit à $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\operatorname{sh} u_n} = 1$. La réponse est : $\dfrac{\operatorname{sh} x}{x}$. ▲

Exercice 9.15

1. On distingue deux cas.

▸ **Premier cas** : $\lambda = 1$. La suite est arithmétique de raison 3 et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 + 3n$.

Méthode 9.5

▸ **Second cas** : $\lambda \neq 1$. La suite est arithmético-géométrique. L'équation $\xi = \lambda \cdot \xi + 3$ a pour solution $\xi_0 = \dfrac{3}{1-\lambda}$. La suite $(v_n = u_n - \xi_0)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison λ, d'où : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{2\lambda+1}{\lambda-1} \times \lambda^n + \dfrac{3}{1-\lambda}$.

Méthode 9.6

2. Le polynôme caractéristique vaut : $P(X) = X^2 - 6X + 9 = (X-3)^2$ de racine double -3. Il existe deux constantes α et β telles que pour n dans $\mathbb{N}^\star$, $u_n = (\alpha \cdot n + \beta) \cdot 3^n$. La donnée de u_1 et u_2 conduit au système : $\begin{cases} 3\alpha + 3\beta = -1 \\ 18\alpha + 9\beta = 1 \end{cases}$, de seule solution $\begin{cases} \alpha = \dfrac{4}{9} \\ \beta = -\dfrac{7}{9} \end{cases}$. En conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^\star, u_n = (4n-7) \cdot 3^{n-2}$. ▲

Exercice 9.16

On suit la démarche indiquée à la **méthode 9.7**.

1. La fonction associée est $f : x \mapsto \dfrac{1+x}{2+x}$, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Soit x dans $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$. On en déduit : $f(x) = x \iff 1 + x = x(2+x) \iff x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.
Une récurrence facile montre que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$. On peut définir la suite : $\left(v_n = \dfrac{u_n - \ell_1}{u_n - \ell_2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, avec $\ell_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0 < \ell_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. On en déduit :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - \ell_1}{u_{n+1} - \ell_2} = \frac{f(u_n) - f(\ell_1)}{f(u_n) - f(\ell_2)} = \frac{\frac{u_n - \ell_1}{(2+u_n)(2+\ell_1)}}{\frac{u_n - \ell_2}{(2+u_n)(2+\ell_2)}} = \frac{2+\ell_2}{2+\ell_1} \times v_n.$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison : $\dfrac{2+\ell_2}{2+\ell_1} = \dfrac{7-3\sqrt{5}}{2} = q \simeq 0,146$.

Ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, puis : $u_n = \dfrac{\ell_2 \cdot v_n - \ell_1}{v_n - 1}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

2. La fonction associée est $g : x \mapsto \dfrac{-1+x}{3+x}$. Soit x dans $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$. Alors : $g(x) = x \iff -1 + x = (3+x)x \iff x = -1$. Le seul point fixe de g est -1.

N'oubliez pas de vérifier la bonne définition de la suite !

Si pour un terme $u_n = -3$, alors $\dfrac{-1+u_{n-1}}{3+u_{n-1}} = -3$, puis $-1 = -9$, ce qui est impossible. Par conséquent, tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont différents de (-3), ce qui assure la bonne définition de cette suite.

Maintenant, si pour un terme $u_n = -1$, alors $\dfrac{-1+u_{n-1}}{3+u_{n-1}} = -1$, alors $u_{n-1} = -1$ et par une récurrence immédiate, tous les termes avant u_n valent -1. En particulier $0 = u_0 = -1$, ce qui paraît difficile à imaginer. Résultat des courses : tous les termes u_n sont différents de (-1), ce qui autorise à définir

la suite $\left(w_n = \dfrac{1}{u_n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. On en déduit :

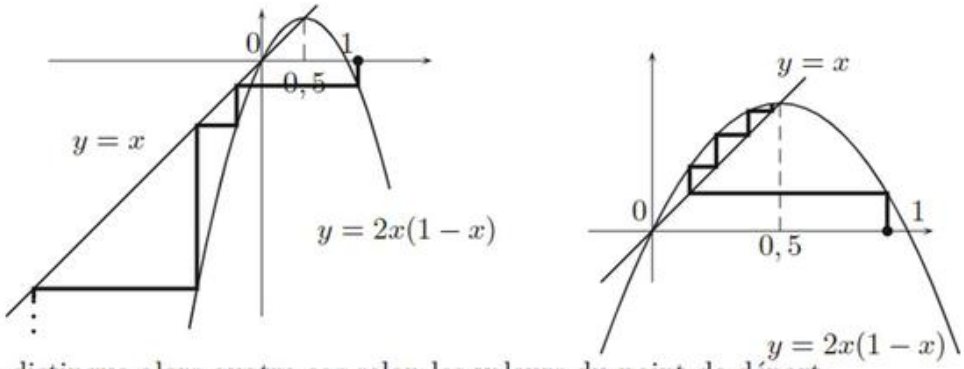
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}+1} = \frac{3+u_n}{2(u_n+1)} = \frac{1}{u_n+1} + \frac{1}{2} = w_n + \frac{1}{2}.$$

La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $1/2$.
On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$. ▲

Exercice 9.17

Cette suite récurrente est associée à la fonction itératrice $f : x \mapsto 2x(1-x)$ de seuls points fixes 0 et $\dfrac{1}{2}$. On dispose par exemple des schémas suivants :

On met en œuvre la **méthode 9.7**.



On distingue alors quatre cas selon les valeurs du point de départ.

- Si $u_0 \in \{0, 1/2\}$, la suite est constante.
- Si $u_0 \in]0,1[$, comme $f(]0,1[) \subset]0,1/2[$ puis : $\forall x \in]0,1/2[$, $f(x) > x$, alors tous les termes u_n pour $n \geqslant 1$ sont dans $]0,1/2[$ et la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement croissante et majorée donc convergente vers le seul point fixe possible : $1/2$.
- Si $u_0 = 1$, alors $u_1 = 0$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est nulle.
- Si $u_0 \notin [0,1]$, alors $u_1 < 0$. L'intervalle $]-\infty, 0[$ est stable par f et pour x dans $]-\infty, 0[$, $f(x) < x$: la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc strictement décroissante et ne peut converger (car il n'y a aucun point fixe de f dans $]-\infty, 0[$). La suite est donc décroissante et tend vers $-\infty$. ▲

Exercice 9.18

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose la fonction $f_n : x \mapsto -1 + x + \cdots + x^n$ définie sur $[0, +\infty[$. La fonction f_n est dérivable de dérivée :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \ f_n'(x) = 1 + \cdots + n \cdot x^{n-1} > 0.$$

La fonction f_n établit une bijection strictement croissante de l'intervalle $[0, +\infty[$ vers l'intervalle $[f_n(0) = -1, +\infty[$. L'équation $f_n(x) = 0$ admet donc une seule solution. On peut rajouter que cette solution est strictement positive car non nulle.

Théorème de la bijection bicontinue

2. Fixons un entier $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $x_{n+1} > 0$, on en déduit successivement :

$$f_{n+1}(x_{n+1}) - f_n(x_{n+1}) = x_{n+1}^{n+1} > 0$$
$$f_n(x_n) - f_n(x_{n+1}) = 0 - f_n(x_{n+1}) > 0$$

et par stricte croissance de la fonction f_n, on en déduit : $x_{n+1} < x_n$ puis que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est strictement décroissante.
De plus, cette suite est minorée par 0, donc converge vers une limite $\ell \geqslant 0$. Par ailleurs, par stricte décroissance de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ on en déduit que la limite ℓ est strictement inférieure à chacun des termes de la suite, en particulier : $\ell < x_1 = 1$.
Pour tout $x \in [0,1[$, on peut écrire par les **sommes géométriques** :

$$x + \cdots + x^n = 1 \iff x \cdot \frac{1-x^n}{1-x} = 1.$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $1 = \dfrac{x_n}{1-x_n} \cdot (1 - x_n^n)$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a l'encadrement : $0 \leqslant x_n \leqslant \ell < 1$, donc $0 \leqslant x_n^n \leqslant \ell^n$. Comme $\ell \in [0,1[$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \ell^n = 0$ et le **théorème des gendarmes** permet d'avoir :

$$\lim_{n\to+\infty} x_n^n = 0.$$

En passant à la limite dans l'égalité $1 = \dfrac{x_n}{1-x_n} \cdot (1 - x_n^n)$, on obtient $1 = \dfrac{\ell}{1-\ell}$ et donc $\ell = \dfrac{1}{2}$. ▲

Exercice 9.19

1. La fonction $f : x \mapsto e^x - x$ définie sur $\mathbb{R}$ est dérivable et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = e^x - 1.$$

On en déduit que la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ puis strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
De plus, on obtient immédiatement :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

De plus, $f(0) = 1$. La fonction f induit donc une bijection $g :]-\infty, 0[\to]1, +\infty[$ qui est strictement décroissante, puis une bijection $h :]0, +\infty[\to]1, +\infty[$ qui est strictement croissante.
On conclut que l'équation $f(x) = n$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ admet exactement deux solutions :

$$x_n = g^{-1}(n) < 0 \text{ et } y_n = h^{-1}(n) > 0.$$

2. La fonction g étant strictement décroissante, il en est de même de la fonction g^{-1} et on obtient ainsi que la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ est strictement décroissante. De la même façon, la suite $(y_n)_{n\geq 2}$ est strictement croissante.
Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim_{x\to+\infty} g^{-1}(x) = -\infty$. On en déduit que la suite $(x_n = g^{-1}(n))_{n\geq 2}$ tend vers $-\infty$.
De même, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} h^{-1}(x) = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = +\infty$. ▲

Chapitre 10

Limite et continuité des fonctions

UN MATHÉMATICIEN

Moine philosophe, **Bernhard Bolzano** consacre ses temps libres aux mathématiques. Bien que coupé du monde scientifique, il est un précurseur en mathématique. Il cherche des fondements rigoureux dans les trois domaines qu'il aborde, les fonctions, la logique et la notion de cardinal. C'est ainsi qu'il donne une démonstration du théorème des valeurs intermédiaires sans utiliser « l'évidence géométrique ».

Un peu d'histoire

L'importance de la notion de continuité se fait sentir à la fin du XVIIe siècle lorsque l'on a cherché à définir les limites de rapports infinitésimaux pour définir la notion de dérivée. Dans la foulée une notion très imprécise de fonction se fait jour.

La continuité est utilisée de manière très intuitive et nul ne croit utile de justifier qu'une fonction qui change de signe sur un intervalle s'annule en un point ; ce que nous appelons de nos jours le théorème de la valeur intermédiaire. La démonstration élaborée par Bolzano pêchait à cause d'une approche trop intuitive de la notion de nombre réel.

Augustin-Louis Cauchy fournit une définition précise de la continuité au tout début des années 1820 mais notre définition actuelle n'apparaît que grâce au mathématicien allemand Karl Weierstrass à qui l'on doit une construction des nombres réels.

Objectifs

les incontournables

- Faire l'étude locale d'une fonction f au voisinage d'un point a, réel ou pas :
  - étudier la limite $\lim\limits_{x \to a} f(x)$;
  - étudier la continuité de f en a ;
  - étudier l'existence d'un prolongement continu en a.
- Appliquer les théorèmes fondamentaux sur les fonctions continues pour l'étude des propriétés globales des fonctions, et notamment :
  - établir l'existence d'une solution de l'équation $f(x) = 0$;
  - justifier la bijectivité d'une fonction strictement monotone et continue.

Résumé de cours

Limites de fonctions

Notation : *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et a un réel. On note :*

- $a \in \mathring{I}$, *si a est un point de I, mais pas une extrémité de I ;*
- $a \in \overline{I}$, *si a est un point de I ou une extrémité de I ;*
- $a \in \overline{I} \cup \{\pm\infty\}$ *si a est un point de I ou une extrémité, éventuellement infinie de I.*

Définition : *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I.*

- *Soit $a \in \overline{I}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f* ***a pour limite ℓ au point*** *a et on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ si*
$$(\forall \varepsilon > 0),\ (\exists \eta > 0),\ (\forall x \in I),\quad (|x - a| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon)$$
- *Soit $a \in I$. On dit que f* ***est continue en*** *a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.*

Définitions à connaître : *Vous devez connaître les définitions quantifiées de limite finie en une extrémité infinie de I, de limite infinie en $a \in \overline{I}$ et de limite infinie en une extrémité infinie de I.*

Définition : *Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \mathring{I}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que :*

- *f admet ℓ* ***limite à gauche (resp. à droite)*** *au point a, et on note $\lim\limits_{a^-} f = \ell$ (resp. $\lim\limits_{a^+} f = \ell$), si la restriction de f à $I \cap]-\infty, a[$ (resp. $I \cap]a, +\infty[$) admet ℓ comme limite en a.*
- *f* ***est continue à gauche (resp. à droite)*** *en a si $\lim\limits_{a^-} f = f(a)$ (resp. $\lim\limits_{a^+} f = f(a)$).*

Proposition 10.1.— Unicité de la limite —. Si f admet une limite en a, alors celle-ci est unique.

Proposition 10.2.—

- f admet ℓ comme limite en $a \in \mathring{I}$ ssi f admet ℓ comme limite à gauche et à droite en a.
- f est continue en $a \in \mathring{I}$ ssi f est continue à gauche et à droite en a.

Remarque : si f est définie dans $I \setminus \{a\}$, avec $a \in \mathring{I}$ un point intérieur à I, on définit la notion de limite de f en a par $\lim\limits_{a} f(x) = \ell \iff \lim\limits_{a^-} f = \lim\limits_{a^+} f = \ell$.

Propriétés des fonctions possédant une limite

Théorème 10.3.— Caractérisation séquentielle —. Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I} \cup \{\pm\infty\}$, et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$\boxed{\left(\lim_{x \to a} f(x) = \ell\right) \iff (\forall u \in I^{\mathbb{N}}), \left(\lim_{n \to +\infty} u_n = a \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f(u_n) = \ell\right)}$$

Remarque : si $a \in I$, on a donc f continue en a ssi $\forall u \in I^{\mathbb{N}}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(a)$.

Proposition 10.4.— Limites et inégalités —. Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I} \cup \{\pm\infty\}$. On suppose que $\lim\limits_a f = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\lim\limits_a g = \ell' \in \overline{\mathbb{R}}$.

- **Si** $\ell < \ell'$, **alors** $f < g$ au voisinage de a.
- **Si** $f \leqslant g$ au voisinage de a, **alors** $\ell \leqslant \ell'$.

Corollaire 10.5.— Cas d'une limite finie —. En particulier, si f admet une **limite finie** en $a \in \overline{I} \cup \{\pm\infty\}$, alors f est bornée au voisinage de a.

Théorèmes d'existence de limites

Théorème 10.6.— Opérations algébriques —. Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I} \cup \{\pm\infty\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}^\star$.

On suppose que $\lim\limits_a f = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\lim\limits_a g = \ell' \in \overline{\mathbb{R}}$. Pourvu que ces opérations aient un sens, on a :

- $\lim\limits_a |f| = |\ell|$
- $\lim\limits_a (f+g) = \ell + \ell'$
- si $\ell \neq 0$, $\lim\limits_a (1/f) = 1/\ell$
- $\lim\limits_a (\lambda f) = \lambda\, \ell$
- $\lim\limits_a (f \times g) = \ell \times \ell'$
- si $\ell = 0^+$, $\lim\limits_a (1/f) = +\infty$

Théorème 10.7.— Comparaison, encadrement —. Soit $f, g, h : I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I} \cup \{\pm\infty\}$, $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$

$$\boxed{\begin{array}{lll} \textbf{Si} & \left.\begin{array}{l} \bullet\ \forall x \in I,\ |g(x)| \leqslant |f(x)| \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 \end{array}\right), & \textbf{alors}\quad \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0. \\ \textbf{Si} & \left.\begin{array}{l} \bullet\ \forall x \in I,\ f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \text{ et } \lim\limits_{x\to a} h(x) = \ell \end{array}\right), & \textbf{alors}\quad \lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell. \end{array}}$$

Remarque : si $\ell \in \{\pm\infty\}$, une seule des deux inégalités de l'encadrement suffit pour conclure.

Théorème 10.8.— Changement de variable —. Soit $h : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ telles que $h(I) \subset J$, $a \in \overline{I} \cup \{\pm\infty\}$, $b \in \overline{J} \cup \{\pm\infty\}$, $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$\boxed{\textbf{Si}\quad \left.\begin{array}{l} \bullet\ \lim\limits_{x\to a} h(x) = b \\ \bullet\ \lim\limits_{y\to b} g(y) = \ell \end{array}\right)\quad \textbf{alors}\quad \lim\limits_{x\to a} g \circ h(x) = \ell}$$

Cas des fonctions monotones

Théorème 10.9.— Limites aux bornes —. Soit $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$ tels que $a < b$.

Si $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ est croissante (resp. décroissante) **alors** :

- f possède une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ en a et $\lim\limits_a f = \inf\limits_{]a,b[} f$ (resp. $\lim\limits_a f = \sup\limits_{]a,b[} f$) ;
- f possède une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ en b et $\lim\limits_b f = \sup\limits_{]a,b[} f$ (resp. $\lim\limits_b f = \inf\limits_{]a,b[} f$).

Théorème 10.10.— Limite monotone —. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application **monotone**, $a \in \mathring{I}$. Alors f admet des limites *finies* à gauche et à droite en a. De plus, si f est croissante (resp. décroissante), alors :

$$\boxed{\lim_{a^-} f \leqslant f(a) \leqslant \lim_{a^+} f \qquad (\text{resp.} \lim_{a^+} f \leqslant f(a) \leqslant \lim_{a^-} f)}$$

■ Fonctions continues sur un intervalle

Continuité globale

Définition : *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite* ***continue sur*** *I si elle l'est en tout point de I :*

$$(\forall \varepsilon > 0), (\forall x \in I)\,,\ (\exists \eta > 0),\ (\forall y \in I),\quad (|x-y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon)$$

Notation : *$\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions continues sur I.*

Définition : *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et $a \in \overline{I} \setminus \mathring{I}$ une extrémité ouverte de I. On dit que f est* ***prolongeable par continuité*** *au point a si f admet une limite finie en a.*

Propriétés des fonctions continues sur un intervalle

Théorème 10.11.— Soit $f, g \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ deux fonctions réelles continues sur I, $\lambda \in \mathbb{R}$ un nombre réel et $h \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R})$ une fonction continue sur J. On suppose que $f(I) \subset J$.

- Si f est continue sur I, alors $|f|$ est continue sur I.
- Si f est continue sur I, alors λf est continue sur I.
- Si f est continue et ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{1}{f}$ est continue sur I.
- Si f et g sont continues sur I, alors $f + g$ est continue sur I.
- Si f et g sont continues sur I, alors $f \times g$ est continue sur I.
- La fonction composée $h \circ f$ est continue sur I.

Image d'un intervalle par une fonction continue

Théorème 10.12.— Théorème des valeurs intermédiaires —. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Pour tout couple $(a, b) \in I^2$, f atteint toute valeur γ intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$.

On utilise aussi d'autres formulations du « TVI ».

Corollaire 10.13.— Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle.

$$\boxed{\text{L'ensemble } f(I) = \{f(x)\,;\ x \in I\} \text{ des valeurs prises par } f \text{ est un intervalle.}}$$

Corollaire 10.14.— Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle, $(a, b) \in I^2$.

$$\boxed{\text{Si } f(a) \times f(b) < 0, \text{ alors il existe un réel } c \text{ compris entre } a \text{ et } b, \text{ tel que } f(c) = 0.}$$

Remarque : Si de plus f est strictement monotone, le réel c est unique.

Image d'un segment par une fonction continue

Théorème 10.15.— Théorème des bornes atteintes —. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$.
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$. Alors f est bornée et atteint ses bornes. Autrement dit,

$$\boxed{\text{L'ensemble des valeurs prises par } f,\ f([a, b]) = \{f(x)\,;\ a \leqslant x \leqslant b\}, \text{ est un segment.}}$$

Continuité et stricte monotonie

Théorème 10.16.— Corollaire du TVI pour les fonctions strictement monotones —.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, $(a, b) \in I^2$.

Pour toute valeur γ, intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un unique élément $c \in I$ tel que $f(c) = \gamma$.

Théorème 10.17.— Théorème de la bijection bicontinue —. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue et strictement monotone sur I. Alors :

- l'ensemble des images $J = f(I)$ est un intervalle et $f : I \to J$ est une bijection ;
- la réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue et strictement monotone, de même monotonie que f.

De plus, on peut déterminer J à l'aide du tableau suivant :

	$I = [a, b]$	$I =]a, b]$	$I = [a, b[$	$I =]a, b[$
f croissante	$J = [f(a), f(b)]$	$J =]\lim\limits_{a} f(x), f(b)]$	$J = [f(a), \lim\limits_{b} f[$	$J =]\lim\limits_{a} f, \lim\limits_{b} f[$
f décroissante	$J = [f(b), f(a)]$	$J = [f(b), \lim\limits_{a} f[$	$J =]\lim\limits_{b} f, f(a)]$	$J =]\lim\limits_{b} f, \lim\limits_{a} f[$

Méthodes

Étude d'une limite

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I} \cup \{\pm\infty\}$.

Existence d'une limite

Méthode 10.1.— Comment montrer que f ne possède pas de limite en a
Vous utilisez la **caractérisation séquentielle de la limite** (**théorème 10.3**). Il suffit d'exhiber :

- une suite $u = (u_n) \in I^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ et $(f(u_n))$ est divergente ; ou bien
- deux suites (u_n) et (v_n) telles que $\lim\limits_n u_n = \lim\limits_n v_n = a$ et $\lim\limits_n f(u_n) \neq \lim\limits_n f(v_n)$.

Exemple : soit (u_n) et (v_n) les suites définies par $u_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $v_n = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$. On a ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
Cependant $\bullet \sin(u_n) = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. La fonction sin n'a donc pas de limite en $+\infty$.
$\bullet \sin(v_n) = -1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$

Méthode 10.2.— Comment montrer que f admet une limite en a
Il y a quatre pistes possibles. Vous choisissez d'utiliser :

- la définition de limite, pour les exercices les plus théoriques ;
- le **théorème de la limite monotone** (**théorème 10.10**) ;
- les théorèmes de comparaison (**théorème 10.7**) ;
- les opérations *i.e.* opérations algébriques et composition (**théorèmes 10.6, 10.8**).

Étudier l'existence et calculer la valeur d'une limite par opérations

Tout d'abord, pour étudier la limite de $f(x)$ quand x tend vers a, il est souvent préférable de se ramener au voisinage de 0, par exemple pour utiliser les limites ou comparaison de référence.

Méthode 10.3.— Comment se ramener en 0
On effectue le changement de variable (et donc aussi de fonction) adéquat :

- $x = a + t$ avec $t \to 0$ si $a \in \overline{I}$ et on étudie la limite en 0 de $g(t) = f(a + t)$.
- $x = \frac{1}{t}$ avec $t \to 0^{\pm}$ si $a = \pm\infty$ et on étudie la limite en $0^{\pm}$ de $g(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$.

Existence et valeur d'une limite pour f en a se ramènent à celles pour g en 0 car

$$(\forall \ell \in \overline{\mathbb{R}}), \quad \left(\lim_{x\to a} f(x) = \ell \iff \lim_{t\to 0} g(t) = \ell\right)$$

D'autre part, s'il s'agit d'une fonction usuelle, il n'y a pas de problème puisque vous connaissez parfaitement les limites des fonctions usuelles ! Sinon, f est construite à partir de telles fonctions par composition ou opérations algébriques :

> ❑ **Méthode 10.4.— Comment étudier une limite par changement de variable**
> Si f est une *composée* de fonctions usuelles, $f(x) = g \circ h(x)$. On effectue le changement de variable $y = h(x)$:
> $$\left.\begin{array}{l} \bullet \ \lim\limits_{x\to a} h(x) = b \\ \bullet \ \lim\limits_{y\to b} g(y) = \ell \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} g \circ h(x) = \ell$$
> Ainsi, vous calculez $b = \lim\limits_{x\to a} h(x)$, puis $\ell = \lim\limits_{y\to b} g(y)$ et concluez à l'aide du **théorème 10.8** que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.

Lorsque f est construite à partir de fonctions usuelles par opérations algébriques, vous pouvez appliquer le **théorème 10.6**. La méthode est particulièrement simple : *s'il n'y a pas d'indétermination*, la limite de f est obtenue par ces mêmes opérations algébriques sur des limites. Toutefois, il est fort probable qu'apparaisse lors du calcul une forme indéterminée, c'est-à-dire une expression de la forme : $+\infty - \infty$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\dfrac{0}{0}$, $0 \times \infty$, 1^∞, 0^0. Par exemple si $\lim_a u(x) = 0$ et $\lim_a v(x) = +\infty$, le **théorème 10.6** ne permet pas de prévoir la limite du produit $u(x)v(x)$: tout dépend de la *vitesse* avec laquelle $u(x)$ et $v(x)$ tendent vers leurs limites respectives.

> ❑ **Méthode 10.5.— Comment lever une indétermination**
> Lorsque le **théorème 10.6** fait apparaître une forme indéterminée, vous pouvez :
> - simplifier l'expression de f à l'aide d'opérations algébriques, par exemple en multipliant et en divisant par la quantité conjuguée du dénominateur ;
> - reconnaître une limite de référence et conclure alors à l'aide des **croissances comparées des fonctions usuelles**.

Mise en œuvre : exercice 10.1.

Limites de référence

En cas d'indétermination, on essaie par opérations de se ramener à l'une des limites de référence suivantes.

Soit $\alpha, \beta, \gamma > 0$ des nombres réels strictement positifs. Alors

$$\bullet \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^\alpha(x)}{x^\beta} = 0^+ \qquad \bullet \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\beta}{e^{\gamma x}} = 0^+ \qquad \bullet \lim_{x\to 0^+} x^\beta |\ln(x)|^\alpha = 0^+ \qquad \bullet \lim_{x\to-\infty} x^\beta e^{\gamma x} = 0^+$$

D'autres limites de référence sont souvent obtenues comme limite des taux de variation d'une fonction usuelle. Citons par exemple

$$\bullet \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad \bullet \lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1 \quad \bullet \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \bullet \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad \bullet \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

■ Étude locale d'une fonction

Étudier la continuité en un point

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$. Étudier la continuité de f en a revient à établir que $\lim\limits_{a} f = f(a)$. Il s'agit donc d'un calcul de limite et les méthodes présentées au paragraphe précédent s'appliquent. À noter toutefois, le cas particulier d'une fonction définie par des expressions différentes à gauche et à droite de a. En ce cas, on étudie la continuité à gauche et à droite de f en a.

Existence d'un prolongement continu en a

❑ Méthode 10.6.— Comment montrer que f est prolongeable par continuité

- Soit $a \in \overline{I}$ une extrémité ouverte de I, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue, alors f est prolongeable par continuité en a si (et seulement si) $\lim\limits_{a} f = \ell \in \mathbb{R}$.
- Soit $a \in \overset{\circ}{I}$ un point intérieur de I, et $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, alors f est prolongeable par continuité en a si (et seulement si) $\lim\limits_{a^-} f = \lim\limits_{a^+} f = \ell \in \mathbb{R}$.

Mise en œuvre : exercice 10.5

Étudier les branches infinies

L'étude des branches infinies sert à préciser l'allure de la courbe représentative d'une fonction au voisinage des bornes du domaine de définition. Ces bornes peuvent être réelles ou infinies. Nous distinguons deux notions : les asymptotes et les branches paraboliques.

❑ Méthode 10.7.— Comment déterminer la nature de la branche infinie

- Au voisinage d'un point $a \in \overline{I}$ (une borne réelle de l'intervalle) :
  (a) Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$, la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale.
- Au voisinage d'une borne infinie de l'intervalle, par exemple $+\infty$:
  (a) Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, la droite d'équation $y = \ell$ est asymptote horizontale.
  (b) Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$, *il faut poursuivre l'analyse* ...
  - Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)/x = 0$, la courbe présente une branche parabolique de direction asymptotique (Ox).
  - Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)/x = \pm\infty$, la courbe présente une branche parabolique de direction asymptotique (Oy).
  - Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)/x = a \in \mathbb{R}^\star$, *il faut poursuivre l'analyse* ...
    - Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - ax = \pm\infty$, la courbe présente une branche parabolique de direction asymptotique la droite d'équation $y = ax$.
    - Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - ax = b \in \mathbb{R}$, la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe.

Mise en œuvre : exercice 10.5

■ Étude globale

Continuité d'une fonction

❑ **Méthode 10.8.— Comment montrer que $f : I \to \mathbb{R}$ est continue sur I**

L'étude s'articule généralement en deux étapes.

- À l'aide du **théorème 10.11**, vous montrez que f est continue sur un ou plusieurs sous-intervalles de I, en vérifiant que les composées, les inverses sont bien définis.
- En complément, une étude locale en un point a est parfois nécessaire, notamment lorsque f est définie par deux expressions différentes à gauche et à droite en a.

Mise en œuvre : exercice 10.5.

■ Les théorèmes fondamentaux

Étude de la bijectivité

❑ **Méthode 10.9.— Comment montrer que $f : I \to J$ est bijective**

- Pour montrer que $f : I \to J$ est bijective **et** déterminer son application réciproque, on adopte le **point de vue des équations** : f est bijective ssi pour tout $y \in J$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution x dans I. On a alors $x = f^{-1}(y)$.
- Le **théorème de la bijection bicontinue** (10.17) permet de montrer que f établit une bijection de I sur $J = f(I)$ et d'expliciter le tableau de variation de f^{-1} *sans avoir à déterminer* f^{-1}. Il suffit de montrer que $f : I \to \mathbb{R}$ et continue et strictement monotone sur I.

Mise en œuvre : exercice 10.8.

Étude de l'équation $f(x) = 0$

❑ **Méthode 10.10.— Comment résoudre l'équation $f(x) = 0$**

- Pour prouver l'**existence d'une solution**, utilisez le **tvi** (**théorème 10.14**) :
  Si f est continue et change de signe entre a et b, c'est-à-dire $f(a) \times f(b) < 0$, alors f prend la valeur 0, *i.e.* l'équation $f(x) = 0$ admet *au moins* une solution c entre a et b.
- Pour prouver **existence et unicité de la solution**, utilisez le cas particulier où f est strictement monotone, continue et change de signe entre a et b.

Remarques :

- Pour prouver qu'il existe **exactement deux solutions**, vous devrez appliquer **exactement deux fois** le **théorème des valeurs intermédiaires** sur des intervalles disjoints sur lesquels f est strictement monotone !
- Pour résoudre l'équation $f(x) = g(x)$ où f et g sont deux fonctions continues sur un même intervalle, il suffit d'appliquer ce qui précède à la fonction continue $f - g$;

- En particulier, ces méthodes s'appliquent donc à l'équation aux points fixes de f, qui sont les solutions de l'équation $f(x) = x$. On introduira donc avec profit la fonction $h = f - id$.

Exemple : soit $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction continue. Montrons qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$f(c) = c$$

Soit $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\forall x \in [a, b], h(x) = f(x) - x$. On montre que l'équation $h(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[a, b]$.
D'après le **théorème 10.14**, il suffit de montrer que h est continue sur l'intervalle $[a, b]$ et change de signe. D'une part h est continue comme somme de telles fonctions et d'autre part

$$\begin{aligned} h(a) &= f(a) - a \geqslant 0 \text{ car par hypothèse } f(a) \in [a, b]\,; \\ h(b) &= f(b) - b \leqslant 0 \text{ car par hypothèse } f(b) \in [a, b]\,; \end{aligned}$$

Ainsi, il existe une solution $c \in [a, b]$ de l'équation $h(x) = 0$. c est une point fixe de la fonction f.

Vrai/Faux

	Vrai	Faux
1. Si $\lim\limits_{a} f \leqslant \lim\limits_{a} g$, alors $f \leqslant g$ au voisinage de a.	☐	☐
2. Si $f : I \to \mathbb{R}$ est monotone, alors f est continue en $a \in \mathring{I}$ *si et seulement si* $\lim\limits_{a^-} f = \lim\limits_{a^+} f$.	☐	☐
3. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue et strictement positive, alors il existe $c > 0$ tel que $\forall x \in [a, b],\ f(x) \geqslant c$.	☐	☐
4. L'image d'un intervalle ouvert par une fonction continue est un intervalle ouvert.	☐	☐
5. Si $\lim\limits_{a} u = 1$ et $\lim\limits_{a} v = +\infty$, alors $\lim\limits_{a} \left[u(x)\right]^{v(x)} = 1$.	☐	☐
6. Si $\lim\limits_{a} u = 0$ et $\lim\limits_{a} v = +\infty$, alors $\lim\limits_{a} \left[u(x)\right]^{v(x)} = 0$.	☐	☐
7. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et T périodique, alors f est bornée.	☐	☐
8. Si $\lim\limits_{a} f = +\infty$ et $\lim\limits_{a}(f + g) = \ell \in \mathbb{R}$, alors g a une limite en a.	☐	☐
9. Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$. Si $\lim\limits_{a} f(x) = \ell$ alors $\ell = f(a)$.	☐	☐
10. Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln(x)}{x^\alpha} = 1$	☐	☐

Énoncé des exercices

Étude locale

Exercice 10.1 : Étudier les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\big(e^{1/x}+e^{2/x}-2\big)$
2. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin(1/x)}{e^{1/x}+1}$
3. $\lim\limits_{x\to1} (1-x^2)\tan(\dfrac{\pi}{2}x)$
4. $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x^2+2x-4}}$
5. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt{2-x^2}-1}{\ln x}$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin(1/x)\,e^{\cos(x)}$
7. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1+x^2}{\sin^2(x)}$
8. $\lim\limits_{x\to\pi/2} \tan(x)\,\tan(2x)$
9. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sqrt{x^2+1}-x$
10. $\lim\limits_{x\to\pi/3} \dfrac{\sqrt{3}\cos(x)-\sin(x)}{x-\pi/3}$
11. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\tan(x)-\sin(x)}{x^3}$
12. $\lim\limits_{x\to0} x\sin(1/x)$

Exercice 10.2 : Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction T-périodique. On suppose que f admet $\ell\in\mathbb{R}$ pour limite en $+\infty$. Montrer que f est constante.

Exercice 10.3* : Soit f une fonction définie au voisinage de 0.
On suppose que $0=\lim\limits_{x\to0} f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(2x)-f(x)}{x}$. Montrer que $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

Étude globale

Exercice 10.4 : Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x)=\lfloor x\rfloor^2+\big(2\lfloor x\rfloor+1\big)\big(x-\lfloor x\rfloor\big)$.
1. Montrer que f est paire, continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que le graphe de f est une ligne polygonale inscrite dans une parabole.

Exercice 10.5 : Déterminer les domaines de définition et de continuité des fonctions suivantes, en précisant le comportement aux bornes.

1. $f(x)=\dfrac{x\ln(x)}{x-1}$.
2. $f(x)=\exp\left(\dfrac{\ln(x)}{\ln(x)-1}\right)$
3. $f(x)=\dfrac{x}{e^x-1}$.
4. $f(x)=\left(\dfrac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)^{x\ln(x)}$.

Exercice 10.6 : Soit $f:\mathbb{R}^{+\star}\to\mathbb{R}$ une fonction croissante telle que la fonction $g:\mathbb{R}^{+\star}\to\mathbb{R}$ définie par $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ soit décroissante. Montrer que f est continue en tout point de $\mathbb{R}^{+\star}$.

Théorèmes fondamentaux

Exercice 10.7 : Soit $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose qu'il existe $\ell\in\mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 10.8 : Soit $f:[1,+\infty[\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x)=\dfrac{2\,x^2}{1+x}$.

1. Démontrer que f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle J à déterminer. Dresser le tableau de variation de son application réciproque g.
2. Étudier la branche infinie pour f. En déduire celle de g au voisinage de $+\infty$.

Exercice 10.9 : Soit f, g deux fonctions continues de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$.
On définit pour tout $x \in \mathbb{R}$ la fonction $M(x) = \sup\limits_{t \in [-1,1]} \big(f(t) + x\, g(t)\big)$.
1. Montrer que $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bien définie.
2. Montrer que $\forall h \geqslant 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $M(x+h) \leqslant M(x) + h \sup\limits_{[-1,1]} g$ et $M(x+h) \geqslant M(x) + h \inf\limits_{[-1,1]} g$.
3. En déduire que $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue.

Exercice 10.10 : Théorème de point fixe
Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue et positive. On suppose qu'il existe $\ell \in [0, 1[$ telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \ell$. Montrer que f possède au moins un point fixe.

Exercice 10.11 : Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$.
1. Montrer que l'équation $f(x + \frac{1}{2}) = f(x)$ possède au moins une racine.
2. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, l'équation $f(x + \frac{1}{n}) = f(x)$ possède au moins une racine.

D'après Petites Mines

Exercice 10.12 : Théorème de point fixe
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment non trivial ($a < b$).
1. On suppose que $f([a, b]) \subset [a, b]$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = c$.
2. Même question lorsqu'on suppose que $[a, b] \subset f([a, b])$.

Exercice 10.13 : Soit $f : [0, 1[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\forall x \in [0, 1[,\ f(x) = x \sin\left(\frac{1}{1-x}\right)$.
1. Calculez pour tout entier naturel l'image par f de $x_n = 1 - \dfrac{2}{(4n+1)\pi}$ et $y_n = 1 - \dfrac{2}{(4n+3)\pi}$.
2. Déduisez-en $f([0, 1[)$.

Exercice 10.14* : Continuité et injectivité
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et injective. Montrer que f est strictement monotone sur I.

■ Équations fonctionnelles

Exercice 10.15 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue en 0 qui vérifie $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(2x) = f(x)$.
Montrer que f est constante.

Exercice 10.16 : Déterminer l'ensemble
1. des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y)$;
2. des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) \times f(y)$.

Indications

Ex. 10.2

Pour montrer que $f(x) = \ell$, on peut aussi vérifier que $\forall \varepsilon > 0,\ |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$.

Ex. 10.3

Vous pourrez écrire $f(x) = \sum_{k=1}^{n} \left[f\left(x/2^{k-1}\right) - f\left(x/2^{k}\right) \right] + f\left(x/2^{n}\right)$.

Ex. 10.4

1. *Pour $x \in \mathbb{R}$, on rappelle que $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x. C'est l'unique entier relatif $n \in \mathbb{Z}$ vérifiant l'encadrement $n \leqslant x < n+1$.*
Pour la parité et la continuité de f, on fera une étude séparée pour le cas où $x = n$ est un entier relatif.

Ex. 10.6

L'existence de limite à gauche et à droite pour une fonction monotone est assurée par le **théorème de la limite monotone** *(cf.* **théorème 10.10***).*

Ex. 10.7

D'après le théorème **image continue d'un segment** *(***théorème 10.15***) f est bornée sur tout segment de la forme $[0, A]$. Utilisez l'hypothèse $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ pour montrer que cette propriété s'étend au voisinage de $+\infty$.*

Ex. 10.9

1. *On pourra considérer la fonction F_x définie sur le segment $[-1, 1]$ par $F_x(t) = f(t) + x\ g(t)$.*
2. *Pour la minoration appliquer l'inégalité $M(x+h) \geqslant f(t) + (x+h\ g(t)$ avec un bon choix de t.*

Ex. 10.10

Il s'agit de démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}^+$. Pour ce faire, on pourra introduire la fonction $h : x \mapsto f(x) - x$.

Ex. 10.12

On s'intéresse ici à l'équation aux points fixes $f(x) = x$. Il est naturel d'étudier la fonction $h : x \mapsto f(x) - x$.

Ex. 10.14

On pourra raisonner par l'absurde et supposer que f n'est pas strictement monotone. Il existe en ce cas $(a, b, c) \in I^3$ avec $a < b < c$ tel que $f(b)$ n'est pas compris entre $f(a)$ et $f(c)$.

Ex. 10.15

À l'aide du **théorème 10.3** *de f en 0, montrer que $f(x) = f(0)$.*

Ex. 10.16

1. *On procédera par étapes en déterminant successivement f sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$. Puis on déterminera f sur $\mathbb{R}$ en utilisant le fait que tout réel est limite d'une suite de rationnels (***caractérisation séquentielle de la densité** *de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$).*
2. *On est tenté de considérer $\ln f$ pour se ramener au* **1.** *mais il faut faire attention aux conditions d'existence de $\ln f$.*

Corrigé des vrai/faux

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F	V	V	F	F	V	V	V	V	F

1. Lorsque les limites de f et de g en a sont strictement rangées, alors les fonctions sont rangées dans le même ordre au voisinage de a. Cependant, lorsque f et g ont même limite en a, les fonctions f et g ne sont même pas comparables *a priori*. Par exemple, la fonction définie par $f(x) = x\cos(x)$ admet 0 comme limite en 0 par comparaison. Pourtant, cette fonction n'est ni positive, ni négative au voisinage de 0.

2. f étant monotone, elle admet en un point intérieur $a \in \mathring{I}$, des limites à gauche et à droite finies. De plus, ces limites encadrent $f(a)$. Par conséquent,

$$f \text{ est continue en a si et seulement si } \begin{cases} \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a) \\ \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a) \end{cases} \text{ si et seulement si } f(a^-) = f(a^+).$$

3. D'après le **théorème 10.15**, f est bornée sur $[a, b]$ et atteint ses bornes. Il existe donc $\gamma \in [a, b]$ tel que $\forall x \in [a, b], \quad f(x) \geqslant f(\gamma)$. Comme f est à valeurs strictement positives, $c = f(\gamma)$ convient.

4. La fonction $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et l'image de $\mathbb{R}$ par cette fonction est le segment $[-1, 1]$.

5. $\left[u(x)\right]^{v(x)} = \exp\left(v(x)\ \ln(u(x))\right)$. Or, par hypothèse $\left\| \begin{array}{ll} \ln\left(u(x)\right) & \xrightarrow[x\to a]{} 0 \\ v(x) & \xrightarrow[x\to a]{} +\infty \end{array} \right.$. Nous sommes donc en présence d'une forme indéterminée ici. Par exemple, on vérifie que $\lim\limits_{x\to+\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$.

7. $f(\mathbb{R}) = f([0, T])$. Or f est continue sur $[0, T]$, donc bornée d'après le **théorème 10.15**.

8. En effet, par opérations algébriques, $g = (f + g) - g$ admet pour limite $-\infty$ en a.

9. Il s'agit d'une conséquence de l'unicité de la limite.

10. En cas d'indétermination, la puissance l'emporte sur le logarithme, mais ici, il n'y a pas d'indétermination !

Erreurs classiques

- Il ne faut pas confondre passage à la limite (lorsqu'on sait qu'elles existent) dans des inégalités et théorème de convergence par encadrement. Si $f, g, h : I \to \mathbb{R}$ sont définies dans un voisinage de a et vérifient $f \leqslant g \leqslant h$, avec $f \lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = \ell$, alors le **théorème d'existence de limite par encadrement** permet d'en déduire que f admet une limite en a et que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.
- Ne pas oublier les formes indéterminées exponentielles 1^∞, ∞^0 et 0^0. Pour étudier la limite d'une fonction de la forme $f(x) = \left[u(x)\right]^{v(x)}$, il faut toujours passer en exponentielle $f(x) = \exp\left(v(x)\ \ln(u(x))\right)$.

Corrigé des exercices

Exercice 10.1

1. Posons $f_1(x) = x\left(e^{1/x} + e^{2/x} - 2\right)$. On commence par se ramener au voisinage de 0 au moyen du changement de variable $x = \frac{1}{t}$. On étudie la fonction $g(t) = f_1\left(\frac{1}{t}\right)$ au voisinage de 0. On a

Méthode 10.3

$$g(t) = \frac{e^t + e^{2t} - 2}{t} = \frac{e^t - 1}{t} + \frac{e^{2t} - 1}{t} = \frac{e^t - 1}{t} + 2\,\frac{e^{2t} - 1}{2t}$$

Or on sait que $\lim\limits_{u \to 0} \dfrac{e^u - 1}{u} = 1$. Par suite, $\lim\limits_{t \to 0} g(t) = 1 + 2 = 3$ et finalement $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = 3$.

C'est la limite des taux de variation de la fonction exp *en* 0.

2. On sait que $\frac{1}{x} \xrightarrow[x \to 0^\pm]{} \pm\infty$. D'où la disjonction de cas suivante :

- Lorsque x tend vers 0^+, on a $|f_2(x)| \leqslant \dfrac{1}{e^{1/x} + 1} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$. Par comparaison, il en résulte que $\lim\limits_{x \to 0^+} f_2(x) = 0$.
- En revanche, lorsque x tend vers 0^-, $e^{1/x} + 1 \xrightarrow[x \to 0^-]{} 1$ mais $\sin(1/x)$ n'a pas de limite en 0^-. Par conséquent, f_2 n'a pas de limite en 0^-.

En définitive, f_2 n'a pas de limite lorsque x tend vers 0.

3. Afin de se ramener au voisinage de l'origine, on commence par le changement de variable $x = 1 + t$. On étudie alors $g(t) = f_3(1 + t)$. On a

$$\begin{aligned} g(t) &= \left(1 - (1+t)^2\right) \tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi t}{2}\right) = t(t+2)\,\frac{\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)} \\ &= (t+2)\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)\frac{t}{\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)} = \underbrace{(t+2)\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)\frac{2}{\pi}}_{\xrightarrow[t \to 0]{} 2 \times 1 \times \frac{2}{\pi}}\ \underbrace{\frac{\frac{\pi t}{2}}{\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)}}_{\xrightarrow[t \to 0]{} 1} \end{aligned}$$

Finalement, par opérations algébriques sur des fonctions possédant une limite, il en découle que $\lim\limits_{t \to 0} g(t) = \dfrac{4}{\pi}$, et donc $\lim\limits_{x \to 1} f_3(x) = \dfrac{4}{\pi}$.

4. On pose $x = 2 + t$ et on étudie $g(t) = f_4(2 + t)$ au voisinage de 0. On a

Il s'agit d'une forme indéterminée $\frac{0}{0}$. Pour la lever, nous multiplions et divisons par les quantités conjuguées du numérateur et du dénominateur.

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{\sqrt{t^2 + 4t + 3} - \sqrt{3 + 2t}}{\sqrt{t + 4} - \sqrt{t^2 + 6t + 4}} \\ &= \frac{(t^2 + 4t + 3) - (3 + 2t)}{\sqrt{t^2 + 4t + 3} + \sqrt{3 + 2t}} \times \frac{\sqrt{t + 4} + \sqrt{t^2 + 6t + 4}}{(t + 4) - (t^2 + 6t + 4)} \\ &= \frac{\sqrt{t + 4} + \sqrt{t^2 + 6t + 4}}{\sqrt{t^2 + 4t + 3} + \sqrt{3 + 2t}} \times \frac{t^2 + 2t}{t^2 - 5t} \\ &= \frac{\sqrt{t + 4} + \sqrt{t^2 + 6t + 4}}{\sqrt{t^2 + 4t + 3} + \sqrt{3 + 2t}} \times \frac{2 + t}{-5 + t} \end{aligned}$$

Par OPA, il en résulte que $\lim_{t\to 0} g(t) = \lim_{x\to 2} f_4(x) = -\dfrac{4}{5\sqrt{3}}$.

5. On commence par se ramener au voisinage de 0 en posant $x = 1+t$. On a alors

$$\begin{aligned} g(t) &= f_5(1+t) = \frac{\sqrt{1-2t-t^2}-1}{\ln(1+t)} = \frac{(1-2t-t^2)-1}{(1+\sqrt{1-2t-t^2})\ \ln(1+t)} \\ &= -\frac{t}{\ln(1+t)} \times \frac{2+t}{1+\sqrt{1-2t-t^2}} \end{aligned}$$

On reconnaît la définition du nombre dérivé de ln *au point 1 !*

Comme $\lim_{t\to 0} \dfrac{\ln(1+t)}{t} = 1$ il en résulte que $\lim_{t\to 0} g(t) = \lim_{x\to 1} f_5(x) = -1$.

6. Partant de $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, on en déduit (par croissance de exp) l'encadrement valide pour tout réel x assez grand

$\sin(1/x) > 0$ dès que x est suffisamment grand.

$$e^{-1}\ \sin(1/x) \leqslant \sin(1/x)\, e^{\cos x} \leqslant e^{1}\ \sin(1/x)$$

Or, $\lim_{x\to+\infty} e\sin(1/x) = \lim_{x\to+\infty} e^{-1}\sin(1/x) = 0$. Par **encadrement** (**théorème 10.7**), il vient $\lim_{x\to+\infty} e^{\cos x}\sin(1/x) = 0$.

7. C'est le piège ! ! Il n'y a pas de forme indéterminée car $\lim_{x \xrightarrow{\neq} 0} \sin^2(x) = 0^+$!

On peut directement conclure à l'aide du **théorème 10.6** que $\lim_{x\to 0} f_7(x) = +\infty$.

8. La formule de duplication des tangentes donne $\tan(x)\tan(2x) = \dfrac{2\tan^2(x)}{1-\tan^2(x)}$.

Le changement de variable $t = \tan x \xrightarrow[x\to(\pi/2)^{\pm}]{} \pm\infty$ donne alors

$$\lim_{x\to(\pi/2)^{\pm}} \tan(x)\tan(2x) = -2.$$

9. Au voisinage de $-\infty$, $\sqrt{x^2+1} \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$ et $-x \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$. Par conséquent, $\lim_{x\to-\infty} f_9(x) = +\infty$.

En revanche, au voisinage de $+\infty$, il y a indétermination et pour la lever, nous allons multiplier et diviser par l'expression conjuguée de $\sqrt{x^2+1}-x$. Ainsi,

$$\sqrt{x^2+1}-x = \frac{(x^2+1)-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Par OPA, il s'ensuit que $\lim_{x\to+\infty} f_9(x) = 0$.

10. Avant d'effectuer le changement de variable attendu, commençons par un peu de trigo :

Chouette, il y avait longtemps ! !

$$\sqrt{3}\ \cos(x) - \sin(x) = 2\ \big(\sin(\pi/3)\cos(x) - \cos(\pi/3)\sin(x)\big) = -2\ \sin\big(x - \frac{\pi}{3}\big)$$

$\frac{\sin(t)}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 1$

Ainsi, le changement de variable $x = \frac{\pi}{3} + t$ donne directement :

$$\frac{\sqrt{3}\cos x - \sin x}{x-\pi/3} = -2\ \frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{x-\frac{\pi}{3}} \xrightarrow[x\to\frac{\pi}{3}]{} -2$$

11. Nous sommes en présence d'une forme indéterminée $\frac{0}{0}$. Pour la lever, nous allons factoriser par $\tan(x)$. Il vient

$$f_{11}(x) = \frac{\tan(x)-\sin(x)}{x^3} = \underbrace{\frac{\tan(x)}{x}}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 1} \times \underbrace{\frac{1-\cos(x)}{x^2}}_{\xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2}}$$

On reconnaît des limites de référence : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$. ✐ **Méthode 10.5**

Par conséquent, f_{11} admet une limite en 0 et $\lim\limits_{x\to 0} f_{11}(x) = \frac{1}{2}$.

12. Comme sin est bornée par 1, il vient $|x\sin(1/x)| \leqslant |x| \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. Par **comparaison**, il s'ensuit que $\lim\limits_{x\to 0} x\sin(1/x) = 0$. ▲

Exercice 10.2

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Montrons que $f(x) = \ell$ à l'aide de l'indication fournie. Soit donc $\varepsilon > 0$. Comme $f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \ell$, il existe $A > 0$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ t \geqslant A \Rightarrow |f(t) - \ell| \leqslant \varepsilon \tag{10.1}$$

Soit $n = \lfloor \frac{A-x}{T} \rfloor + 1$ de sorte que $x + nT > A$. En ce cas, d'après (10.1), $|f(x+nT)-\ell)| \leqslant \varepsilon$, ce qui par périodicité de f, revient à dire que $|f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon$. Ainsi, nous avons établi que pour tout $\varepsilon > 0$, $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$, ce qui n'est possible que si $|f(x) - \ell| = 0$, c'est-à-dire si $f(x) = \ell$.

✐ *x n'a aucune raison d'être supérieur à A, mais pour n assez grand $x + nT$ l'est.*

Finalement, ceci étant vrai pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, la fonction f est constante égale à ℓ. ▲

Exercice 10.3

Commençons par un petit calcul préliminaire. Soit donc $x \in \mathbb{R}^{+\star}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. Posons pour $k \in [\![0, n]\!]$, $x_k = \frac{x}{2^k}$. Pour valoriser la deuxième hypothèse, on introduit un développement télescopique de $f(x) - f(x_n)$:

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{x} &= \frac{1}{x}\left[f(x) - f(x_n)\right] + \frac{f(x_n)}{x} = \frac{1}{x}\left[\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}) - f(x_k)\right] + \frac{f(x_n)}{x} \\ &= \frac{1}{x}\left[\sum_{k=1}^{n} f(2x_k) - f(x_k)\right] + \frac{f(x_n)}{x} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\,\frac{f(2x_k) - f(x_k)}{x_k} + \frac{f(x_n)}{x}\end{aligned}$$

D'après l'**inégalité triangulaire**, il en résulte que

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\left|\frac{f(2x_k) - f(x_k)}{x_k}\right| + \left|\frac{f(x_n)}{x}\right|$$

<u>Soit $\varepsilon > 0$ fixé</u>. Comme $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x} = 0$, <u>il existe $\eta > 0$</u> tel que

$$(\forall x \in \mathbb{R}),\quad \left(|x| \leqslant \eta \Rightarrow \left|\frac{f(2x) - f(x)}{x}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) \tag{10.2}$$

Soit donc $x \in [-\eta, 0[\cup]0, \eta]$ fixé. Comme par hypothèse, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, il résulte de la **caractérisation séquentielle de la limite** que la suite $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est convergente de limite nulle. Par conséquent, il existe un entier $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que $|f(x_n)| \leqslant |x|\,\dfrac{\varepsilon}{2}$.

Théorème 10.3

On utilise la définition de $\lim f(x_n) = 0$, *avec* $\varepsilon' = |x|\,\frac{\varepsilon}{2}$.

D'autre part, soit $k \in [\![1, n]\!]$, on a $|x_k| \leqslant |x| \leqslant \eta$. Par conséquent, on peut appliquer (10.2) à x_k. Il vient $\left|\dfrac{f(2x_k) - f(x_k)}{x_k}\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Finalement, en sommant terme à terme ces inégalités, nous obtenons

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{x}\right| &\leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\left|\frac{f(2x_k) - f(x_k)}{x_k}\right| + \left|\frac{f(x_n)}{x}\right| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2^k} + \frac{\varepsilon}{2} = \big(1 - \frac{1}{2^n}\big)\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon\end{aligned}$$

Ainsi nous avons établi que $(\forall \varepsilon > 0), (\exists \eta > 0), \left(0 < |x| \leqslant \eta \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant \varepsilon\right)$, ce qui revient à dire par définition que $\lim\limits_{x \xrightarrow{\neq} 0} \dfrac{f(x)}{x} = 0$. ▲

Exercice 10.4

1. Soit $f(x) = \lfloor x\rfloor^2 + \big(2\lfloor x\rfloor + 1\big)\big(x - \lfloor x\rfloor\big)$, pour $x \in \mathbb{R}$.

• Montrons que f est paire. Soit $x \in \mathbb{R}$, on vérifie que $f(-x) = f(x)$. On note $n = \lfloor x\rfloor$. Ainsi,

$$f(x) = n^2 + (2n+1)(x-n)$$

▸ Si $x = n \in \mathbb{Z}$, en ce cas, $f(x) = n^2 + (2n+1)(x-n) = n^2 = x^2$. De même, $f(-x) = (-n)^2 = (-x)^2$, de sorte que $f(x) = f(-x)$.

▸ Si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on a alors l'encadrement strict $n < x < n+1$, d'où l'on tire que $-n-1 < -x < -n$. Par conséquent, $\lfloor -x\rfloor = -n-1$. Réinjectons ceci dans l'expression de $f(x)$ et de $f(-x)$, il vient :

$$\begin{aligned} f(x) &= -n^2 + (2x-1)n + x \\ f(-x) &= (-n-1)^2 + (-2n-1)(-x+n+1) \\ &= -n^2 + (2x-1)n + x \end{aligned}$$

Ainsi, $f(x) = f(-x)$.

Dans tous les cas, on a bien vérifié que $f(-x) = f(x)$: f est paire.

• Montrons que f est continue sur $\mathbb{R}$.

▸ Continuité de f dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

Soit $n \in \mathbb{Z}$ fixé. Pour $x \in]n, n+1[$, $\lfloor x\rfloor = n$, par conséquent, f coïncide dans $]n, n+1[$ avec la fonction affine : $x \mapsto (2n+1)(x-n) + n^2$. Elle est donc continue dans $]n, n+1[$.

▸ Continuité de f aux points $n \in \mathbb{Z}$

f étant définie par des expressions différentes à gauche et à droite de n, on

vérifie les continuités à gauche et à droite de n.

$$\begin{aligned}
\text{Si } x \in]n-1, n[, \text{ alors } f(x) &= (n-1)^2 + (2n-1)(x-n+1) \\
\text{d'où il découle } \lim_{x \to n^-} f(x) &= (n-1)^2 + 2n - 1 = n^2 \\
\text{Si } x \in]n, n+1[, \text{ alors } f(x) &= n^2 + (2n+1)(x-n) \\
\text{et donc } \lim_{x \to n^+} f(x) &= (n-1)^2 + 2n - 1 = n^2
\end{aligned}$$

Ainsi, $\lim\limits_{x \to n^-} f(x) = \lim\limits_{x \to n^+} f(x) = f(n)$. f est donc continue au point n.

Ainsi, f est continue dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et en tout entier $n \in \mathbb{Z}$, elle est donc continue sur $\mathbb{R}$.

2. D'après la question précédente, f est une fonction continue et affine sur chaque intervalle de la forme $]n, n+1[$. Son graphe est donc une ligne polygonale. Comme de plus, pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, $f(n) = n^2$, les sommets de cette ligne brisée appartiennent à la parabole d'équation $y = x^2$. ▲

Exercice 10.5

1. Étude de $f(x) = \dfrac{x \ln(x)}{x-1}$

• f est définie et continue pour sur $\mathbb{R}^{+\star} \setminus \{1\}$ comme quotient de telles fonctions dont le dénominateur ne s'annule pas.

• Étude locale de f au voisinage de 0. Par croissances comparées, $\lim\limits_{0^+} f = 0$. f est donc prolongeable par continuité au point 0.

Voir les limites de références, **méthode 10.5**

• Étude locale au voisinage de 1. On pose $x = 1 + t$.
On a $f(1+t) = (1+t)\dfrac{\ln(1+t)}{t} \xrightarrow[t \to 0]{} 1$, ce qui revient à dire que $\lim\limits_{x \to 1^\pm} f(x) = 1$. f est donc prolongeable par continuité en 1.

• Étude locale au voisinage de $+\infty$.
Au voisinage de $+\infty$, on a $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{1 - \frac{1}{x}}$. Par conséquent, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et par croissances comparées $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$. Le graphe de f présente donc une branche parabolique de direction asymptotique (Ox).

On applique la **méthode 10.7**

2. Étude de $f(x) = \exp\left(\dfrac{\ln(x)}{\ln(x) - 1}\right)$

• f est définie et continue sur $\mathbb{R}^{+\star} \setminus \{e\}$.

• Au voisinage de 0. Par composition de limites, il vient

$$\left.\begin{aligned}
\lim_{x \to 0^+} \ln(x) &= -\infty \\
\lim_{y \to -\infty} \frac{y}{y-1} &= 1 \\
\lim_{z \to 1} e^z &= e
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} f(x) = e$$

Ainsi f est prolongeable par continuité en 0, en posant $\tilde{f}(0) = e$.

• Au voisinage de e. Par opérations, on a $\lim\limits_{x\to e^{\pm}} \dfrac{\ln(x)}{\ln(x)-1} = \pm\infty$. Par composition avec les limites de la fonction exponentielle, il vient

$$\begin{aligned}\lim_{x\to e^-} f(x) &= 0\\ \lim_{x\to e^+} f(x) &= +\infty\end{aligned}$$

f n'est donc pas prolongeable par continuité au point e et le graphe de f admet la droite d'équation $x = e$ comme asymptote verticale lorsque x tend vers e^+.

• Au voisinage de $+\infty$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{\ln x - 1} = 1$. Par continuité de exp, il s'ensuit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = e$. Le graphe de f admet la droite d'équation $y = e$ comme asymptote horizontale lorsque x tend vers $+\infty$.

3. Étude de $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$

• f est définie et continue sur $\mathbb{R}^\star$ comme quotient de telles fonctions dont le dénominateur ne s'annule pas.

• Au voisinage de 0. On reconnaît l'inverse du taux de variation de la fonction exponentielle en 0. Il s'ensuit que $\lim\limits_{x\to 0^{\pm}} f(x) = 1$. Ainsi, f est prolongeable par continuité en 0 en posant $\tilde{f}(0) = 1$.

• Au voisinage de $+\infty$. Par croissances comparées, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Par conséquent, la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale au graphe de f lorsque x tend vers $+\infty$.

Pour étudier la branche infinie au voisinage de $+\infty$, on met en œuvre la **méthode 10.7**.

• Au voisinage de $-\infty$.

■ Par OPA, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. De plus,

■ $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{1}{e^x - 1} \xrightarrow[x\to-\infty]{} -1$. Enfin

■ $f(x) + x = \dfrac{xe^x}{e^x - 1}$ qui tend vers 0 quand x tend vers $-\infty$ par croissances comparées.

Ainsi, la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique au graphe de f.

4. Étude de $f(x) = \left(\dfrac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)^{x\ln(x)}$

• $f(x) = \exp\left[x\ln(x)\ln\left(\dfrac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)\right]$, $f(x))$ est défini pour $x > 0$ de sorte que $\ln(x)$ existe et si $\dfrac{\ln(1+x)}{\ln(x)} > 0$ pour que son logarithme soit défini. Autrement dit, $f(x)$ est défini pour $x > 1$. Ainsi, f est-elle définie et continue par composition dans $]1, +\infty[$.

• Au voisinage de 1^+,

$$\begin{aligned}\ln\circ f(x) &= x\ln(x)\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)\\ &= x\ln(x)\left[\ln\circ\ln(1+x) - \ln\circ\ln(x)\right]\\ &= x\ln(x)\ln\circ\ln(1+x) - x\ln(x)\ln\circ\ln(x)\end{aligned}$$

Or, par opérations algébriques, $\lim\limits_{x\to 1^+} x\,\ln(x)\,\ln\circ\ln(1+x) = 0$ et par croissances comparées, on a

En cas d'indétermination entre $\ln(y)$ et une puissance de y, c'est la puissance qui l'emporte.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^+} \ln x = 0^+\\ \lim\limits_{y\to 0^+} y\ln y = 0\end{array}\right) \Rightarrow \lim_{x\to 1^+} \ln x\,\ln\ln x = 0$$

d'où il découle que $\lim\limits_{x\to 1^+} x\,\ln(x)\,\ln\big(\ln(x)\big) = 0$, puis finalement $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1$. Ainsi, f est prolongeable par continuité au point 1 en posant $\tilde{f}(1) = 1$.

• Au voisinage de $+\infty$, on observe que $\ln(1+x) = \ln x + \ln(1+\frac{1}{x})$ d'où il vient

$$\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)} = 1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln(x)} = 1 + y(x)$$

Comme $y(x) = \dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, et $z(x) = \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, on obtient par changement de variable dans la limite usuelle $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\ln(1+u)}{u} = 1$:

$$\begin{aligned}\frac{\ln(x)}{\ln(1+\frac{1}{x})} \times \ln\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right) &= \frac{\ln(1+y(x))}{y(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1\\ x\ln(1+\frac{1}{x}) &= \frac{\ln(1+z(x))}{z(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1\end{aligned}$$

Par produit, il s'ensuit que

$$\ln\circ f(x) = x\,\ln(x)\,\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$$

Finalement, par continuité de exp, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = e$, ce qui revient à dire que la droite d'équation $y = e$ est asymptote horizontale au graphe de f. ▲

Exercice 10.6

Soit $a \in \mathbb{R}^{+\star}$. Pour établir la continuité de f en a, nous utilisons les limites à gauche et à droite afin de mettre en œuvre le **théorème 10.10** :
Comme f est croissante, elle admet des limites à gauche et à droite au point a, $f(a^-)$ et $f(a^+)$ qui vérifient en outre l'encadrement :

$$f(a^-) \leqslant f(a) \leqslant f(a^+)$$

Le **théorème de la limite monotone** appliqué à la fonction décroissante g donne aussi $g(a^+) \leqslant g(a) \leqslant g(a^-)$, c'est-à-dire

$$\frac{f(a^+)}{a} \leqslant \frac{f(a)}{a} \leqslant \frac{f(a^-)}{a}$$

Comme a est strictement positif, il s'ensuit que

$$f(a^+) \leqslant f(a) \leqslant f(a^-)$$

Finalement, on a bien $f(a^-) = f(a^+) = f(a)$: f est donc continue en a. ▲

Exercice 10.7

Comme par hypothèse $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, il existe $A > 0$ tel que pour tout réel x appartenant à $[A, +\infty[$, $\left|f(x) - \ell\right| \leqslant 1$. D'après l'**inégalité triangulaire** il s'ensuit que

$$\forall x \in [A, +\infty[, \quad |f(x)| \leqslant |\ell| + 1$$

D'autre part, la fonction restreinte $f_|$ étant continue sur le segment $[0, A]$, il découle du **théorème 10.15** qu'il existe $m \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall x \in [0, A], \quad |f(x)| \leqslant m$$

Finalement, posons, $M = \max\{m, 1 + |\ell|\}$ de sorte que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leqslant M$$

▲

Exercice 10.8

1. f est une fraction rationnelle définie sur $[1, +\infty[$. Elle est donc continue et même dérivable sur $[1, +\infty[$. Comme de plus $f'(x) = 2 - \dfrac{2}{(1+x^2)} > 0$, f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$.
D'après le **théorème de la bijection bicontinue**, f étant strictement monotone et continue, elle réalise une bijection de I sur son image $J = f([1, +\infty[)$. De plus, comme f est croissante, nous avons $f([1, +\infty[) = [f(1), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[$, c'est-à-dire $J = [1, +\infty[$.
Soit $g : [1, +\infty[\to [1, +\infty[$ l'application réciproque de f.

g est strictement croissante et bijective de $[1, +\infty[$ dans lui-même. Par conséquent, d'après le **théorème de la bijection bicontinue** $g(1) = 1$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = +\infty$.

x	1		$+\infty$
$g(x)$	1	$\nearrow$	∞

2. On applique la **méthode 10.7**

- $$\frac{f(x)}{x} = \frac{2x}{1+x} = 2\frac{2}{1+\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to\infty]{} 2$$
- $$f(x) - 2x = \frac{2x^2 - 2x(1+x)}{1+x} = -\frac{2x}{1+x} = -\frac{2}{1+\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to\infty]{} -2$$

Ainsi, Γ_f admet la droite d'équation $y = 2x - 2$ comme asymptote oblique au voisinage de $+\infty$.
Pour obtenir la branche infinie de g au voisinage de $+\infty$, effectuons le changement de variable $x = g(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} +\infty$ dans le calcul précédent. Il vient $t - 2g(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} -2$, soit

✐ $f \circ g(t) = t$

$$g(t) - \frac{1}{2}t \xrightarrow[t\to\infty]{} 1$$

Par conséquent, la droite d'équation cartésienne $y = \frac{1}{2}x + 1$ est asymptote oblique à la courbe repésentative de g.

Nb : en fait, $\forall t > 1$, $g(t) = \dfrac{t + \sqrt{t^2 + 8t}}{4}$. ▲

Exercice 10.9

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On considère la fonction $F_x : [-1,1] \to \mathbb{R}$ définie par $F_x(t) = f(t) + x\ g(t)$. F_x est combinaison linéaire de deux fonctions continues sur $[-1,1]$. Elle est donc elle-même continue sur ce segment d'après le **théorème 10.11**. On peut donc lui appliquer le **théorème 10.15** : F_x est bornée sur le segment $[-1,1]$ et atteint ses bornes. En particulier, $M(x) = \sup\limits_{[-1,1]} F_x$ est bien défini et il existe $t_x \in [-1,1]$ tel que $M(x) = F_x(t_x) = f(t_x) + xg(t_x)$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$, et $h \in \mathbb{R}^+$.

- Pour tout $t \in [-1,1]$, on a

$$\begin{aligned} F_{x+h}(t) &= f(t) + (x+h)g(t) = F_x(t) + h\,g(t) \\ &\leqslant M(x) + h\,g(t) \leqslant M(x) + h \sup_{[-1,1]} g \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $t \in [-1,1]$, on obtient en passant au sup

$$M(x+h) = \sup_{t\in[-1,1]} F_{x+h}(t) \leqslant M(x) + h \sup_{[-1,1]} g.$$

$M(x) + h \sup\limits_{[-1,1]} g$ est un majorant de la fonction F_{x+h}. Il est donc supérieur au plus petit des majorants.

- La démonstration de la minoration est plus astucieuse. Par définition, $M(x+h) = \sup_{t\in[-1,1]} F_{x+h}(t)$. En particulier,

$$\begin{aligned} M(x+h) &\geqslant F_{x+h}(t_x) = f(t_x) + (x+h)g(t_x) = f(t_x) + xg(t_x) + hg(t_x) \\ &\geqslant M(x) + hg(t_x) \geqslant M(x) + h \inf_{[-1,1]} g \end{aligned}$$

- Ainsi, nous avons établi l'encadrement

$$M(x) + h \inf_{[-1,1]} g \leqslant M(x+h) \leqslant M(x) + h \sup_{[-1,1]} g$$

3. Posons $k = \max\left\{\left|\inf\limits_{[-1,1]} g\right|, \left|\inf\limits_{[-1,1]} g\right|\right\}$. D'après la question précédente, nous avons pour tout $(x,h) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$, $|M(x+h) - M(x)| \leqslant kh$. En discutant suivant que x est inférieur à a ou pas, on en déduit aisément que pour tout couple $(a,x) \in \mathbb{R}^2$, $\left|M(x) - M(a)\right| \leqslant \left|x-a\right|$. En particulier, on en déduit par comparaison que $\lim\limits_{x\to a} M(x) = M(a)$. Ceci étant vrai pour tout réel a, M est continue sur $\mathbb{R}$. ▲

Ceci prouve que M est une fonction lipschitzienne de constante k, une notion qui sera détaillée au second semestre.

Exercice 10.10

Soit $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R}^+, h(x) = f(x) - x$. h est continue sur $\mathbb{R}^+$ comme somme de telles fonctions. Montrons que l'équation

$$h(x) = 0$$

admet au moins une solution dans $\mathbb{R}^+$. Pour cela, il suffit à présent de vérifier que h change de signe dans $\mathbb{R}^+$.

- D'une part $h(0) \geqslant 0$ car, f étant à valeurs positives, $f(0) \geqslant 0$, ce qui revient à dire que $h(0) \geqslant 0$.

• D'autre part, $\dfrac{h(x)}{x} = \dfrac{f(x)}{x} - 1 \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell - 1 < 0$ car par hypothèse $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \ell \in [0,1[$. D'après la **proposition 10.4**, il en résulte que $\dfrac{h(x)}{x}$ et donc aussi $h(x)$ est négatif pour x assez grand.

Ainsi, h est continue sur $\mathbb{R}^+$ et change de signe : d'après le **théorème 10.12**, elle s'annule nécessairement. ▲

Exercice 10.11

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$.

1. Soit $x \in [0, \frac{1}{2}]$, on a $f(x+\frac{1}{2}) = f(x) \iff f(x+\frac{1}{2}) - f(x) = 0$. Introduisons la fonction $h : [0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = f(x+\frac{1}{2}) - f(x)$.

Pour montrer que l'équation $f(x+\frac{1}{2}) = f(x)$ a au moins une solution, on met en œuvre la **méthode 10.10**.

• Remarquons tout d'abord que h est continue sur $[0, \frac{1}{2}]$ comme composée de telles fonctions.

• Montrons que h change de signe entre 0 et $\frac{1}{2}$. Comme par hypothèse $f(0) = f(1)$, il vient

$$\begin{aligned} h(\frac{1}{2}) &= f(1) - f(\frac{1}{2}) = f(0) - f(\frac{1}{2}) \\ h(0) &= f(\frac{1}{2}) - f(0) \end{aligned}$$

Ainsi, $h(0)$ et $h(\frac{1}{2})$ sont opposés. D'après le **TVI** (**corollaire 10.14**), il en découle l'existence d'un réel $c \in [0, \frac{1}{2}]$ tel que $h(c) = 0$, *i.e.* $f(c+\frac{1}{2}) = f(c)$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Inspirons-nous de la première question et introduisons la fonction auxiliaire $h : [0, 1-\frac{1}{n}] \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = f(x+\frac{1}{n}) - f(x)$. Il s'agit d'établir l'existence d'une solution pour l'équation $h(x) = 0$.

• h est continue sur $[0, 1-\frac{1}{n}]$ comme composée de telles fonctions.

• Montrons que h change de signe entre 0 et $1-\frac{1}{n}$. Un développement télescopique de $f(1) - f(0)$ donne

$$0 = f(1) - f(0) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} h\left(\frac{k}{n}\right)$$

Ainsi, la somme des n termes $h(0), h(1/n), h(2/n), \ldots, h(1-1/n)$ est nulle. Il en découle que soit il y a un terme strictement positif et un terme strictement négatif, soit tous ces termes sont nuls. Dans tous les cas, h change de signe (au sens large).

D'après le **corollaire 10.14**, h doit nécessairement s'annuler. ▲

Exercice 10.12

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On s'intéresse à l'équation

$$f(x) = x \tag{10.3}$$

Pour étudier l'existence d'une solution de (10.3), on introduit la fonction $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = f(x) - x$.
Remarquons tout d'abord que h est continue sur $[a,b]$ comme somme de telles

fonctions. À l'aide du **corollaire 10.14**, il suffit à présent de montrer que h change de signe pour garantir l'existence d'une solution à l'équation (10.3).
1. On suppose ici que $f([a,b]) \subset [a,b]$. En particulier, $f(a) \geqslant a$ et $f(b) \leqslant b$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} h(a) &= f(a) - a \geqslant 0 \\ h(b) &= f(b) - b \leqslant 0 \end{aligned}$$

D'où $h(a) \times h(b) \leqslant 0$, ce qui prouve que h change de signe.
2. On suppose ici que $[a,b] \subset f([a,b])$. Comme f est continue sur le segment $[a,b]$ le **théorème 10.15** montre l'existence d'un couple de réels $(c,d) \in [a,b]^2$ tels que $f([a,b]) = [f(c), f(d)]$. L'hypothèse que $[a,b] \subset f([a,b])$ se traduit en ce cas par les chaînes d'inégalités

$$f(c) \leqslant a \leqslant c, d \leqslant b \leqslant f(d)$$

En particulier,

$$\begin{aligned} h(c) &= f(c) - c \leqslant 0 \\ h(d) &= f(d) - d \geqslant 0 \end{aligned}$$

D'où $h(c) \times h(d) \leqslant 0$, ce qui prouve que h change de signe.
Bilan : dans tous les cas, on a bien établi que h change de signe entre a et b. Par le **corollaire 10.14**, il s'ensuit que l'équation (10.3) admet au moins une solution. ▲

Exercice 10.13

Soit $f : [0,1[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\forall x \in [0,1[,\ f(x) = x \sin\left(\frac{1}{1-x}\right)$.
1. Soit $n \in \mathbb{N}$, posons $x_n = 1 - \dfrac{2}{(4n+1)\pi}$ et $y_n = 1 - \dfrac{2}{(4n+3)\pi}$. Par définition de f, on a $f(x_n) = x_n \sin(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) = x_n$, et $f(y_n) = y_n \sin(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi) = -y_n$.
2. On observe que f est continue sur l'intervalle $[0,1[$. D'après le **théorème 10.13** on sait que $f([0,1[)$ est donc un intervalle.

- Pour tout $x \in [0,1[$, on a de plus

$$|f(x)| = \left| x \sin\left(\frac{1}{1-x}\right) \right| \leqslant |x| < 1.$$

Par conséquent,

$$f([0,1[) \subset]-1,1[$$

- Inversement, soit $t \in]-1,1[$, montrons que $t \in f([0,1[)$. Pour cela on observe que

$$f(x_n) = x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 \text{ et } f(y_n) = -y_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} -1$$

Par compatibilité limite et inégalités, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que t soit compris entre $-y_n$ et x_n. Autrement dit, t est une valeur intermédiaire entre $f(x_n)$ et $f(y_n)$. D'après le **théorème des valeurs intermédiaires**, t est une valeur de la fonction f, c'est-à-dire $t \in f([0,1[)$. Ceci étant vrai pour tout $t \in]-1,1[$, nous avons établi

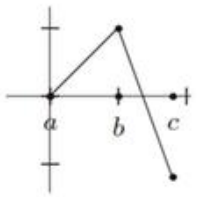
$$]-1,1[\subset f([0,1[)$$

• Ainsi, par double-inclusion, nous avons démontré que $f([0,1[) =]-1,1[$. ▲

Exercice 10.14

Par l'absurde : supposons *au contraire* que f est continue, injective mais pas strictement monotone. En ce cas, il existe un triplet $(a,b,c) \in I^3$ tel que a,b,c sont strictement rangés par ordre croissant, tandis que leurs images par f (deux à deux distinctes puisque f est injective) ne sont rangées ni par ordre croissant, ni par ordre décroissant. Ainsi, deux cas se présentent :

Un petit schéma pour mieux visualiser :



- soit $f(b) > \max\{f(a), f(c)\}$;
- soit $f(b) < \min\{f(a), f(c)\}$.

Supposons sans perte de généralité que $f(b) > \max\{f(a), f(c)\}$, le deuxième cas étant tout à fait semblable. En ce cas, fixons $y \in \mathbb{R}$ tel que

$$\max\{f(a), f(c)\} < y < f(b).$$

On applique alors le **théorème des valeurs intermédiaires** entre a et b d'une part et entre b et c d'autre part.

• Comme $f(a) < y < f(b)$, y est une valeur intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$. D'après le **théorème 10.12** appliqué entre a et b, il existe $x_1 \in]a,b[$ tel que $f(x_1) = y$.

• Comme $f(c) < y < f(b)$, y est une valeur intermédiaire entre $f(b)$ et $f(c)$. D'après le **théorème 10.12** appliqué entre b et c cette fois, il existe $x_2 \in]b,c[$ tel que $f(x_2) = y$.

Ainsi, $f(x_1) = f(x_2)$ et pourtant $x_1 \neq x_2$ puisque $x_1 < b$ et $x_2 > b$, ce qui *contredit* l'injectivité de f. ▲

Exercice 10.15

Remarquons tout d'abord qu'en appliquant l'hypothèse à $\frac{x}{2}$ plutôt qu'à x, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f\left(\frac{x}{2}\right) = f(x) \tag{10.4}$$

Récurrence immédiate.

À présent considérons $x \in \mathbb{R}$ fixé. D'après (10.4), on sait que $f(x) = f(x/2)$. Une utilisation répétée de (10.4) donne alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(x)$$

Notons pour alléger $x_n = \frac{x}{2^n}$. Par OPA, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est convergente vers 0. D'après la **caractérisation séquentielle de la continuité** de f en 0, (**théorème 10.3**), la suite $(f(x_n)$, constante à $f(x)$ d'après ce qui précède, est convergente de limite $f(0)$. Par **unicité de la limite**, il s'ensuit que $f(x) = f(0)$. ▲

Exercice 10.16

1. Pour déterminer l'ensemble des solutions de cette équation fonctionnelle, raisonnons par **analyse-synthèse** :

■ **Analyse :** soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction continue vérifiant

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y). \tag{10.5}$$

Suivant l'indication, nous allons procéder par étapes en déterminant successivement f sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$. Enfin, nous déterminerons f sur $\mathbb{R}$ en utilisant la continuité de f et la densité des rationnels.

- **Image des entiers naturels**

Remarquons tout d'abord que (10.5) entraîne que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n\,x) = n\,f(x) \tag{10.6}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé, montrons (10.6) par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : lorsque $n = 0$, il s'agit de vérifier que $f(0) = 0$. Ceci résulte aisément de (10.5) appliquée au couple $(0, 0)$! Il vient en effet $f(0 + 0) = f(0) + f(0)$, d'où l'on tire $f(0) = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $f(n\,x) = n\,f(x)$. Alors d'après (10.5)

$$f\big((n+1)x\big) = f\big(nx + x\big) = f(nx) + f(x)$$

Par hypothèse de récurrence, il s'ensuit que $f\big((n+1)x\big) = (n+1)\,f(x)$.

Conclusion : par récurrence, (10.6) est établie. En particulier, en notant $a = f(1)$, on obtient que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n) = n\,a$$

- **Image des entiers relatifs**

On observe tout d'abord que (10.5), entraîne que f est impaire. En effet, pout tout réel $x \in \mathbb{R}$, on a $0 = f(x - x) = f(x) + f(-x)$ soit $f(-x) = -f(x)$.
En particulier, si $n \in \mathbb{Z}^-$ est un entier négatif. Son image par f est l'opposée de celle de sa valeur absolue ! Autrement dit, en utilisant le résultat de la première étape $f(n) = f(-|n|) = -f(|n|) = -(|n|\,a) = n\,a$. Finalement

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad f(n) = n\,a$$

- **Image des rationnels**

Soit $r = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, avec $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^\star$. Pour calculer $f(r)$, on calcule d'abord $f(qr)$:
Comme $qr = p$ est entier relatif, on a d'une part $f(qr) = p\,a$. D'autre part, comme $q \in \mathbb{N}^\star$ est entier, on sait d'après (10.6) que $f(qr) = q\,f(r)$. Ainsi, $f(r) = f(qr)/q = (p/q)\,a$. En conclusion de cette troisième étape, nous avons prouvé que

$$\forall r \in \mathbb{Q}, \quad f(r) = r\,a$$

- **Image des réels**

C'est pour cette dernière étape seulement que nous utilisons la continuité de f conjointement à la densité des rationnels :
Soit $x \in \mathbb{R}$ un réel quelconque. D'après la **caractérisation séquentielle de la densité** de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ de rationnels convergeant vers x. On a alors

- d'après l'étape précédente, $\big(f(r_n)\big) = (a\,r_n)$ est convergente de limite ax ;
- d'autre part, par continuité de f, $\big(f(r_n)\big)$ est convergente de limite $f(x)$.

Par unicité de la limite, on peut donc en conclure que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = ax$$

Bilan : il existe donc $a \in \mathbb{R}$ tel que f est la fonction $x \mapsto ax$.

■ **Synthèse :** réciproquement, il est clair que pour tout réel a, la fonction $x \mapsto ax$ est continue sur $\mathbb{R}$ et vérifie (10.5).

■ **Conclusion :** les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant (10.5) sont les fonctions linéaires, i.e. de la forme $x \mapsto ax$, où $a \in \mathbb{R}$.

2. Pour déterminer l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + y) = f(x) \times f(y), \tag{10.7}$$

nous allons procéder par **analyse-synthèse** :

■ **Analyse :** soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant (10.7).
Discutons suivant la valeur de $f(0)$. D'après (10.7), on a $f(0) = f(0)^2$. Deux cas se présentent :

▸ si $f(0) = 0$. En ce cas, d'après (10.7) f est constante, égale à 0.

▸ si $f(0) = 1$. En ce cas, soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. D'après (10.7), $f(x) = \big[f(x/2)\big]^2$ de sorte que $f(x)$ est nécessairement positif ou nul.
Montrons par l'absurde que $f(x)$ ne peut être nul. Supposons au contraire que $f(x) = 0$. En ce cas, on a $0 = f(x) = f\big(\frac{x}{2}\big) = f\big(\frac{x}{4}\big) = \cdots$. Par itération, il s'ensuit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f\big(\frac{x}{2^n}\big) = 0$$

Or la suite $(x/2^n)$ étant convergente vers 0, la suite $\big(f\big(\frac{x}{2^n}\big)\big)$ est nécessairement convergente vers $f(0)$ par continuité de f. Ainsi, par **unicité de la limite**, il vient

$$0 = f(0)$$

ce qui est *absurde*, vu que $f(0) = 1$.
Ainsi, nous avons établi que

$$f(0) = 1 \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$$

En ce cas, introduisons la fonction auxiliaire $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \ln\big(f(x)\big)$. Comme f est à valeurs strictement positives, g est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$. De plus, comme f vérifie (10.7), il en résulte que g vérifie

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x + y) = g(x) + g(y)$$

D'après la question **1.**, il existe donc $a \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = ax$, d'où il vient que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \exp(ax)$$

Bilan : si f est une fonction continue vérifiant (10.7), alors f est la fonction nulle ou une fonction exponentielle.

■ **Synthèse :** réciproquement, ces fonctions sont clairement solutions du problème posé, en conséquence, les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) \times f(y)$ sont les exponentielles et la fonction nulle. ▲

Chapitre 11
Dérivabilité

UN MATHÉMATICIEN

Pierre de Fermat est un juriste passionné de mathématiques. Sa célébrité lui vient du théorème affirmant que l'équation $a^n + b^n = c^n$ n'a pas de solutions entières pour $n \geq 3$ avec a, b, c strictement positifs, dont la démonstration n'a été achevée qu'en 1994. Ceci masque les autres apports de Fermat dans le domaine du calcul des probabilités et sa méthode de recherche de la tangente à une courbe qui a ouvert la voie au calcul différentiel.

Un peu d'histoire

Plusieurs mathématiciens, parmi lesquels Pierre de Fermat, ont cherché à définir la pente de la tangente à une courbe en un point. Il faut cependant attendre Newton pour donner une bonne définition en introduisant ce que nous appelons de nos jours la dérivée. Inspiré par une approche cinématique, bien qu'il se rende compte que sa théorie est plus générale, il l'appelle *fluxion*. Son travail, terminé en 1666, ne sera publié qu'en 1687. Entre-temps, Leibniz introduit, de manière un peu différente, le même concept. S'est-il inspiré des idées de Newton ? On ne le sait pas. Une querelle s'élèvera entre les deux hommes sur la primauté de cette découverte.

Objectifs

les incontournables

- Étudier la dérivabilité et calculer la dérivée d'une fonction :
  - en un point en déterminant le nombre dérivé ;
  - sur un intervalle.
- Connaître et utiliser les théorèmes de Rolle, des accroissements finis.
- Montrer qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^1$:
  - directement avec les opérations ;
  - en utilisant le théorème de prolongement de la continuité de la dérivée ;
  - en utilisant les théorèmes fondamentaux.
- Montrer qu'une fonction est $\mathcal{C}^k$, $\mathcal{C}^\infty$ et le cas échéant :
  - calculer les dérivées successives d'une fonction ;
  - utiliser la formule de Leibniz.
- Obtenir des inégalités en appliquant le théorème des accroissements finis.

Résumé de cours

Dérivabilité

Dérivabilité en un point

Dans tout ce paragraphe, $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction définie dans un intervalle I contenant a.

Définition : *On note pour $x \in I \setminus \{a\}$, $\varphi_a(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$. On dit que f **est dérivable en** a lorsque le rapport $\varphi_a(x)$ admet une limite finie quand x tend vers a. En ce cas, on appelle **nombre dérivé de** f **en** a cette limite et on la note $f'(a)$. Ainsi, lorsque f est dérivable en a*

$$f'(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ \neq}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ \neq}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Théorème 11.1.— Développement limité à l'ordre 1 des fonctions dérivables

$$\boxed{f \text{ est dérivable en } a \text{ ssi il existe } d \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(a+h) = f(a) + d \cdot h + h\,\varepsilon(h)}$$

où $\lim\limits_{h \mapsto 0} \varepsilon(h) = 0$. En ce cas, $f'(a) = d$.

Théorème 11.2.— Lien fondamental avec la continuité

$$\boxed{\textbf{Si } f \text{ est dérivable en } a, \textbf{ alors } f \text{ est continue en } a.}$$

Proposition 11.3.— Si f est dérivable en a la courbe représentative de f admet une tangente au point d'abscisse a. C'est la droite d'équation $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.

Définition : *f est **dérivable à droite** (resp. **à gauche**) en a si le rapport $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ défini pour $x \neq a$ admet une limite finie **à droite** (resp. **à gauche**) en a. Cette limite s'appelle **nombre dérivé à droite** (resp. **nombre dérivé à gauche**) de f en a et se note $f'_d(a)$ (resp.$f'_g(a)$).*

Proposition 11.4.— Si $a \in \overset{\circ}{I}$ est un point intérieur de I, alors

$$\boxed{f \text{ est dérivable en } a \text{ ssi } f \text{ est dérivable à droite et à gauche en } a \text{ et si } f'_d(a) = f'_g(a).}$$

Dérivabilité sur un intervalle

Définition : *On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est **dérivable sur** I si f est dérivable en tout point de I. En ce cas, la fonction qui à tout élément $x \in I$ associe le nombre dérivée de f en x est appelée **fonction dérivée** de f sur I. On note f' cette fonction :*

$$\begin{array}{rccc} f' : & I & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f'(x) \end{array}$$

Théorème 11.5.— Limite de la dérivée —. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I, dérivable dans $I \setminus \{a\}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

- **Si** $\lim\limits_{x \overset{\neq}{\to} a} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$, **alors** f est dérivable en a et $f'(a) = \lim\limits_{x \overset{\neq}{\to} a} f'(x) = \ell$.
- **Si** $\lim\limits_{x \overset{\neq}{\to} a} f'(x) = \pm\infty$, **alors** f n'est pas dérivable en a et $\lim\limits_{x \overset{\neq}{\to} a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \pm\infty$.

Opérations sur les fonctions dérivées

Dans ce paragraphe, les fonctions considérées sont dérivables sur leurs intervalles de définitions respectifs, mais les résultats subsistent lorsqu'elles sont simplement supposées dérivables en un point $x \in I$.

Proposition 11.6.— Opérations algébriques sur les fonctions dérivables —. Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ des fonctions, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On suppose que f et g sont dérivables sur I. Alors

- $\lambda \cdot f + \mu \cdot g$ est dérivable sur I et $\forall x \in I,\ (\lambda \cdot f + \mu \cdot g)'(x) = \lambda \cdot f'(x) + \mu \cdot g'(x)$.
- $f \times g$ est dérivable sur I et $\forall x \in I,\ (f \times g)'(x) = f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x)$.
- Si g ne s'annule pas sur I, $\dfrac{f}{g}$ est dérivable et $\forall x \in I,\ \left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$.

Théorème 11.7.— Règle de dérivation en chaîne —. Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{R}$ des fonctions telles que $f(I) \subset J$. Si f est dérivable sur I et g est dérivable sur J alors $g \circ f$ est dérivable sur I et :

$$\boxed{(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)}$$

Théorème 11.8.— Dérivabilité de la réciproque d'une bijection dérivable—. Soit $f : I \to J$ une bijection dérivable sur I. Si f' ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est dérivable sur J et :

$$\boxed{\forall x \in I,\ \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(x)}}$$

Théorèmes fondamentaux

Variations d'une fonction dérivable

Théorème 11.9.— Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I.

- f est constante sur I si et seulement si f' est nulle sur I : $\forall x \in I,\ f'(x) = 0$.
- f est croissante sur I si et seulement si f' est positive sur I : $\forall x \in I,\ f'(x) \geqslant 0$.
- f est décroissante sur I si et seulement si f' est négative sur I : $\forall x \in I,\ f'(x) \leqslant 0$.

Corollaire 11.10.— Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle non trivial I.

- f est strictement croissante sur I *ssi* f' est positive et ne s'annule sur aucun sous-intervalle non trivial de I.
- f est strictement décroissante sur I *ssi* f' est négative et ne s'annule sur aucun sous-intervalle non trivial de I.

Extremums locaux d'une fonction dérivable

Proposition 11.11.— Extremum local d'une fonction dérivable —. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I, et $a \in \mathring{I}$ un point **intérieur** à I.

$$\boxed{\textbf{Si } f \text{ présente un extremum local en } a, \textbf{ alors } f'(a) = 0.}$$

Remarque : la réciproque de la proposition précédente est fausse.

Théorèmes de Rolle et des accroissements finis

Dans ce paragraphe, a et b désignent deux réels tels que $a < b$.

Théorème 11.12.— Théorème de Rolle —. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable dans $]a, b[$.

$$\boxed{\textbf{Si } f(a) = f(b), \textbf{ alors il existe } c \in]a, b[\text{ tel que } f'(c) = 0.}$$

Théorème 11.13.— Égalité des accroissements finis —. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable dans $]a, b[$.

$$\boxed{\text{Il existe } c \in]a, b[\text{ tel que } \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).}$$

Théorème 11.14.— Inégalité des accroissements finis —. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable dans $]a, b[$. On suppose qu'il existe $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in]a, b[$, on a $m \leqslant f'(x) \leqslant M$. Alors :

$$\boxed{m(b - a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b - a)}$$

Corollaire 11.15.— Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable dans un intervalle non trivial I. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ un réel positif tel que $\forall t \in I, \quad |f'(t)| \leqslant k$. Alors

$$\boxed{\forall (x, y) \in I^2, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|}$$

Définition : *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, $k \in \mathbb{R}^+$. On dit que f est* ***lipschitzienne de constante*** *k, ou plus simplement k-lipschitzienne sur I si $\forall (x, y) \in I^2$, $|f(x) - f(y)| \leqslant k\,|x - y|$.*

■ Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Définition : *Soit $f : I \to \mathbb{R}$, on définit par récurrence les fonctions* ***dérivées d'ordre 0,1,2,3,...*** *de f lorsqu'elles existent par $f^{(0)} = f$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, si $f^{(n)}$ existe et est dérivable dans I, on pose $f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$. On dit que f est n* ***fois dérivable*** *si f admet une dérivée n-ième.Lorsque f admet des dérivées de tout ordre sur I, on dit que f est* ***indéfiniment dérivable.***

Définition : *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On dit que*

- *f* ***est de classe*** *$\mathcal{C}^n$ sur I lorsque f est n fois dérivable sur I et $f^{(n)}$ est continue sur I ;*
- *f* ***est de classe*** *$\mathcal{C}^\infty$ sur I lorsque f est indéfiniment dérivable sur I.*

Théorème 11.16.— Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle —.

- Une combinaison linéaire de fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I est également de classe $\mathcal{C}^n$.
- Le produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I est de classe $\mathcal{C}^n$.
- Le quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I est de classe $\mathcal{C}^n$, pourvu que le dénominateur ne s'annule pas.
- La composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I est de classe $\mathcal{C}^n$.
- L'application réciproque d'une bijection $f : I \to J$, de classe $\mathcal{C}^n$ est de classe $\mathcal{C}^n$, pourvu que f' ne s'annule pas dans I.

Théorème 11.17.— Formule de Leibniz —. Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^n$ sur I alors $f \times g$ aussi et,

$$\boxed{(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n-k)}}$$

■ Convexité

Définition : *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que f est* ***convexe*** *sur I si $\forall (x, y) \in I^2$, $\forall \lambda \in [0, 1]$, $f\big((1-\lambda)x + \lambda y\big) \leqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$.*

Interprétation : f est convexe si tout arc de courbe de $\mathcal{C}_f$ est situé sous la corde de mêmes extrémités. Cette inégalité porte le nom d'**inégalité des cordes**.

Théorème 11.18.— Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe de classe $\mathcal{C}^1$. Alors

$$\boxed{\forall (a, x) \in I^2, \qquad f(x) \geqslant f(a) + f'(a)(x - a)}$$

Interprétation : le graphe d'une fonction convexe de classe $\mathcal{C}^1$ est situé au-dessus de ses tangentes. Cette inégalité porte le nom d'**inégalité des tangentes**.

Théorème 11.19.— Caractérisation —. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Alors

$$\boxed{f \text{ est convexe sur } I \text{ si et seulement si } \ f'' : I \to \mathbb{R} \text{ est positive sur } I}$$

■ Extension aux fonctions à valeurs complexes

Dérivabilité d'une fonction à valeurs complexes

Définition : *Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs complexes. Il existe des fonctions réelles $u, v : I \to \mathbb{R}$ telles que $\forall x \in I,\ f(x) = u(x) + iv(x)$. Les fonctions u et v sont les* ***parties réelle*** *et* ***imaginaire*** *de f. On les note $u = \mathfrak{Re}\, f$, $v = \mathfrak{Im}\, f$.*

Définition : *Soit $f : I \to \mathbb{C}$. On dit que f est* ***dérivable en*** *a si $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie (complexe) quand x tend vers a. Lorsque cette limite existe, on l'appelle* ***nombre dérivé*** *de f en a. On le note $f'(a)$ ou aussi $D(f)(a)$.*

Théorème 11.20.— Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes.
On note $u = \mathfrak{Re}\, f$, $v = \mathfrak{Im}\, f$ de sorte que $\forall x \in I, f(x) = u(x) + iv(x)$.

- f est dérivable en $a \in I$ ssi u et v sont dérivables en a et dans ce cas $f'(a) = u'(a) + iv'(a)$.
- f est dérivable sur I ssi u et v sont dérivables sur I et dans ce cas $f' = u' + iv'$.

Inégalité des accroissements finis

Proposition 11.21.— Inégalité des accroissements finis —. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur un segment $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. On suppose de plus qu'il existe $k \in \mathbb{R}^+$, tel que $\forall t \in]a, b[,\ |f'(t)| \leqslant k$. Alors :

$$\left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right| \leqslant k$$

Méthodes

Étude de la dérivabilité

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}$. On cherche à étudier la dérivabilité de f.

▸ Si f est une fonction usuelle, la question ne se pose pas puisqu'on connaît parfaitement les dérivées des fonctions usuelles (voir tableau des dérivées des fonctions usuelles) !

▸ Dans le cas général, pour étudier la dérivabilité de f et déterminer sa fonction dérivée, deux étapes peuvent être nécessaires :

1 La fonction f est la plupart du temps définie à partir de fonctions usuelles, par opérations algébriques ou par composition. La **méthode 11.5**permettra de déterminer le domaine et l'expression de f'.

2 Certains points de $\mathcal{D}$ nécessitent parfois une étude particulière. On suivra alors la **méthode 11.4**, **méthode 11.2** ou **méthode 11.3**.

Méthode 11.1.— Tableau des dérivées des fonctions usuelles

Fonction	Expression de la dérivée	Intervalle
$x \mapsto \exp(x)$	$\exp'(x) = e^x$	$x \in \mathbb{R}$
$x \mapsto \ln(x)$	$\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$	$x \in \mathbb{R}^{+\star}$
$x \mapsto p_\alpha(x) = x^\alpha$	$p'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$	$x \in]0, +\infty[$
$x \mapsto \sin(x)$	$\sin'(x) = \cos(x)$	$x \in \mathbb{R}$
$x \mapsto \cos(x)$	$\cos'(x) = -\sin(x)$	$x \in \mathbb{R}$
$x \mapsto \tan(x)$	$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$x \in \mathcal{D}_{\tan}$
$x \mapsto \mathrm{ch}\,(x)$	$\mathrm{ch}\,'(x) = \mathrm{sh}\,(x)$	$x \in \mathbb{R}$
$x \mapsto \mathrm{sh}\,(x)$	$\mathrm{sh}\,'(x) = \mathrm{ch}\,(x)$	$x \in \mathbb{R}$
$x \mapsto \mathrm{Arcsin}\,(x)$	$\mathrm{Arcsin}\,'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in]-1, 1[$
$x \mapsto \mathrm{Arccos}\,(x)$	$\mathrm{Arccos}\,'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in]-1, 1[$
$x \mapsto \mathrm{Arctan}\,(x)$	$\mathrm{Arctan}\,'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$

Dans ce tableau, α désigne un réel quelconque.

Dérivabilité en un point

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie dans un ensemble I. L'étude de la dérivabilité de f en a est une question centrale du chapitre et plusieurs méthodes sont possibles, en utilisant la définition, un développement limité ou le **théorème de la limite de la dérivée**.

Méthode 11.2.— Comment étudier la dérivabilité de f en a par la définition

- On peut revenir à la définition et étudier la limite des taux de variations $\varphi_a(x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ lorsque x tend vers a ou la limite de $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ lorsque h tend vers 0. Si l'une de ces limites existe et est finie, elles sont toutes deux égales à $f'(a)$.
- Si au voisinage de a, la fonction f est définie à gauche et à droite de a par des expressions différentes, on étudiera la dérivabilité à gauche et à droite et on concluera à l'aide de la **proposition 11.4**.

Exemple : considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et avec $f(0) = 0$. Montrons que f est dérivable en 0 à l'aide des taux de variations.
Soit $x \in \mathbb{R}_+^\star$, on a

$$\varphi_0(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{x^2 \sin(\frac{1}{x})}{x} = x \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Ainsi, $|\varphi_0(x)| \leqslant |x| \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. Par comparaison, il s'ensuit que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$.

Mise en œuvre : exercice 11.1, exercice 11.4.

Méthode 11.3.— Comment étudier la dérivabilité de f en a avec un DL

1 On effectue (ou on écrit si l'énoncé le donne) tout simplement le développement limité à l'ordre 1 de f au point a : $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + (x-a)\varepsilon(x-a)$, où $\varepsilon(x-a) \xrightarrow[x\to a]{} 0$

2 On peut directement conclure que f est dérivable en a et $f'(a) = a_1$.

Exemple : soit $f : x \mapsto \cos(\sqrt{x})$, étudions la dérivabilité en 0. On montre (voir le chapitre sur les développements limités) qu'au voisinage de 0, $\cos(u) = 1 - \frac{1}{2}u^2 + u^2\varepsilon(u)$. Donc f admet un DL à l'ordre 1 en 0 qui est $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x + x\varepsilon(x)$. Ainsi, f est dérivable en 0 avec $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

Méthode 11.4.— Comment étudier la dérivabilité de f en a à l'aide d'une limite

On suppose ici que l'on déjà établi que f est continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$.

1 On détermine $\ell = \lim\limits_{x \overset{\neq}{\to} a} f'(x)$.

2 Le **théorème 11.5** permet de conclure :

- Si $\ell \in \mathbb{R}$ alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.
- Si $\ell = \pm\infty$, alors f n'est pas dérivable en a.

Exemple : considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{+\star}$ par $f(x) = x^3 \sin(1/x)$ et $f(0) = 0$. f est continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$ comme produit. Elle est également continue en 0 car $\lim\limits_{x\to 0^+} x^3 \sin(1/x) = 0$ par comparaison. De plus, f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ comme produit de telles fonctions et pour tout $x > 0$, $f'(x) = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$. Par comparaison, on montre que $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = 0$. Ainsi, f est dérivable en 0 et de plus $f'(0) = 0$.

❑ Méthode 11.5.— Comment étudier la dérivabilité de f sur un intervalle

Très souvent, f est construite par opérations à partir de fonctions usuelles :

- soit f est la combinaison linéaire, le produit ou quotient de fonctions dérivables ;
- soit f est la composée de fonctions dérivables ;
- soit f est la fonction réciproque d'une bijection dérivable.

Dans chaque cas, les théorèmes d'opérations permettent de conclure à la dérivabilité de f et donnent également une expression de f'.
Cependant, l'étude ponctuelle en des points isolés est nécessaire. On appliquera alors la **méthode 11.4**, **méthode 11.2** ou **méthode 11.3** pour compléter l'étude.

Exemple : montrons par exemple que $f : x \mapsto f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ est dérivable sur $I = [-1, 1]$.

Comme $1 + |x|$ ne s'annule jamais, $x \mapsto \dfrac{1}{1+|x|}$ est dérivable sur $[-1, 0[$ et sur $]0, 1]$. Il en est de même de f qui est un produit de fonctions dérivables sur $[-1, 0[$ et sur $]0, 1]$. Étudions la dérivabilité de f en 0. f est définie par des expressions différentes à gauche et à droite de 0 :

$$\forall x \in [-1, 0[,\ \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{1}{1-x} \text{ et } \forall x \in]0, 1],\ \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{1}{1+x}$$

La limite à gauche et à droite en 0 du rapport $\dfrac{f(x) - f(0)}{x}$ est la même et vaut 1. C'est $f'(0)$.

Mise en œuvre : exercice 11.2.

■ Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

❑ Méthode 11.6.— Comment montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I

- On peut montrer par une des méthodes précédentes que f est dérivable sur I puis, que cette dérivée $f' : I \to \mathbb{R}$ est continue sur I.
- Dans le cas où f présente une singularité en un point a,
  1. On vérifie que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \setminus \{a\}$ puis on calcule f' sur $I \setminus \{a\}$.
  2. On montre que $\lim\limits_{x \overset{\neq}{\to} a} f'(x)$ a une limite α finie.
  3. On conclut que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f'(a) = \alpha$.

Exemple : considérons $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{2x}$. Cette fonction est dérivable sur $]0, +\infty[$. On sait que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x}}$. Cette fonction est continue sur $]0, +\infty[$ car c'est le rapport de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$.

Mise en œuvre : exercice 11.3.

❑ **Méthode 11.7.— Comment déterminer la dérivée n-ième d'une fonction f**

- On détermine le plus souvent les dérivées successives par récurrence :
  1. On calcule les premières dérivées f', f'', $f^{(3)}, \ldots$
  2. On conjecture une expression de $f^{(n)}$ pour tout entier n.
  3. On démontre cette formule par récurrence en utilisant $f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$.
- Si f est le produit de 2 fonctions n fois dérivables, on utilise la **formule de Leibniz**.
- Si f est la combinaison linéaire de fonctions g_i, n fois dérivables, alors $f^{(n)}$ est la combinaison linéaire des $g_i^{(n)}$.

Exemple : soit $g : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ définie sur $I =]1, +\infty[$.

1. On calcule les premières dérivées de g. Pour tout réel $x \in I$, on a :

$$g'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} \qquad g^{(2)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \qquad g^{(3)}(x) = \frac{-6}{(1+x)^4}.$$

2. On conjecture que pour tout entier naturel n, on a :

$$\mathcal{P}(n) \qquad \forall x \in I,\ g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}.$$

3. On démontre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie par récurrence.

- **Initialisation :** Pour $n = 0$, on a pour tout $x \in I$, $\dfrac{(-1)^0 0!}{(1+x)^{0+1}} = \dfrac{1}{1+x} = g(x)$.
- **Hérédité :** Soit $n \geqslant 0$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vrai. Alors, pour tout $x \in I$, on a :

$$g^{(n+1)}(x) = \left(g^{(n)}\right)' = \left(\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}\right)' = (-1)^n n!\ \frac{-(n+1)}{(1+x)^{n+2}} = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(1+x)^{n+2}}$$

- **Conclusion :** Par récurrence, on a bien établi que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Mise en œuvre : exercice 11.6.

❑ **Méthode 11.8.— Comment montrer que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

- Lorsque f est construite directement par opérations sur des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$, le **théorème 11.16** permet de conclure.
- Pour démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, on peut :
  - soit établir que f admet des dérivées de tous ordres ;
  - soit démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout entier n.

  Dans les deux cas, on procède souvent par récurrence.

Mise en œuvre : exercice 11.7.

■ Convexité

La convexité d'une fonction est particulièrement utile pour obtenir des inégalités et comparer f avec des fonctions affines.

> ❑ **Méthode 11.9.— Comment montrer qu'une fonction est convexe**
> Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$. Pour démontrer que f est convexe, on met en œuvre la définition de convexité ou la caractérisation des fonctions convexes de classe $\mathcal{C}^2$.
>
> - Lorsque f est de classe $\mathcal{C}^2$, on vérifie que $f'' : I \to \mathbb{R}$ est positive, ou – ce qui revient au même – que $f' : I \to \mathbb{R}$ est croissante.
> - Sinon, on vérifie l'inégalité des cordes : soit $(x, y) \in I^2$ tel que $x < y$, $\lambda \in [0, 1]$. On montre que
> $$f\big((1-\lambda)x + \lambda y\big) \leqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

Remarque : pour montrer que f est concave, on applique ce qui précède à $-f$.

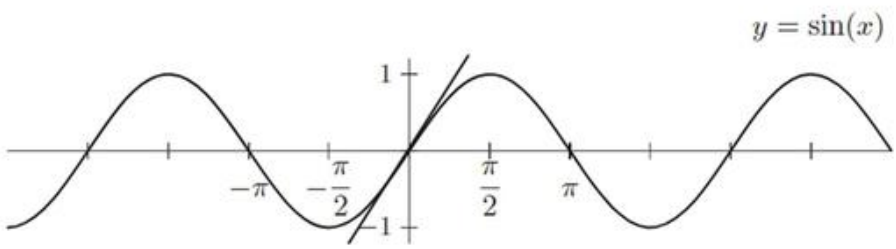
Exemples : comme les fonctions usuelles sont très régulières, on utilise la caractérisation par la dérivée seconde pour établir leur convexité.

Fonctions convexes	Fonctions concaves
$x \mapsto \exp(x)$	$x \mapsto \ln(x)$
$x \mapsto \mathrm{ch}\,(x)$	$x \mapsto \sqrt{x}$
$x \mapsto x^\alpha$ avec $\alpha \leqslant 0$ ou $\alpha \geqslant 1$	$x \mapsto x^\alpha$ avec $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$

Remarque : l'inégalité des cordes signifie simplement que le «creux» de la courbe de f est tourné vers le haut. Connaissant parfaitement les graphes des fonctions usuelles, c'est le moyen le plus rapide de retrouver la convexité des fonctions usuelles. Ainsi, la fonction sinus est :

- convexe sur $[-\pi, 0]$;
- concave sur $[0, \pi]$.

Illustration



Au point d'abscisse 0, la courbe représentative de la fonction sin «traverse» sa tangente. On dit que le point d'abscisse 0 est un **point d'inflexion** de la courbe.
Mise en œuvre : exercice 11.13 et **exercice 11.14**.

■ Applications à l'étude des fonctions

Les méthodes présentées ci-après complètent celles déjà exposées dans le **chapitre techniques fondamentales pour l'étude des fonctions**.

Étudier une limite

L'étude de la dérivabilité au point a d'une fonction continue en a se présente toujours comme une forme indéterminée « $\frac{0}{0}$ », puisque dans le taux de variation $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ numérateur et dénominateu tendent vers 0 quand x tend vers a. Inversement, on peut utiliser la définition du nombre dérivé pour étudier certaines limites.

> ❑ **Méthode 11.10.— Comment calculer une limite en un certain réel a**
>
> $\boxed{1}$ On remarque tout d'abord que cette limite revient à étudier la limite d'un rapport du type $\varphi_a(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ quand x tend vers a par valeurs différentes ou bien du type $\varphi_a(a+h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ quand h tend vers 0.
>
> $\boxed{2}$ On vérifie que la fonction f est dérivable en a et on utilise alors la définition de la dérivabilité au point a.

Exemples :

- Commençons par l'exemple le plus classique. La fonction sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc en 0 et sa dérivée en ce point est $\cos(0) = 1$. On a alors : $\lim\limits_{x \mapsto 0} \frac{\sin x - 0}{x} = 1$.
- On ne résiste pas à faire de même avec la fonction exp qui est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc au voisinage de 0. Sa dérivée est $\exp(0) = 1$. On a alors la limite : $\lim\limits_{x \mapsto 0} \frac{\exp x - 1}{x} = 1$.

On peut écrire au passage qu'au voisinage de 0, avec $\lim\limits_{x \to x} \varepsilon(x) = 0$:

$$\sin x = x + x\varepsilon(x), \exp x = 1 + x + x\varepsilon(x)$$

Étude des variations

C'est l'utilisation la plus commune de la dérivabilité d'une fonction. La **méthode 6.3** pour dresser le tableau des variations d'une fonction dérivable se trouve à la page 166. À partir du tableau des variations de f, on peut notamment :

- déterminer le signe de f (**méthode 6.6**) ;
- établir des inégalités (**méthode 6.7**) ;
- déterminer l'existence les extremums de la fonction f (**méthode 6.8**) .

Établir des inégalités entre fonctions

En complément de la **méthode 6.7**, les inégalités des accroissements finis ou les inégalités de convexité permettent d'obtenir rapidement des inégalités.

❑ **Méthode 11.11.— Comment obtenir un encadrement entre fonctions**

On souhaite établir un encadrement entre fonctions comme

$$\forall x \in I, \quad g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x), \text{ ou } \forall x \in I, \quad |f(x)| \leqslant g(x)$$

Il s'agit peut-être d'estimer l'**accroissement** d'une seule fonction. En ce cas :

$\boxed{1}$ On cherche à faire apparaître cet encadrement comme l'accroissement entre a et b de I d'une fonction φ. La difficulté consiste à bien choisir a et b qui peuvent éventuellement être fonction de x !

$\boxed{2}$ On vérifie que la fonction φ est continue sur $[a, b]$, dérivable dans $]a, b[$ et on encadre sa dérivée φ' :

$$\forall t \in]a, b[, \ m \leqslant \varphi'(t) \leqslant M$$

$\boxed{3}$ D'après les **inégalités des acroissements finis**, l'accroissement de φ entre a et b vérifie le même encadrement :

$$\forall t \in [a, b], \ m(b-a) \leqslant \varphi(b) - \varphi(a) \leqslant M(b-a)$$

Remarque : cette méthode s'applique également pour prouver qu'une fonction est lipschitzienne sur un intervalle puisqu'il s'agit d'obtenir un encadrement du type $|f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$.

Exemples :

- Montrons $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\sqrt{3}}{15} < \text{Arcsin}\,(0,6) < \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{1}{8}$. Remarquons que $\dfrac{\pi}{6} = \text{Arcsin}\,(0,5)$.
  La double inégalité à montrer peut s'écrire sous la forme :
  $\dfrac{\sqrt{3}}{15} < \text{Arcsin}\,(0,6) - \text{Arcsin}\,0,5 < \dfrac{1}{8}$ ce qui permet de penser à l'inégalité des accroissements finis, appliquée à $\varphi : x \mapsto \text{Arcsin}\ x$ sur $[1/2, 3/5]$. Comme la dérivée de φ est $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, la valeur minimale de cette dérivée sur $[1/2, 3/5]$ est atteinte en $1/2$ et la valeur maximale est atteinte en $3/5$. En multipliant ces valeurs par $0,6 - 0,5 = 0,1$, on a bien la double inégalité.
- Montrons que la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est lipschitzienne de rapport $1/2$ sur $[1, +\infty[$. La dérivée de f qui est $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ a pour maximum $1/2$ sur $[1, +\infty[$. Il suffit maintenant de remarquer :
  $\forall (x, y) \in ([1, +\infty[)^2, |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{2}(|x - y|)$.

Mise en œuvre : exercice 11.17, **exercice 11.11** et **exercice 11.15**.

❑ **Méthode 11.12.— Comment comparer une fonction avec une fonction affine**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe sur I.

- Pour majorer f par une fonction affine φ, on peut utiliser l'inégalité des tangentes. Il s'agit alors de trouver $a \in I$ tel que $\varphi(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$.
- Pour minorer f par une fonction affine, on peut utiliser l'inégalité des cordes entre a et b. Là encore, la difficulté consiste à choisir astucieusement a et b qui peuvent éventuellement être fonction de x !

Exemple : montrons que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\frac{2}{\pi} \leqslant \sin(x) \leqslant x$. Pour cela, observons d'entrée de jeu que la fonction $\sin_| : [0, \frac{\pi}{2}]$ est concave sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$.

- De plus, l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0 est $y = x$. D'après l'**inégalité des tangentes** pour la fonction concave $\sin_|$, il vient $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin(x) \leqslant x$.
- La corde qui joint les points d'abscisses 0 et $\frac{\pi}{2}$ a pour équation cartésienne $y = \frac{2}{\pi}x$. D'après l'**inégalité des cordes** pour la fonction concave $\sin_|$, il vient $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin(x) \geqslant \frac{\pi}{2}x$.

Mise en œuvre : exercice 11.14 et **exercice 11.15**.

Établir un résultat existentiel

❑ Méthode 11.13.— Comment prouver que f' s'annule

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On cherche à démontrer l'existence d'un réel $c \in I$ tel que $f'(c) = 0$. Pour cela, plusieurs pistes sont envisageables :

- On peut utiliser le **théorème de Rolle** sur un segment $[a, b]$ lorsque les hypothèses suivantes sont vérifiées : f est continue sur $[a, b]$, dérivable dans $]a, b[$ et $f(a) = f(b)$.
- On peut également raisonner par l'absurde en supposant que f' ne s'annule pas.
- On peut vérifier que f possède un extremum en un point intérieur à I et utiliser la condition nécessaire d'extrêmalité.

Mise en œuvre : exercice 11.18.

Plus généralement, on peut chercher à démontrer l'existence d'un réel c qui vérifie une certaine identité (E), mettant en jeu une ou plusieurs fonctions dérivées. Pour cela, les théorèmes existentiels que sont **le théorème de Rolle** et l'**égalité des accroissements finis** peuvent être utilisés ; surtout si dans les hypothèses la fonction (ou les fonctions) utilisée(s) est (sont) continue(s) sur un intervalle fermé $[a, b]$ et dérivable(s) dans l'intervalle ouvert $]a, b[$.

❑ Méthode 11.14.— Comment prouver l'existence d'un réel c vérifiant (E)

On peut penser

- à utiliser directement le **théorème de Rolle**.

  $\boxed{1}$ On montre que (E) est équivalente à l'existence d'un réel c tel que $h'(c) = 0$, où h est une fonction donnée dans l'énoncé ou construite par opérations algébriques.

  $\boxed{2}$ On vérifie que la fonction h est continue sur un segment $[a, b]$, dérivable dans $]a, b[$ et que $h(a) = h(b)$

  $\boxed{3}$ D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $h'(c) = 0$.
- à utiliser plus généralement l'**Égalité des accroissements finis** en choisissant astucieusement la fonction h et les réels a et b.

Mise en œuvre : exercice 11.8, **exercice 11.9**, **exercice 11.10**.

■ Applications à l'étude des suites récurrentes

L'utilisation des inégalités des accroissements finis permet de compléter l'étude des suites récurrentes $u_{n+1} = f((u_n)$ déjà initiée au **chapitre Suites numériques**, au travers notamment de la **méthode 9.7** (cf page 267).

❑ **Méthode 11.15.— Comment montrer la convergence d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$**

$\boxed{1}$ On montre que $f : I \to \mathbb{R}$ est lipschitzienne de rapport $k \in [0, 1[$ sur I (en montrant que $\forall x \in I$, $|f'(x)| \leqslant k$).

$\boxed{2}$ On vérifie que I est stable par f, *i.e.* $f(I) \subset I$.

$\boxed{3}$ On vérifie qu'il existe un unique $\ell \in I$ tel que $f(\ell) = \ell$.

$\boxed{4}$ On peut en déduire que la suite (u_n) tend vers ℓ. En effet, une récurrence montre que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \ell| \leqslant k^n |u_0 - \ell|$$

Comme $k^n|u_0 - \ell| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, la suite (u_n) converge vers ℓ par comparaison.

Mise en œuvre : exercice 11.12.

Vrai/Faux

	Vrai	Faux
1. Soit f dérivable sur I et soit $a \in I$ tel que $f(a) \neq 0$, si f s'annule sur le voisinage choisi de a alors la formule de dérivation de $\frac{1}{f}$ ne peut pas s'appliquer et $\frac{1}{f}$ n'est pas dérivable en a.	☐	☐
2. Si f' ne possède pas de limite finie lorsque x tend vers $a \in I$ alors on peut affirmer que f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur I mais on ne peut rien dire concernant la dérivabilité de f en a.	☐	☐
3. Toute fonction dérivable à droite et à gauche en a est dérivable en ce point.	☐	☐
4. Si f est dérivable sur I et s'il existe $K > 0$ tel que pour tout $x \in I, \lvert f'(x) \rvert \leqslant k$, alors f est lipschitzienne de rapport k sur I.	☐	☐
5. Pour appliquer le théorème de Rolle sur $[a, b]$, il est nécessaire que $f(a) = f(b) = 0$.	☐	☐
6. Le théorème de Rolle entraîne qu'une fonction polynomiale de degré 3 change trois fois de signe.	☐	☐
7. Comme $f : x \mapsto \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2-x & \text{si} \quad 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$ est continue et dérivable sur $[0, 2]$ et comme $f(0) = f(2)$, on peut appliquer le théorème de Rolle et f' s'annule au moins une fois sur $]0, 2[$.	☐	☐
8. Si la dérivée d'une fonction s'annule en un point, cette fonction admet un extremum en ce point.	☐	☐
9. Une fonction peut avoir un extremum en un point sans que sa dérivée s'annule.	☐	☐
10. Le théorème de Rolle n'est pas valable sur $\mathcal{C}^\infty([a, b], \mathbb{C})$.	☐	☐

Énoncé des exercices

Dérivabilité en un point, sur un intervalle

Exercice 11.1 : À l'aide de la définition, calculer la dérivée de $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - x + 1}$ pour $x = 2$.

Exercice 11.2 : Rechercher le plus grand intervalle dans lequel $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 2x + 2}$ est dérivable. Déterminer f' sur cet intervalle.

Exercice 11.3 : Soit f telle que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = x^3 \sin(\frac{1}{x})$ et telle que $f(0) = 0$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.

Exercice 11.4 : Étudier la dérivabilité de $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (x - \lfloor x \rfloor)(x - \lfloor x \rfloor - 1)$.

Exercice 11.5 : Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(t) = t^2 e^{i/t}$ pour $t \neq 0$ et $f(0) = 0$.
1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f' n'est pas continue en 0.

Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ avec $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

Exercice 11.6 : Vérifier que f est indéfiniment dérivable et calculer ses dérivées successives dans les cas suivants :
1. $f(x) = x^2 e^{3x}$ **2.** $f(x) = e^{x \operatorname{ch} a} \operatorname{ch}(x \operatorname{sh} a)$ **3.** $f(x) = e^{\sqrt{3}x} \sin(x)$

où $a \in \mathbb{R}$ est un réel fixé.

Exercice 11.7 : Pour tout $t > 0$, on pose $f(t) = \exp\left(-\frac{1}{t}\right)$ et $g(t) = \dfrac{f(t)}{t}$.
1. Prouver que f et g sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $tf'(t) = g(t)$.
2. Montrer que g est prolongeable par continuité en 0 et que le prolongement (noté encore g) est dérivable en 0.
3. Faire le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}^+$ et le graphe sachant que $e^{-1} \approx 0.36$ à 10^{-2} près.

D'après Concours commun des écoles des Mines d'Albi, Alès, Douai, Nantes

Théorème de Rolle et des accroissements finis

Exercice 11.8 : On pose pour tout entier n non nul, $P_n(x) = (x^2 - 1)^n$. Montrer que $P_n^{(n)}$ admet n racines distinctes strictement comprises entre -1 et 1.

Exercice 11.9 : Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $[a, b]$ sur $\mathbb{R}$ telle que $f(a) = f(b) = 0$ et soit $c \in]a, b[$. Montrer qu'il existe $\gamma \in]a, b[$ tel que

$$f(c) = \frac{(c-a)(c-b)}{2} f''(\gamma)$$

Exercice 11.10* : Soit f une application de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$ et telle que

$$f(a) = f'(a),\ f(b) = f'(b)$$

Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f''(c) = f(c)$.

Exercice 11.11* : Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, Montrer que pour tout entier n, il existe n réels $(x_1, \ldots, x_n)$ tels que $0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < 1$ et $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f'(x_k) = 1$.

Exercice 11.12 : Étude d'une suite récurrente

Soit la fonction $f : x \mapsto 1 + \frac{1}{2}\sin(\frac{1}{x})$.

1. Montrer que pour tout $x \geqslant 1$: $\frac{1}{2} < f(x) < \frac{3}{2}$ et $f(f(x)) > 1$.

2. Montrer que sur $[1, +\infty[$, f est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne.

3. Montrer qu'il existe un unique $\ell > 1$ tel que $f(\ell) = \ell$.

4. Vérifier que la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $u_0 = a$, où $a \neq 0$, existe et montrer que pour tout $n > 2$, $u_n > 1$.

5. Montrer que la suite (u_n) est convergente de limite ℓ.

D'après CCINP PC Oral

■ Inégalités, convexité

Exercice 11.13 : Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions. On suppose que f est convexe et que g est convexe et croissante. Montrer que $g \circ f$ est convexe.

Exercice 11.14 : Soit $f :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = -\ln\big(\ln(x)\big)$.

1. Montrer que f est convexe.

2. En déduire que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, avec $a, b > 1$, on a

$$\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln(a)\,\ln(b)}$$

Exercice 11.15 : Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que

1. $\forall x \in]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[, \quad |\tan x| \geqslant |x|$.

2. $\forall x \in]-1, +\infty[, \quad \dfrac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

3. $\forall x \in [0, +\infty[, \quad e^x \geqslant 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$

4. $\forall x \in [0, +\infty[, \quad x^{n+1} - (n+1)x + n \geqslant 0$

Exercice 11.16 : Inégalité de Hölder —. Soit p et q deux nombres réels strictement positifs tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R}^{+\star}$. Montrer que

$$ab \leqslant \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

Exercice 11.17 : À la découverte de la constante d'Euler

Démontrer l'encadrement :

$$\forall k \in \mathbb{N}^\star, \frac{1}{k+1} \leqslant \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \leqslant \frac{1}{k}$$

En déduire un encadrement de la suite $S_n = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln n$. Montrer que (S_n) converge.

■ Miscellaneous

Exercice 11.18 : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, dérivable sur $[a,b]$. On suppose que $f'(b) < 0 < f'(a)$, montrer que f' s'annule sur $]a,b[$.

Exercice 11.19* : Soit f de I dans $\mathbb{R}$ dérivable et telle que a et b sont dans I avec $a < b$. On suppose de plus que f ne s'annule pas sur $]a,b[$ et que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que $f'(a)f'(b) \leqslant 0$.

■■ Indications

Ex. 11.1

On arrange la quantité $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$ *en utilisant ce que l'on appelle la quantité conjuguée.*

Ex. 11.4

On pourra utiliser le théorème de la limite de la dérivée aux points de $\mathbb{Z}$.

Ex. 11.5

On pourra décomposer en $(\mathfrak{Re}\,(f)) + i(\mathfrak{Im}\,(f))$.

Ex. 11.6

1. *Vous avez compris, il faut appeler Gottfried Leibniz à la rescousse !*
2. *Commencez par calculer les premières dérivées de* f.
3. *Le calcul des dérivées serait grandement simplifié en passant en complexes !*

Ex. 11.8

C'est une illustration de la première idée de la **méthode 11.14** *et en plus c'est un grand classique ! On commencera par remarquer que* P_n *est un polynôme de degré* $2n$ *qui admet* -1 *et* 1 *pour racines d'ordre* n. *Puis on appliquera le* **théorème de Rolle** *autant de fois qu'il le faut en procédant à une récurrence sur le nombre de racines.*

Ex. 11.9

Voilà une illustration de la deuxième piste de la **méthode 11.14**. *On pense bien entendu au théorème de Rolle (ou à celui des accroissements finis) par la forme de ce qu'on veut prouver : l'existence de* $\gamma \in]a,b[$. *C'est le choix de la fonction* h *qui permet de savoir si c'est ici plutôt le théorème de Rolle ou plutôt le théorème des accroissements finis que l'on doit utiliser. D'autre part, on a là une fonction de classe* $\mathcal{C}^2$ *ce qui implique que notre théorème risque d'être appliqué deux fois, la première à la fonction* h *et la seconde à sa dérivée. Partir de* $h : x \mapsto f(x) - \dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} f(c)$.

Ex. 11.10

On appliquera le théorème de Rolle à la fonction g *telle que* $g(x) = (f'(x) - f(x))\,e^x$. *Je sais, ce n'est pas évident à voir !*

Ex. 11.11

Eine kleine Anweisung : on pourra poser $I_k = \left[\dfrac{k}{n}, \dfrac{k+1}{n}\right]$, k *étant compris entre* 0 *et* $n-1$ *et on appliquera le théorème des accroissements finis à* f *sur chacun de ces intervalles.*

Ex. 11.12

1. *On commence par encadrer* $f(x)$ *et on minore* $f(f(x))$.
2. *On montre ici que* f *est lipschitzienne. Penser à l'***inégalité des accroissements finis**.

3. *On pose bien entendu* $g(x) = f(x) - x$ *et l'on montre que* g *s'annule une et une seule fois sur* $[1, +\infty[$. *Ne pas oublier de mentionner la continuité de* g *dans le raisonnement !*
4. *Il faut montrer d'abord l'existence de la suite* (u_n) *définie par* $u_{n+1} = f(u_n)$. *Or,* f *n'est pas définie sur* $\mathbb{R}$ *et il faut vérifier que toute valeur* u_n *est dans le domaine de définition de* f. *Pour cela, on montre que* $u_n > 1$ *à partir de* $n = 2$ *ce qui démontre à la fois l'existence de la suite et la deuxième partie de la question. Bien lire toute une question. Cela peut donner des idées !*
5. *On montre enfin la convergence de* (u_n) *en utilisant le fait que* f *est lipschitzienne de rapport compris entre* 0 *et* 1 *et un raisonnement classique (il faut majorer* $|u_k - \ell|$ *par un réel tendant vers* 0 *quand* k *tend vers* $+\infty$*). Faire attention aux indices. En effet, la propriété d'être lipschitzienne de* f *n'est valable que sur* $[1, +\infty[$ *et on sait que* u_n *n'est pas nécessairement à valeurs dans* $[1, +\infty[$.

Ex. 11.17

On appliquera le théorème des accroissements finis à $\ln$ *sur* $[k, k+1]$.

Ex. 11.18

Si f' *est continue, c'est immédiat ! Mais si elle ne l'est pas ? On montrera que la fonction* f *admet un maximun qui est atteint sur* $]a, b[$ *en une valeur* $x = c$.

Ex. 11.19

On supposera par exemple que f *ne prend que des valeurs positives sur* $]a, b[$ *puis on utilisera le taux d'accroissement de* f *entre* a *et* c *puis entre* c *et* b, *où* $c \in]a, b[$.

Corrigé des vrai/faux

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F	V	F	V	F	F	F	F	V	V

1. Comme f ne s'annule pas en a et est continue dans un voisinage de a, on peut toujours trouver un voisinage de a suffisamment petit sur lequel f ne s'annule pas et la formule est valable !
2. En effet, prendre $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 \sin(1/x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. On vérifie que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$, pourtant $f'(x) = 2x\sin(1/x) - \cos(x)$ n'a pas de limite en 0 et f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
3. Prendre $x \mapsto |x|$ qui possède une dérivée à droite et à gauche en 0.
6. Elle peut s'annuler une et une seule fois !
7. f n'est pas dérivable en 1.
8. Prendre par exemple $x \mapsto x^3$ comme contre-exemple.
9. On n'a pas précisé si la fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$. Prendre par exemple la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto x$. Son maximum est en 2 de dérivée non nulle.
10. Prendre $f(t) = e^{it}$ et $a = 0, b = 2\pi$. On a $f(a) = f(b)$ et $|f'(t)| = 1$.

Erreurs classiques

- Si une fonction est dérivable à gauche et à droite en a, il ne faut pas oublier que ces dérivées doivent être égales pour avoir l'existence de la dérivée en a.
- Bien que souvent, on ait $f(a) = f(b) = 0$, pour appliquer Rolle, il n'est pas nécessaire que cette valeur commune soit nulle.
- Faire attention à ce que toutes les hypothèses du théorème de Rolle ou des accroissements finis soient vraies avant de l'appliquer !
- Il n'y a pas d'équivalence entre la notion d'extremum et l'annulation de la dérivée première.
- Bien que cela puisse paraître surprenant, il existe des fonctions dont toutes les dérivées successives sont nulles en un point donné.
- Ne pas oublier que le meilleur moyen de vérifier qu'une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$ est dérivable, c'est de le démontrer pour la partie réelle et la partie imaginaire.
- Attention quand on transpose des résultats des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ à celles à valeurs dans $\mathbb{C}$. Tout n'est pas valable, en particulier dès qu'on fait appel à la notion d'ordre.

Corrigé des exercices

Exercice 11.1

Pour $x \neq 2$, explicitons l'accroissement, puis le taux d'accroissement de f entre x et 2. On a :

On multiplie numérateur et dénominateur par l'expression conjuguée.

$$\begin{aligned}
f(x) - f(2) &= \sqrt{x^2 - x + 1} - \sqrt{3} \\
&= \frac{\left(\sqrt{x^2 - x + 1} - \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{x^2 - x + 1} - \sqrt{3}\right)}{\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{3}.} \\
\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \frac{x^2 - x - 2}{\left(\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{3}\right)(x - 2)} \\
&= \frac{(x-2)(x+1)}{\left(\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{3}\right)(x - 2)} \\
&= \frac{x+1}{\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

Finalement, $f'(2) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. ▲

Exercice 11.2

On commence par le domaine de définition. Comme son discriminant est strictement négatif, $x^2+2x+2 > 0$ et f est définie sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto x^2+2x+2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$. Comme $x^2 + 2x + 2 > 0$, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$. ▲

Exercice 11.3

La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ car c'est le produit de deux fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ et on a :

$$\forall x \in]0, +\infty[\,,\ f'(x) = 3x^2 \sin\left(\tfrac{1}{x}\right) - x\cos\left(\tfrac{1}{x}\right)$$

Comme f' est continue sur $]0, +\infty[$ car c'est une somme de produits de fonctions continues sur cet intervalle, on en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. Il reste à étudier le cas du voisinage de 0. Comme

$$\lim_{x \to 0} 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$

f est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$. ▲

Exercice 11.4

Soit $n \in \mathbb{Z}$, on écrit : $\forall x \in [n, n+1[\,,\ g(x) = (x - n)(x - n + 1)$.
Donc g est polynomiale sur $]n, n+1[$ et donc dérivable sur cet intervalle.

$$\forall x \in]n, n+1[\,,\ g'(x) = 2x - (2n+1)$$

Il vient $\lim\limits_{x \to n^+} g'(x) = -1$ et par le théorème de la limite de la dérivée, on en déduit que g est dérivable à droite en n et que $g'_d(n) = -1$. De même,

$$\forall x \in]n-1, n[,\ g'(x) = 2x - (2n-1)$$

et il vient $\lim\limits_{x \to n^-} g'(x) = 1$ et toujours par le théorème de la limite de la dérivée, on en déduit que g est dérivable à gauche en n et que $g'_d(n) = 1$.
Comme $g'_d(n) \neq g'_g(n)$, g n'est pas dérivable en $n \in \mathbb{Z}$. ▲

Exercice 11.5

1. Pour tout $t \in \mathbb{R}^\star$, $f(t) = t^2 \cos\dfrac{1}{t} + it^2 \sin\dfrac{1}{t}$. Il est clair que $\mathfrak{Re}\,(f)$ et $\mathfrak{Im}\,(f)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}^\star$. Il en est de même de f. Comme on a les limites

$$\lim_{t \to 0} \frac{\mathfrak{Re}\,(f)(t) - \mathfrak{Re}\,(f)(0)}{t-0} = 0,\ \lim_{t \to 0} \frac{\mathfrak{Im}\,(f)(t) - \mathfrak{Im}\,(f)(0)}{t-0} = 0,$$

f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
2. Puis on en déduit la dérivée :

$$\forall t \in \mathbb{R}^\star,\ f'(t) = \left(2t\cos\frac{1}{t} + \sin\frac{1}{t}\right) + i\left(2t\sin\frac{1}{t} - \cos\frac{1}{t}\right)$$

Donc f' n'a pas de limite en 0. Elle n'est pas continue en 0. ▲

Exercice 11.6

1. f est un produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et donc f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Posons $g(x) = x^2$ et $h(x) = e^{3x}$, on a alors

$$g'(x) = 2x,\ g''(x) = 2 \text{ et } \forall n \geqslant 3,\ g^{(n)}(x) = 0$$

De même, $\forall n \in \mathbb{N}$, $h^{(n)}(x) = 3^n e^{3x}$. On utilise donc Leibniz :

$$\forall n \geqslant 2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} g^{(k)}(x) h^{(n-k)}(x)$$
$$= \binom{0}{n} g^{(0)}(x) h^{(n)}(x) + \binom{1}{n} g^{(1)}(x) h^{(n-1)}(x) + \binom{2}{n} g^{(2)}(x) h^{(n-2)}(x) + 0$$
$$= x^2 3^n e^{3x} + 2nx 3^{n-1} e^{3x} + 2\frac{n(n-1)}{2} 3^{n-2} e^{3x}$$

que le lecteur arrangera. On remarque que la relation reste valable pour $n = 0$ et pour $n = 1$.
2. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que f est n fois dérivable dans $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f^{(n)}(x) = e^{x\mathrm{ch}\,(a)}\,\mathrm{ch}\left(na + x\mathrm{sh}\,(a)\right)$$

- **Initialisation :** Lorsque $n = 0$, il n'y a rien à faire !!
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que f est n fois dérivable dans $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f^{(n)}(x) = e^{x\mathrm{ch}\,(a)}\,\mathrm{ch}\left(na + x\mathrm{sh}\,(a)\right)$. En ce cas, $f^{(n)}$ est dérivable comme composée de telles fonctions et

Lorsqu'on dérive $x \mapsto e^{x\mathrm{ch}\,(a)}$, le $\mathrm{ch}\,(a)$ tombe, mais il ne se fait pas mal, car un $\mathrm{ch}\,(a)$ retombe toujours sur ses pattes !

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= e^{x\mathrm{ch}\,(a)}\left[\mathrm{ch}\,(a)\mathrm{ch}\left(na + x\mathrm{sh}\,(a)\right) + \mathrm{sh}\,(a)\mathrm{sh}\left(na + x\mathrm{sh}\,(a)\right)\right] \\ &= e^{x\mathrm{ch}\,(a)}\mathrm{ch}\left(a + na + x\mathrm{sh}\,(a)\right) \\ &= e^{x\mathrm{ch}\,(a)}\mathrm{ch}\left((n+1)a + x\mathrm{sh}\,(a)\right) \end{aligned}$$

• **Conclusion :** Par récurrence, on a montré que f est indéfiniment dérivable dans $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f^{(n)}(x) = e^{x\mathrm{ch}\,(a)}\,\mathrm{ch}\,\big(na + x\mathrm{sh}\,(a)\big)$$

3. On peut remarquer que f est la partie imaginaire de la fonction à valeurs complexes

$$\tilde{f}(x) = e^{(\sqrt{3}+i)x}$$

La fonction $\tilde{f}$ est une exponentielle complexe, elle est indéfiniment dérivable et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\tilde{f}^{(n)}(x) &= (\sqrt{3}+i)^n e^{(\sqrt{3}+i)x} = \left(2e^{i\pi/6}\right)^n e^{(\sqrt{3}+i)x}\\ &= 2^n e^{in\frac{\pi}{6}} e^{(\sqrt{3}+i)x}\end{aligned}$$

On obtient finalement les dérivées successives de f en prenant les parties imaginaires, il en résulte que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = 2^n e^{\sqrt{3}x}\sin\big(x + n\frac{\pi}{6}\big).$$

▲

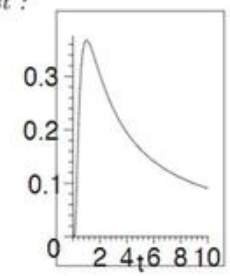
Exercice 11.7

1. Montrons que $f : x \mapsto e^{-1/x}$ et $g : x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$. Il suffit de dire que f est la composée de fonctions n fois dérivables pour tout n et que g est le produit de fonctions n fois dérivables pour tout n. D'après le cours, f et g sont bien de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$.

Par ailleurs, un calcul rapide donne bien pour tout $t > 0$, $tf'(t) = g(t)$.

2. Par **croissances comparées**, on a $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 0$, d'où un prolongement par continuité en posant $g(0) = 0$. Puis pour $x > 0$, encore par croissances comparées : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^2}\exp(-1/x) = 0$.
Donc g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$.

Le graphe de g est :



3. g est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et un calcul simple donne pour tout $t > 0$

$$g'(t) = (1-t)\frac{1}{t^3}\exp(-1/t)$$

On en déduit que g est croissante sur $[0,1]$ et décroissante sur $[1,+\infty[$. Les limites de g en 0^+ et en $+\infty$ sont nulles par croissances comparées. La valeur de $g(1)$ est e^{-1}. ▲

Exercice 11.8

Il est clair que P_n est un polynôme de degré $2n$ admettant -1 et 1 pour racines d'ordre de multiplicité $n \geqslant 1$. La dérivée $P_n'(x)$ est un polynôme de degré $2n-1$ qui admet au plus $2n-1$ zéros, -1 et 1 sont zéros de $P_n'(x)$ d'ordre $n-1$ (et cela même pour $n = 1$ puisqu'alors -1 et 1 ne sont pas zéros de P'). D'après le **théorème de Rolle**, il existe au moins $\alpha \in]-1,1[$ tel que $P_n'(\alpha) = 0$. On a ainsi comptabilisé au moins $2(n-1)+1 = 2n-1$ zéros pour P_n', donc exactement $2n-1$. Supposons que pour tout entier $p < n$, $P_n^{(p)}$ admette -1 et 1, d'ordre de multiplicité $n-p$ et p zéros distincts compris au sens strict entre -1 et 1. Le polynôme $P_n^{(p+1)}$ admet pour zéros -1 et 1,

d'ordre de multiplicité $n-p-1$ (même pour $p=n-1$) et comme $P_n^{(p)}$ admet $p+2$ zéros différents dans $[-1,1]$, d'après le théorème de Rolle appliqué sur les intervalles contigus ainsi définis, $P_n^{(p+1)}$ admet au moins $p+1$ zéros différents dans $]-1,1[$, donc exactement $p+1$.
En appliquant pour $p=n-1$, on en déduit que $P_n^{(n)}$ admet n zéros distincts compris strictement entre -1 et 1. ▲

Exercice 11.9

Inspiré par l'indication, notons h la fonction définie par

$$h(x) = f(x) - \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} f(c).$$

Comme somme de telles fonctions, h est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$ et donc en particulier continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Comme elle vérifie en outre $h(a) = h(b) = h(c) = 0$ le **théorème de Rolle** s'applique sur deux intervalles, $[a,c]$ et $[c,b]$. Il existe $\gamma_1 \in]a,c[$ tel que $h'(\gamma_1) = 0$ et il existe $\gamma_2 \in]c,b[$ tel que $h'(\gamma_2) = 0$. Comme h' est continue sur $[a,b]$, elle l'est donc sur $[\gamma_1, \gamma_2]$ et comme elle est dérivable sur $]a,b[$, elle l'est donc sur $]\gamma_1, \gamma_2[$. Enfin, $h'(\gamma_1) = h'(\gamma_2)$ et on peut encore appliquer le théorème de Rolle. Il reste à calculer

$$h'' : x \mapsto f''(x) - \frac{2f(c)}{(c-a)(c-b)}$$

Il existe donc $\gamma \in]a,b[$ tel que $f''(\gamma) - \dfrac{2f(c)}{(c-a)(c-b)} = 0$, relation que l'on peut écrire sous la forme

$$f(c) = \frac{(c-a)(c-b)}{2} f''(\gamma)$$

Finalement, on aura utilisé ici trois fois le théorème de Rolle ! Toute la difficulté vient du bon choix de la fonction h. Si vous savez qu'il faut utiliser le théorème de Rolle, c'est déjà un bon début ! ▲

Exercice 11.10

La fonction $g : x \mapsto (f'(x) - f(x))\, e^x$ est dérivable sur $[a,b]$ et de plus sur cet intervalle

$$g'(x) = (f''(x) - f(x))\, e^x$$

Il reste à remarquer que $g(a) = g(b) = 0$ pour appliquer le **théorème de Rolle** : il existe $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$ ce qui s'écrit $f''(c) = f(c)$. ▲

Exercice 11.11

Considérons la suite d'intervalles $I_k = \left[\dfrac{k}{n}, \dfrac{k+1}{n}\right]$, k étant compris entre 0 et $n-1$. Comme f est dérivable sur $[0,1]$, f est dérivable sur I_k pour tout k et nous pouvons appliquer le **théorème des accroissements finis** :

$$\exists x_k \in \left]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[, f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} f'(x_k)$$

Il reste à sommer membre à membre les n égalités pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$ et nous obtenons : $f(1) - f(0) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f'(x_k) = 1$. ▲

Exercice 11.12

1. Soit la fonction $f : x \mapsto 1 + \frac{1}{2}\sin\frac{1}{x}$. Elle est définie pour $x \neq 0$. On a l'implication, pour $x \neq 0$: $-1 \leqslant \sin\frac{1}{x} \leqslant 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \leqslant f(x) \leqslant \frac{3}{2}$.
Par ailleurs : $f(x) = \frac{3}{2}$ si et seulement si $\sin\frac{1}{x} = 1$ c'est-à-dire si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, c'est-à-dire si et seulement si :

On commence donc par encadrer $f(x)$ et on minore $f(f(x))$.

$$x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}.$$

Or comme $x \geqslant 1$, ceci est impossible et donc $f(x) < \frac{3}{2}$.
De même, $f(x) = \frac{1}{2}$ si et seulement si $\sin\frac{1}{x} = -1$ c'est-à-dire si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ c'est-à-dire si et seulement si :

$$x = \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}.$$

Or comme $x \geqslant 1$, ceci est impossible et donc $f(x) > \frac{1}{2}$.
Puis on écrit : $\frac{1}{2} < f(x) < \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{2}{3} < \dfrac{1}{f(x)} < 2$.
Et de plus : $f(f(x)) = 1 + \frac{1}{2}\sin\dfrac{1}{f(x)}$.
La quantité $f(f(x)) - 1$ est supérieure à la plus petite des deux valeurs $\frac{1}{2}\sin\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{2}\sin 2$, strictement positives toutes les deux. Donc :

$$f(f(x)) - 1 > 0 \Rightarrow f(f(x)) > 1.$$

Finalement, $\forall x \geqslant 1$, $\frac{1}{2} < f(x) < \frac{3}{2}$ et $f(f(x)) > 1$.

2. Pour $x \in \mathbb{R}^\star$, $f'(x) = -\frac{1}{2} \times \dfrac{1}{x^2}\cos\dfrac{1}{x}$. Pour $x > 1$, on a la majoration :

Sur $[1, +\infty[$, f est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne.

$$|f'(x)| = \frac{1}{2} \times \frac{1}{x^2}|\cos\frac{1}{x}| \leqslant \frac{1}{2} \times \frac{1}{x^2} \leqslant \frac{1}{2}$$

et en appliquant les **inégalités des accroissements finis** :

$$\forall (x, y) \in (]1, +\infty[)^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{2}|x - y|.$$

3. Posons $g(x) = f(x) - x$ avec $x > 1$. On commence par dériver :

$$g'(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x} - 1.$$

Ainsi, $g'(x) < 0$ pour $x > 1$ et g est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$.
On remarque maintenant que : $g(1) = f(1) - 1 = \frac{1}{2}\sin 1 > 0$ puis que : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$. La continuité de g permet de conclure. Il existe un unique $\ell > 1$ tel que $f(\ell) = \ell$.

La quantité $-\frac{1}{2} \times \dfrac{1}{x^2}\cos\dfrac{1}{x}$ est comprise entre $-1/2$ et $1/2$ pour $x > 1$.

4. La suite définie pour tout $n > 0$ par $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $u_0 = a$, où $a \neq 0$, existe bien. En effet si $u_0 = a \neq 0$ alors $u_1 \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$. Puis : $u_2 = f(f(u_0)) > 1$.
Montrons alors par récurrence que pour tout $n \geqslant 2$, $u_n > 1$.

• **Initialisation :** lorsque $n = 2$ c'est fait !

• **Hérédité :** soit $n \geqslant 2$ tel que $u_n > 1$. On observe tout d'abord que f est décroissante sur $x \in \left[\frac{2}{\pi}, +\infty\right[$. Or $[1, +\infty[$ est contenu dans cet intervalle. Comme $f(1) = \frac{1}{2}\sin 1 + 1 > 1$ et que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1,$$

Ceci prouve de plus que u_n ne peut pas être nul et donc la suite (u_n) est définie pour tous ses termes.

la restriction de f à $[1, +\infty[$ est à image dans $]1, +\infty[$ et donc : $u_{n+1} > 1$.

• **Conclusion :** par récurrence, on a montré que pour tout $n \geqslant 2$, $u_n > 1$.

5. On sait, d'après la question précédente, que tous les termes u_n sont dans $[1, +\infty[$ au moins à partir de $n \geqslant 3$. Donc f étant lipschitzienne de rapport $1/2$ sur cet intervalle, on applique l'inégalité :

$$\forall (x, y) \in (]1, +\infty[)^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{2}|x - y|$$

avec $x = u_n$ et $y = \ell$ pour $n \geqslant 3$. On écrit alors (comme $f(\ell) = \ell$) :

$$|u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \ell|.$$

Par récurrence immédiate, pour tout $n \geqslant 3$ et tout $p \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+p} - \ell| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^p |u_n - \ell|$$

et en changeant d'indice :

$$\forall k \geqslant 3,\ |u_k - \ell| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{k-3} |u_3 - \ell|.$$

On remarque que $\left(\frac{1}{2}\right)^{k-3} |u_3 - \ell| \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$ et on peut conclure par **comparaison** que la suite (u_n) est convergente de limite ℓ. ▲

Exercice 11.13

Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$ et $\lambda \in [0, 1]$. Comme f est convexe, il découle de l'inégalité des cordes que

$$f\big((1 - \lambda)x + y\big) \leqslant (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

Comme g est croissante, on en déduit que

$$g \circ f\big((1 - \lambda)x + y\big) \leqslant g\big((1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)\big)$$

Finalement, comme g est convexe, il s'ensuit que

$$g \circ f\big((1 - \lambda)x + y\big) \leqslant (1 - \lambda)g \circ f(x) + \lambda g \circ f(y)$$

Ceci étant vrai pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et tout $\lambda \in [0, 1]$, nous avons établi que $g \circ f$ est convexe. ▲

Exercice 11.14

1. f est de classe $\mathcal{C}^2$ dans $]1,+\infty[$ comme composée et pour tout $x>1$:

$$\begin{aligned} f(x) &= -\ln(\ln(x)) \\ f'(x) &= -\frac{1}{x\ln(x)} \\ f''(x) &= \frac{\ln(x)+1}{\big(x\ln(x)\big)^2} > 0 \end{aligned}$$

D'après la **caractérisation des fonctions convexes de classe $\mathcal{C}^2$**, f est convexe sur I.

2. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, avec $a,b>1$. Prenant $\lambda=\dfrac{1}{2}$, l'**inégalité des cordes** s'écrit $f(\lambda a+(1-\lambda b)\leqslant \lambda f(a)+(1-\lambda)f(b)$, soit

$$\begin{aligned} \ln\left(\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) &\geqslant \frac{1}{2}\ln\big(\ln(a)\big)+\frac{1}{2}\ln\big(\ln(b)\big) \\ &\geqslant \ln\Big((\ln(a))^{1/2}\times(\ln(b))^{1/2}\Big) \\ &\geqslant \ln\Big(\sqrt{\ln a\,\ln b}\Big) \end{aligned}$$

Le résultat s'ensuit par croissance de l'exponentielle. ▲

Exercice 11.15

1. Les fonctions à comparer étant paires, il suffit d'établir l'inégalité $\tan(x)\leqslant x$ sur $[0,\frac{\pi}{2}[$. Ceci résulte directement de l'**inégalité des tangentes** en 0 pour la fonction convexe $\tan_| : [0,\frac{\pi}{2}[\to\mathbb{R}$.

$y=x$ est l'équation de la tangente au graphe de $\tan_|$ au point d'abscisse 0.

2. Commençons par établir la majoration $\forall x>-1,\ \ln(1+x)\leqslant x$. Elle résulte directement de l'**inégalité des tangentes** en 0 pour la fonction concave $x\mapsto\ln(1+x)$. Pour la minoration, on pourrait étudier la différence de ces deux fonctions, mais il est plus astucieux d'observer que

$y=x$ est l'équation de la tangente au graphe de $x\mapsto\ln(1+x)$ au point d'abscisse 0.

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{1}{1+x}\right) &= \ln\left(1-\frac{x}{1+x}\right) \\ &\leqslant -\frac{x}{1+x} \end{aligned}$$

En multipliant par -1, il vient $\ln(1+x)\geqslant\frac{x}{1+x}$.

3. L'inégalité des tangentes montre seulement que $\forall x\in\mathbb{R}^+,\ e^x\geqslant 1+x$. Pour avoir mieux, on peut utiliser le **théorème des accroissements finis**. On pose $f : x\mapsto\exp(x)$ et $g : x\mapsto 1+x+\dfrac{x^2}{2}$. Soit $x\in\mathbb{R}^+$. On a :

$y=1+x$ est l'équation de la tangente au graphe de $x\mapsto\exp(x)$ au point d'abscisse 0.

- D'après l'inégalité des tangentes en 0, $f'(x)=e^x\geqslant 1+x=g'(x)$.
- Ainsi, $0\leqslant g'(x)\leqslant f'(x)$. Il en résulte que $f-g$ est une fonction croissante. Comme elle s'annule en 0, nous en déduisons que pour tout $x\geqslant 0$, $f(x)\geqslant g(x)$, soit

$$e^x\geqslant 1+x+\frac{x^2}{2}$$

4. La fonction puissance $p : x\mapsto x^{n+1}$ étant convexe, on applique l'**inégalité des tangentes** au point d'abscisse 1. Il s'ensuit que pour tout $x\in[0,+\infty[$, $p(x)\geqslant p(1)+p'(1)(x-1)$, c'est-à-dire $x^{n+1}\geqslant 1+(n+1)(x-1)$, ce qui est équivalent à l'inégalité demandée :

$$x^{n+1}-(n+1)x+n\geqslant 0$$

▲

Exercice 11.16

Posons $\lambda = 1/p$, de sorte que $1/q = 1 - \lambda$. On applique l'**inégalité des cordes** à la fonction concave ln, ce qui donne pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R}^{+\star}$

$$\ln\left(\frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y\right) \geqslant \frac{1}{p}\ln(x) + \frac{1}{q}\ln(y)$$

En prenant l'exponentielle, il vient :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R}^{+\star}, \quad \frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y \geqslant x^{\frac{1}{p}} \times y^{\frac{1}{q}}$$

En particulier, avec $x = a^p$ et $y = b^q$ le résultat s'ensuit. ▲

Exercice 11.17

On applique le **théorème des accroissements finis** à ln sur $[k, k+1]$ et il existe $c_k \in]k, k+1[$ tel que $\ln(k+1) - \ln(k) = \dfrac{1}{c_k}$. On a immédiatement la double inégalité demandée. Puis en la sommant de $k = 1$ à $k = n - 1$,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

Ce qui donne $0 \leqslant \dfrac{1}{n} \leqslant S_n \leqslant 1$. La suite (S_n) est bornée. Enfin, (S_n) est décroissante et bornée donc convergente. ▲

*On appelle **constante d'Euler** cette limite.*

Exercice 11.18

f est dérivable donc continue sur $[a, b]$. Elle admet donc un maximum M sur $[a, b]$ et on a donc :

$$\forall x \in [a, b], \ f(x) \leqslant M.$$

Si $f(a) = M$, on a sur $]a, b]$:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{f(x) - M}{x - a} \leqslant 0$$

En faisant tendre x vers a, on a $f'(a) \leqslant 0$. C'est contradictoire.
Si $f(b) = M$, on a sur $[a, b[$:

$$\frac{f(x) - f(b)}{x - b} = \frac{f(x) - M}{x - b} \geqslant 0$$

En faisant tendre x vers b, on a $f'(b) \geqslant 0$. C'est encore contradictoire.
On en déduit que M est atteint sur $]a, b[$ en une valeur $x = c$.
D'après le cours, $f'(c) = 0$. ▲

Exercice 11.19

f garde un signe constant sur $]a, b[$ et quitte à considérer $-f$, on peut supposer que f ne prend que des valeurs positives sur $]a, b[$. Soit $c \in]a, b[$, le taux d'accroissement de f entre a et c (resp. entre c et b) est positif (resp. négatif) et en faisant tendre c vers a (resp. vers b), tout en restant dans l'intervalle $]a, b[$, on en déduit : $(f'(a) \leqslant 0$ et $f'(b) \geqslant 0) \Rightarrow f'(a)f'(b) \leqslant 0$. ▲

Chapitre 12
Calcul matriciel

UN MATHÉMATICIEN

Le mathématicien anglais **James Sylvester** a passé une partie de sa carrière aux États-Unis. Suite à sa rencontre avec Arthur Cayley, il se tourne vers l'algèbre linéaire. Il considère des tableaux de nombres qu'il nomme *matrices* mais c'est Cayley qui définit les opérations de somme et produit. Ses travaux, souvent incomplets et peu rigoureux, sont pleins d'idées originales et son aptitude à l'abstraction lui a permis de généraliser de nombreux problèmes concrets.

Un peu d'histoire

La recherche de solutions de systèmes d'équations est très ancienne mais ce n'est qu'au XVIIIe siècle qu'apparaissent des méthodes théoriques de résolution. Deux mathématiciens, Colin Maclaurin et Gabriel Cramer, étudient les intersections de courbes définies par des équations analytiques, c'est-à-dire de la forme $f(x,y) = 0$. Ceci les amène à concevoir des méthodes de résolution de systèmes. Alexandre Vandermonde poursuit ces recherches et introduit la notion de déterminant.

Au milieu du siècle suivant, les mathématiciens anglais Arthur Cayley et James Sylvester ont l'idée de ne plus noter les inconnues, mais seulement les coefficients associés, sous forme de tableau. On obtient ainsi un maniement beaucoup plus aisé. L'avenir leur donnera raison puisque l'étude des applications linéaires se trouve grandement facilitée par l'utilisation de tels tableaux appelés matrices.

Objectifs

les incontournables

- Effectuer des calculs matriciels :
  - calculer des produits de matrices ;
  - vérifier l'inversibilité et calculer l'inverse d'une matrice carrée ;
  - calculer les puissances n-ièmes d'une matrice carrée.
- Interpréter des calculs matriciels :
  - connaître les liens entre systèmes d'équations linéaires et matrices ;
  - savoir interpréter des opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice au moyen des matrices élémentaires.

et plus si affinités

- Utiliser une représentation matricielle pour étudier des suites triplement récurrentes.

Résumé de cours

Matrices de n lignes p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ dénote $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition : *Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star$ deux entiers naturels non nuls. On appelle* **matrice de n lignes et p colonnes** *toute famille $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$. On la représente sous la forme d'un tableau rectangulaire d'éléments de $\mathbb{K}$, comme indiqué ci-contre.*

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

Dans la pratique, on identifie la famille $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ et sa représentation sous forme de tableau.

Notation : *$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices à n lignes p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.*

Vocabulaire :

- *Si $p = 1$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est appelée une* **matrice colonne.**
- *Si $n = 1$, une matrice de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ est appelée une* **matrice ligne.**
- *Si $n = p$, une matrice de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ est appelée une* **matrice carrée d'ordre** *n.*

Notation : *$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n.*

Définition : *Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star$. On définit les matrices particulières suivantes.*

- *Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, on définit la* **matrice élémentaire** *$E_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont les coefficients sont tous nuls, sauf celui de la i-ième ligne et de la j-ième colonne qui vaut 1.*
- *La* **matrice nulle** *$O_{n,p} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ a tous ses coefficients nuls.*
- *La* **matrice identité** *$I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par $I_n = (\delta_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$.*

Opérations sur les matrices

Définition : *Soit $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux matrices. On dit que A et B sont* **égales**, *et on note $A = B$, si elles ont même format $n \times p$ et pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $a_{i,j} = b_{i,j}$.*

Définition : *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la :*

- ***somme*** *$A + B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $(A+B)_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$;*
- ***multiplication par un scalaire*** *$\lambda A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $(\lambda A)_{i,j} = \lambda a_{i,j}$;*

Théorème 12.1.— $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est stable par combinaison linéaire, c'est-à-dire que

$$\boxed{\forall (A,B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2,\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2,\ \lambda A + \mu B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}$$

Remarque : dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, toute matrice est combinaison linéaire de matrices élémentaires.

Définition : *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On définit la*

- ***matrice produit*** *$A \times B \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ par : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!]$, $(A \times B)_{i,j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{i,k} \times b_{k,j}$.*

Théorème 12.2.— Propriétés du produit de matrices —. Soit A, B, C des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$. Pourvu que les produits et sommes ci-dessous soient bien définis, on a :

- $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$
- $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$
- $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$
- $\lambda(A \times B) = (\lambda A) \times B = A \times (\lambda B)$
- Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ alors $I_n \times A = A \times I_p = A$
- $A \times O = O$ et $O \times A = O$

Attention ! même lorsque ces produits sont définis, on n'a pas en général que $A \times B = B \times A$.

Définition : *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on définit, la :*

- ***transposée** de A, notée $A^T \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ par $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!]$, $(A^T)_{i,j} = a_{j,i}$.*

Proposition 12.3.— Propriétés de la transposition —. Soit A, B des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$, λ, μ des scalaires. Pourvu que les produits et sommes ci-dessous soient bien définis, on a :

- $(\lambda A + \mu B)^T = \lambda A^T + \mu B^T$
- $(A \times B)^T = B^T \times A^T$

■ Matrices et systèmes d'équations linéaires

Proposition 12.4.— Écriture matricielle des systèmes d'équations linéaires —. Considérons le système de n équations linéaires à p inconnues (S) ci-dessous. On note $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice des coefficients et $B = (b_i) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ la matrice colonne second membre. On a alors l'écriture matricielle :

$$\boxed{(S) \quad \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array} \right. \iff A \times X = B}$$

Remarque : le système (S) $AX = B$ est compatible si et seulement si la matrice colonne B est combinaison linéaire des colonnes de A.

Définition : *Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit les **matrices d'opérations élémentaires**.*

- *La **matrice de dilatation** $D_i^n(\lambda)$ s'obtient en multipliant la i-ième ligne de I_n par λ.*
- *La **matrice de permutation** $P_{i,j}^n$ s'obtient en échangeant les i-ième et j-ième lignes de I_n.*
- *La **matrice de transvection** $T_{i,j}^n(\lambda)$ s'obtient en appliquant l'opération $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ à I_n.*

Les opérations élémentaires sur les systèmes d'équations linéaires se traduisent matriciellement.

Proposition 12.5.— Étant donné une matrice A, on peut agir sur ses lignes en multipliant A à gauche par ces matrices d'opérations élémentaires. Plus précisément,

- L'opération $L_i \leftarrow \lambda L_i$ s'obtient en multipliant A à gauche par $D_i^n(\lambda)$;
- L'opération $L_i \leftrightarrow L_j$ s'obtient en multipliant A à gauche par $P_{i,j}^n$;
- L'opération $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ s'obtient en multipliant A à gauche par $T_{i,j}^n(\lambda)$;

Remarque : de façon analogue, on peut agir sur les colonnes de A en multipliant A à droite par les matrices d'opérations élémentaires.

■ Matrices carrées

Définition : *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que*

- *A est* ***scalaire****, s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A = \lambda \cdot I_n$.*
- *A est* ***diagonale****, si : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad (i \neq j) \Rightarrow a_{i,j} = 0$*
- *A est* ***triangulaire inférieure*** *, si : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad (i < j) \Rightarrow a_{i,j} = 0$*
- *A est* ***triangulaire supérieure*** *, si : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad (i > j) \Rightarrow a_{i,j} = 0$*
- *A est* ***symétrique*** *(resp.* ***antisymétrique****) si $A^T = A$ (resp. $A^T = -A$).*

Notation : *$\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ (respectivement $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$) désigne l'ensemble des matrices symétriques (respectivement antisymétriques) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

Théorème 12.6.— Stabilité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par combinaison linéaire et produit —.
Toute combinaison linéaire ou tout produit de matrices carrées d'ordre n est une matrice carrée d'ordre n. Le produit est non commutatif dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ lorsque $n \geqslant 2$.

Proposition 12.7.— Produit de matrices diagonales —. Le produit de deux matrices diagonales est une matrice diagonale. Plus précisément,
Soit $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $D' = \mathrm{Diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ les matrices diagonales définies par la liste de leurs coefficients diagonaux. Alors

$$D \times D' = D' \times D = \mathrm{Diag}(\lambda_1\mu_1, \ldots, \lambda_n\mu_n)$$

Remarque : plus généralement, le produit de matrices triangulaires supérieures (respectivement inférieures) est également une matrice triangulaire supérieure (respectivement inférieure).

Définition : *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre n. On définit les* ***puissances successives*** *de A par $A^0 = I_n$ et la relation de récurrence $\forall k \in \mathbb{N},\ A^{k+1} = A \times A^k$.*

Corollaire 12.8.— Cas des matrices diagonales —. Soit $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ une matricce diagonale et $p \in \mathbb{N}$. Alors

$$D^p = \mathrm{Diag}(\lambda_1^p, \ldots, \lambda_n^p).$$

Théorème 12.9.— Formule de Newton et identité géométrique —. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $A \times B = B \times A$. Alors

- $(A+B)^p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k \times B^{p-k}$
- $A^{p+1} - B^{p+1} = (A-B) \times \displaystyle\sum_{k=0}^{p} A^k \times B^{p-k}$

■ Matrices carrées inversibles

Définition : *Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite* ***inversible*** *s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A \times B = I_n$ et $B \times A = I_n$. En ce cas, B est unique : c'est l'****inverse*** *de A. On note $B = A^{-1}$.*

Définition : *L'ensemble des matrices carrées d'ordre n inversibles est appelé le* ***groupe linéaire*** *d'ordre n et on le note $\mathrm{GL_n}(\mathbb{K})$.*

Théorème 12.10.— Propriétés des matrices inversibles —. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors :

- Si A est inversible, alors A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.
- Si A est inversible alors A^T est inversible et $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
- Si A et B sont inversibles, alors $A \times B$ est inversible et $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$

Théorème 12.11.— Lien fondamental avec les systèmes de Cramer —. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On note (S) le système (S) $A \times X = B$.

(S) est un système de **Cramer** si et seulement si A est inversible.

Dans ce cas, l'unique solution de (S) est $A^{-1} \times B$.

Corollaire 12.12.— Cas des matrices triangulaires —. Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure).

T est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont **tous non nuls**.

En ce cas, T^{-1} est triangulaire supérieure (resp. inférieure).

Corollaire 12.13.— Cas des matrices diagonales —. Soit $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ une matricce diagonale.

D est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont **tous non nuls**.

En ce cas, $D^{-1} = \mathrm{Diag}(\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1})$.

Théorème 12.14.— Inversibilité à gauche ou à droite —. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

A est inversible si et seulement si il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A \times B = I_n$ **ou** $B \times A = I_n$.

Méthodes

Produit de deux matrices

Disposition pratique pour le produit

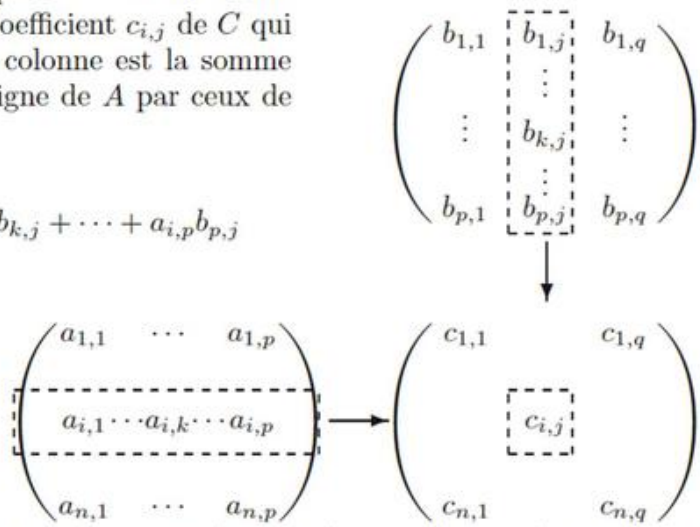
Avant tout, pour que le produit de deux matrices A et B soit défini, il est nécessaire que les **dimensions** de A et B soient **compatibles** : A doit avoir autant de colonnes que B a de lignes.

> ❑ **Méthode 12.1.— Comment effectuer un produit de deux matrices**
> Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Le produit $A \times B$ est bien défini, il s'agit d'une matrice $C \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$. Pour la déterminer
>
> $\boxed{1}$ On peut présenter le calcul comme ci-dessous.
>
> $\boxed{2}$ On calcule «l'un après l'autre» les $n \times q$ coefficients de C : le coefficient $c_{i,j}$ est le résultat du produit de la i-ième ligne de A par la j-ième colonne de B.

Le produit ligne-colonne

Pour effectuer ce calcul, il est utile de disposer ce calcul comme indiqué ci-contre. Notons $C = A \times B$. Le coefficient $c_{i,j}$ de C qui se trouve à la i-ième ligne et à la j-ième colonne est la somme des produits des coefficients de la i-ième ligne de A par ceux de la j-ième colonne de B :

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j} = a_{i,1} b_{1,j} + \cdots + a_{i,k} b_{k,j} + \cdots + a_{i,p} b_{p,j}$$



Cette disposition vaut aussi pour les produits de trois matrices ou plus encore. Il suffit d'écrire tous les facteurs à droite de B et d'effectuer les produits de proche en proche.

Remarque : le produit de deux matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) est une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure), le produit de matrices diagonales est une matrice diagonale.

Mise en œuvre : exercices 12.1 à 12.4.

Produit contre une matrice ligne ou colonne

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice de n lignes p colonnes. On note

- $C_1, C_2, \ldots, C_p \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$ les p colonnes de A ;
- $L_1, L_2, \ldots, L_n \in \mathcal{M}_{1,p}(K)$ les n lignes de A.

Pour $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ et $\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_p \end{pmatrix}^T \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, on a :

- $A \times \Gamma = \gamma_1 \cdot C_1 + \gamma_2 \cdot C_2 + \cdots + \gamma_p \cdot C_p$ est une combinaison linéaire des colonnes de A ;
- $\Lambda \times A = \lambda_1 \cdot L_1 + \lambda_2 \cdot L_2 + \cdots + \lambda_n \cdot L_n$ est une combinaison linéaire des lignes de A.

■ Puissances d'une matrice carrée

Tout d'abord, introduisons la notion de **matrice nilpotente**. On dit que N, matrice carrée d'ordre n, est nilpotente d'ordre p si et seulement si $N^p = 0$ et $N^{p-1} \neq 0$. Il est clair que p est un entier au moins égal à 2 (car $N^0 = I_n$ par convention). Enfin, bien que certaines matrices nilpotentes « se devinent » (elles sont triangulaires avec la diagonale principale composée seulement de zéros), pour d'autres, il faut faire le produit.

> ❑ **Méthode 12.2.— Comment calculer les puissances d'une matrice carrée**
> Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. Pour calculer les puissances successives de A, plusieurs pistes sont possibles.
>
> - **Par récurrence**
> Calculer les premières puissances de A puis conjecturer l'expression de A^p en fonction de p et enfin démontrer cette formule par récurrence.
> - **À l'aide de la formule du binôme de Newton**
> Décomposer A sous la forme $A = D + N$ comme somme de deux matrices qui commutent, une matrice D diagonale et une matrice N nilpotente. On a alors
> $$A^p = (D+N)^p \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} N^k D^{p-k}.$$
> - **En utilisant une relation polynomiale**
> Partir d'une relation polynômiale simple de variable A, c'est-à-dire d'une égalité écrivant A^m comme combinaison linéaire de $A^{m-1}, \ldots, A, I_n$. On établit une relation de récurrence en partant de $A^{m+1} = AA^m$.

Exemple : illustrons la première piste de la **méthode 12.2** pour calculer les puissances successives de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On a $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot A$. On en déduit que $A^3 = A \times A^2 = 3 \cdot A^2 = 9 \cdot A$. Une récurrence – immédiate ici – montre que pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$, $A^p = 3^{p-1}A$.

Exemple : illustrons la deuxième piste. Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On écrit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I_3 + D, \text{ où } D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Un calcul rapide de D^2 et D^3 montre que la matrice D est nilpotente d'ordre 3. On peut remarquer (et ceci est valable pour toute matrice nilpotente d'ordre 3) que $D^k = 0$ pour $k \geqslant 3$. Comme I_3 et D commutent (car $I_3 D = D I_3 = D$), on peut appliquer la formule du binôme de Newton (en supposant $n \geqslant 2$) :

$$A^p = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} I_3^{p-k} D^k = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} D^k = \binom{p}{0} I_3 + \binom{p}{1} D + \binom{p}{2} D^2.$$

On en déduit $A^p = I_3 + pD + \dfrac{p(p-1)}{2} D^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2p & 2p(p+2) \\ 0 & 1 & 2p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. On remarque que $A^2 = 5A - 4I_3$.
Nous allons déduire de cette relation polynomiale l'expression des puissances successives de A.
On part de $A^2 = \alpha_2 A + \beta_2 I_3$, puis on remarque par récurrence que :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ A^p = \alpha_p A + \beta_p I_3.$$

Cette relation est évidemment vraie pour $p = 0$ en posant $\alpha_0 = 0$ et $\beta_0 = 1$ et pour $p = 1$ en posant $\alpha_1 = 1$ et $\beta_1 = 0$. On en déduit alors A^p en exprimant α_p et β_p en utilisant des relations de récurrence d'ordre 2. Ainsi, on peut écrire $A^{p+1} = A^p A = (\alpha_p A + \beta_p I_3)A = \alpha_p A^2 + \beta_p A$. Comme $A^2 = 5A - 4I_3$, il s'ensuit que

$$A^{p+1} = \alpha_p(5A - 4I_3) + \beta_p A = (5\alpha_p + \beta_p)A - 4\alpha_p I_3 = \alpha_{p+1}A + \beta_{p+1}I_3$$

Par identification, $\begin{cases} 5\alpha_p + \beta_p &= \alpha_{p+1} \\ -4\alpha_p &= \beta_{p+1} \end{cases}$. Cela donne $\alpha_{p+2} - 5\alpha_{p+1} + 4\alpha_p = 0$ et en utilisant le cours sur les récurrences linéaires d'ordre 2 des suites on remarque que α_p est une combinaison linéaire de 1 et de 4^p. En utilisant le fait que $\alpha_0 = 0$ et $\alpha_1 = 1$, on a : $\alpha_p = (4^p - 1)/3$ et on trouve ensuite β_p. On conclut

$$A^p = \frac{1}{3}(4^p - 1)A + \frac{4}{3}(1 - 4^{p-1})I_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4^p + 2 & 4^p - 1 & 4^p - 1 \\ 4^p - 1 & 4^p + 2 & 4^p - 1 \\ 4^p - 1 & 4^p - 1 & 4^p + 2 \end{pmatrix}.$$

Mise en œuvre : exercice 12.5, **exercice 12.6** et les **exercices** de **12.12** à **12.14**.

■ Matrices carrées inversibles

Méthodes de calcul pratique de l'inverse

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. Pour vérifier l'inversibilité et calculer l'inverse de A, il existe plusieurs méthodes :

- le point de vue **système d'équations linéaires** ;
- la méthode de **Gauss-Jordan** ;
- l'utilisation d'une **relation polynomiale**.

Chacune de ces méthodes permet de savoir si A est inversible ou pas et donne, le cas échéant, une formule pour l'inverse. En pratique, on utilise couramment l'une ou l'autre des deux premières.

Point de vue systèmes d'équations linéaires

D'après le **théorème 12.11**, A est inversible *si et seulement si* le système $A \times X = B$ est de **Cramer**. De plus, si tel est le cas, l'unique solution de ce système est $A^{-1} \times B$.

❑ Méthode 12.3.— Le point de vue SEL

Pour un n-uplet de paramètres $Y = (y_1, \ldots, y_n)$, on résout le système (S) $A \times X = Y$.

1 On échelonne (S) par **l'algorithme de Gauss-Jordan**. Deux cas se présentent :

- si (S) n'est pas de **Cramer**, A n'est pas inversible.
- si (S) est de **Cramer** A est inversible. De plus,

2 L'unique solution de (S) s'exprime en fonction des paramètres $y_1, \ldots, y_n$: $X = A^{-1} \times Y$

3 On détermine A^{-1} par identification.

Exemple : appliquons cette méthode pour calculer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{1}$ Échelonnons le système $(S) \quad A \times X = Y$ à l'aide de la méthode du pivot de Gauss.

$$(S) \iff \begin{cases} 3x_1 & +2x_2 & -x_3 = y_1 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 = y_2 \\ 2x_1 & -2x_2 & +x_3 = y_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \mathbf{1}x_1 & -x_2 & +x_3 = y_2 \\ 3x_1 & +2x_2 & -x_3 = y_1 \\ 2x_1 & -2x_2 & +x_3 = y_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \mathbf{1}x_1 & -x_2 & +x_3 = & y_2 \\ & \mathbf{5}x_2 & -4x_3 = y_1 - 3y_2 \\ & & -\mathbf{1}x_3 = y_3 - 2y_2 \end{cases}$$

$\boxed{2}$ Pour tout second membre $Y = (y_1, y_2, y_3)$, le système (S) admet une unique solution : il est de **Cramer** et par conséquent A est inversible. La solution s'exprime en fonction des paramètres (y_1, y_2, y_3) :

$$(S) \iff \begin{cases} x_1 = 1/5\ y_1 & & +1/5\ y_3 \\ x_2 = 1/5\ y_1 & +y_2 & -4/5\ y_3 \\ x_3 = & 2y_2 & -y_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$\boxed{3}$ Il ne reste plus qu'à *lire* les coefficients de la matrice A^{-1}. Par identification, on trouve

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 0 & 10 & -5 \end{pmatrix}$$

Mise en œuvre : exercice 12.7 et **exercice 12.8**.

Algorithme de Gauss-Jordan

D'après le **théorème 12.14**, pour qu'une matrice carrée A soit inversible il est nécessaire et suffisant de trouver une matrice L telle que

$$L \times A = I_n$$

La méthode de **Gauss-Jordan** consiste à transformer par une suite d'opérations élémentaires sur ses lignes, la matrice A en l'identité. Comme chaque opération élémentaire sur les lignes de A revient à multiplier A à gauche par une matrice inversible (**proposition 12.5**), on obtient :

$$\underbrace{L_p \times L_{p-1} \times \cdots \times L_1}_{L} \times A = I_n$$

En ce cas, A est inversible et $A^{-1} = L_p \times L_{p-1} \times \cdots \times L_1$, ce qui revient à dire que cette même suite d'opérations élémentaires sur les lignes transforme I_n en A^{-1}.

❑ **Méthode 12.4.— Algorithme de Gauss-Jordan**

Pour vérifier l'inversibilité et calculer le cas échéant l'inverse de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par l'algorithme de Gauss-Jordan, on effectue des opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice à n lignes et $2n$ colonnes.

$\boxed{1}$ Au départ, on forme la matrice schématisée par $\left(\begin{array}{c|c} A & I_n \end{array} \right)$, le symbole | étant juste une barrière virtuelle qui permet de distinguer les deux parties importantes de la matrice ;

$\boxed{2}$ Par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes de la matrice augmentée (sans se soucier de la barrière virtuelle), on transforme la partie gauche de la matrice augmentée en une matrice échelonnée par lignes T. Deux cas se présentent :

- s'il y a des zéros sur la diagonale de T, cette matrice n'est pas inversible et A non plus ;
- si T a tous ses coefficients diagonaux non nuls, elle est inversible et A aussi. En ce cas, on poursuit le calcul.

$\boxed{3}$ Par opérations sur les lignes, on transforme les matrices de la partie gauche de la matrice augmentée jusqu'à arriver à I_n. La matrice correspondante dans la partie droite est A^{-1}.

Exemple : reprenons l'exemple précédent, $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 3 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$L_2 \leftrightarrow L_2 \qquad \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{rrr|rrr} \mathbf{1} & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{5} & -4 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{-1} & 0 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

$$L_3 \leftarrow -L_3 \qquad \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 4L_3 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{array} \right)$$

$$L_2 \leftarrow \tfrac{1}{5} L_2 \qquad \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & 1 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{array} \right)$$

$$L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \qquad \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & 1 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{array} \right)$$

Ainsi, A est inversible et nous retrouvons l'expression de A^{-1} précédemment obtenue.

Utilisation d'une relation polynomiale

On suppose que A vérifie une relation (polynomiale) de la forme

$$a_p A^p + \cdots + a_1 A + a_0 I_n = O_n \tag{12.1}$$

Cette relation polynomiale permet lorsque $a_0 \neq 0$ de calculer l'inverse de A.

Méthode 12.5.— Utilisation d'une relation polynomiale

1 De la relation (12.1), on tire $I_n = \dfrac{-1}{a_0}\displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_k A^k = A \times \left(\dfrac{-1}{a_0}\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} a_{k+1} A^k\right)$.

2 On conclut avec le **théorème 12.14** que A est inversible et $A^{-1} = \dfrac{-1}{a_0}\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} a_{k+1} A^k$

Exemple : considérons la matrice A définie plus haut. Nous allons déterminer l'inverse de A en exploitant la relation polynomiale $A^3 - 3A^2 + A - 5I_3 = O_3$.
Calculons tout d'abord A, A^2, A^3 :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 6 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 6 & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 29 & 16 & -5 \\ 11 & 9 & -4 \\ 16 & 14 & -5 \end{pmatrix}$$

On vérifie ensuite que A satisfait effectivement la relation polynomiale $A^3 - 3A^2 + A - 5I_3 = O_3$, d'où l'on tire $A^{-1} = \frac{1}{5}(A^2 - 3A + I_3) = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 0 & 10 & -5 \end{pmatrix}$.

Mise en œuvre : exercice 12.8.

Méthodes pour établir l'inversibilité d'une matrice

Les méthodes précédentes permettent d'établir l'inversibilité **et** de calculer 'inverse de A. Lorsqu'on souhaite seulement savoir si une matrice est inversible, d'autres méthodes plus simples existent :

Méthode 12.6.— Comment prouver qu'une matrice est inversible

Outre les méthodes précédentes, pour montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible, on peut

- montrer que le système linéaire homogène $A \times X = O_{n,1}$ est de **Cramer** ;
- montrer (par opérations élémentaires) que A équivaut (en lignes) à une matrice inversible.

Exemple : soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Pour étudier l'inversibilité de A, on effectue des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice A. Chacune de ces opérations se traduit par la multiplication à gauche par une matrice inversible. En vertu du **théorème 12.14**, ces opérations préservent l'inversibilité de la matrice.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -4 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette dernière matrice est triangulaire et possède un coefficient nul sur la diagonale : elle n'est pas inversible. Donc A n'est pas inversible.

Notation : *ici $A \sim B$ signifie que B s'obtient à partir de A en lui appliquant un nombre fini d'opérations élémentaires sur les lignes ou sur les colonnes.*

Mise en œuvre : exercice 12.7, **exercice 12.9** et **exercice 12.11**.

■ Matrices et suites numériques

Suites géométriques de matrices colonnes

❑ Méthode 12.7.— Comment déterminer le terme général d'une suite de matrices
Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de matrices colonnes de taille $p \times 1$ définie par la donnée de son premier terme U_0 et la relation de récurrence $U_{n+1} = A\,U_n$ où A est une matrice carrée d'ordre p. Pour expliciter la matrice U_n,
[1] On observe que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $U_n = A^n\,U_0$.
[2] Il ne reste plus dès lors qu'à calculer la puissance n-ième de la matrice A.

Exemple : soit $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$. On souhaite expliciter le terme de rang n de la suite de matrices colonnes vérifiant la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = A \times U_n$.
[1] On observe que $U_n = A^n \times U_0$.
[2] On démontre par récurrence par exemple, que $A^n = \begin{pmatrix} 4 - 3\cdot(-1)^n & 6\cdot(-1)^n - 6 \\ 2 - 2\cdot(-1)^n & 4\cdot(-1)^n - 3 \end{pmatrix}$.
On peut conclure que $U_n = \begin{pmatrix} 3\cdot(-1)^n - 2 \\ 2\cdot(-1)^n - 1 \end{pmatrix}$

La méthode précédente s'applique notamment pour l'étude de suites récurrente (double, triple, etc.) ou pour des suites récurrentes linéaires imbriquées.

- Soit (u_n) la suite définie par la donnée de ses deux premiers termes et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

Pour expliciter matriciellement le terme général de la suite (u_n), on introduit une suite de matrice colonnes, $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$, telle que $U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix} \times U_n$.

- Soit (u_n) et (v_n) définies par la donnée de leurs premiers termes u_0, v_0 et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} &= au_n &+ bv_n \\ v_{n+1} &= cu_n &+ dv_n \end{cases}$$

Pour expliciter le terme général de deux suites, on introduit une suite de matrice colonnes, $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, telle que $U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times U_n$

Mise en œuvre : exercice 12.12, **exercice 12.13** et **exercice 12.14**.

Vrai/Faux

	Vrai	Faux
1. Soit A, B des matrices carrées, alors $(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$.	☐	☐
2. Soit A, B des matrices carrées, alors $(AB)^2 = A^2B^2$.	☐	☐
3. $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ stable pour l'addition et la multiplication.	☐	☐
4. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. S'il existe $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ tel que $A \times B = I_n$, alors $B \times A = I_p$.	☐	☐
5. Soit $A, B \in \mathrm{GL_n}(\mathbb{K})$. Alors $A \times B$ est inversible et $(A \times B)^{-1} = A^{-1} \times B^{-1}$.	☐	☐
6. Une matrice diagonale commute avec toute matrice.	☐	☐
7. La transposée de $A \times B$ est $A^T \times B^T$.	☐	☐
8. Si A et B sont deux matrices carrées d'ordre 2 telles que $AB = O_2$, alors A ou B est égale à O_2.	☐	☐
9. La seule matrice symétrique et anti symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice nulle 0_n	☐	☐
10. Soit A, B et C trois matrices carrées d'ordre n, avec $AC = BC$ alors $A = B$.	☐	☐

Énoncé des exercices

Produit matriciel

Exercice 12.1 : Calculer $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 12.2* : i, k étant des entiers fixés entre 1 et n et j étant un entier fixé entre 1 et p, calculer le produit des deux matrices élémentaires $E_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $E_{j,k} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

Exercice 12.3 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier non nul. On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ la racine n-ième primitive de 1. On considère les matrices $A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définies par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad a_{i,j} = \omega^{(i-1)(j-1)} \text{ et } b_{i,j} = \omega^{-(i-1)(j-1)}$$

1. Montrer que AB est une matrice scalaire.
2. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Exercice 12.4* : Soit D une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les termes de la diagonale sont deux à deux distincts, montrer que si $AD = DA$ alors A est diagonale.

Puissances d'une matrice carrée

Exercice 12.5 : Dans les trois cas suivants, calculer la puissance n-ième de la matrice, pour $n \in \mathbb{N}$.

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

Exercice 12.6 : Soit la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2 et A^3.
2. En posant $A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, quelles relations de récurrence vérifient (a_n) et (b_n) ?
3. En déduire une expression de A^n en fonction de n, pour tout entier n supérieur ou égal à 1.

Inversibilité d'une matrice carrée

Exercice 12.7 : Dans les trois cas suivants, vérifier l'inversibilité de la matrice et calculer son inverse le cas échéant.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 12.8 : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que A est inversible et calculer son inverse en résolvant un système linéaire.
2. Vérifier que A est inversible et calculer son inverse à l'aide de l'algorithme de Gauss-Jordan.
3. Vérifier que $A^3 - 4\,A^2 + 8\,A - 15\,I_3 = O_3$. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 12.9 : Déterminer pour quelles valeurs de λ la matrice $M = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ est inversible.

Exercice 12.10 : Soit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}^\star$ des scalaires non nuls. Déterminer l'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ \vdots & \iddots & \lambda_2 & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ \lambda_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 12.11 : Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, telles que $AB = A + I_n$. Montrer que A est inversible.

■ Suites et matrices

Exercice 12.12* : Soit u la suite définie par la donnée de son premier terme $u_0 = \frac{1}{2}$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}$$

1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, u_n peut s'écrire sous la forme d'une fraction $u_n = \dfrac{p_n}{q_n}$ où p_n et q_n sont des entiers naturels vérifiant

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$$

et A est une matrice carré d'ordre 2, indépendante de n que l'on déterminera.
2. Calculer pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, A^n.
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
4. La suite u est-elle convergente ? Préciser le cas échéant sa limite.

Exercice 12.13* : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par :

$$\begin{cases} x_0 = \frac{3}{5} \\ y_0 = \frac{2}{5} \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall \mathrm{n} \in \mathbb{N} \begin{cases} x_{n+1} = \frac{4}{5}x_n + \frac{1}{2}y_n \\ y_{n+1} = \frac{1}{5}x_n + \frac{1}{2}y_n \end{cases}$$

On pose, pour tout $n \geqslant 0$, $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.
1. Déterminer la matrice A vérifiant pour tout entier naturel $n \geqslant 0$, $\quad U_{n+1} = AU_n$.

2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geqslant 0$, $U_n = A^n U_0$.
3. On pose $P = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$. Vérifier que P est inversible et que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/7 & 1/7 \\ 2/35 & -1/7 \end{pmatrix}$
4. Soit $D = P^{-1}AP$. Calculer D puis exprimer D^n pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$.
5. Montrer que $A = PDP^{-1}$.
6. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 0$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
7. En déduire x_n et y_n en fonction de n puis étudier leur limite.

Exercice 12.14* : Suite récurrente linéaire d'ordre 3 —. Soit (u_n) la suite de nombres réels définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 1, u_2 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n \end{cases}$$

On note

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que P est inversible et déterminer la matrice $D = P^{-1}AP$.
2. Démontrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$ et en déduire l'expression de A^n.
3. Déterminer une relation de récurrence entre U_{n+1} et U_n.
4. En déduire, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ l'expression de U_n en fonction de U_0, puis l'expression de u_n en fonction de n.

■ Miscellaneous

Exercice 12.15 : Soit G l'ensemble des matrices $M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -x^2 & 1 & x \\ -2x & 0 & 1 \end{pmatrix}$, où $x \in \mathbb{R}$ est un réel quelconque. Montrer que le produit de deux matrices de G est une matrice de G est que l'inverse d'une matrice de G est encore élément de G.

D'après Centrale-Supélec, PSI

Exercice 12.16 : On appelle **trace d'une matrice carrée** $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ le nombre, noté $\mathrm{Tr}(M)$ égal à la somme des coefficients diagonaux de M :

$$\mathrm{Tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{ii}$$

Soit A, B deux matrices carrées d'ordre n.
1. Montrer que pour tous scalaires $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, $\mathrm{Tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha \mathrm{Tr}(A) + \beta \mathrm{Tr}(B)$.
2. Montrer que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.
3. Montrer qu'il n'existe pas de matrices A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB - BA = I_n$.

Exercice 12.17 : Trouver toutes les matrices $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 7 & 6 \\ -1 & 8 & 4 \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 12.18 : Centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ —.** Le but de cet exercice est de déterminer le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ c'est-à-dire l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $A \times M = M \times A$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Déterminer les matrices $A \times E_{i,j}$ et $E_{i,j} \times A$.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Démontrer que A appartient au centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si A commute avec toutes les matrices élémentaires $E_{i,j}$.

3. Conclure.

Indications

Ex. 12.1

On rappelle que le produit matriciel est associatif.

Ex. 12.2

L'indice j a un rôle important à jouer !

Ex. 12.4

Si $A = (a_{i,j})$ et $D = (d_{i,j})$, on isole le terme d'indice (p,q) de chacun des produits AD et DA.

Ex. 12.5

2. *Commencez par calculer les premières puissances de B*

3. *On décomposera C en $J + I_2$ puis la balle est dans votre camp !*

Ex. 12.6

Montrez que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est arithmétique.

Ex. 12.9

On pourra utiliser des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice M.

Ex. 12.10

On adoptera le point de vue des systèmes d'équations linéaires. ...

Corrigé des vrai/faux

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F	F	F	F	F	F	F	F	V	F

1. Eh non ! $(A+B)^2 = A+AB+BA+B^2$ mais le plus souvent, les matrices A et B ne commutent pas.
2. Non plus ! $(AB)^2 = ABAB$ mais le plus souvent, les matrices A et B ne commutent pas.
3. Le produit de deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ n'existe pas si $n \neq p$, donc de là à être stable pour le produit ...

4. C'est faux ! Par exemple, prendre $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Le produit de matrices inversibles est inversible et l'inverse d'un produit est le produit des inverses ... mais dans l'autre sens ! $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$.

6. On a envie de dire oui ! Pourtant I_2 qui est diagonale et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ne commutent pas car le produit n'existe pas !
7. On sait que la transposée de $A \times B$ est $B^T \times A^T$. L'assertion est donc fausse en général.
8. Pour celui qui n'est pas convaincu que c'est faux, qu'il prenne $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et qu'il fasse le produit !
10. Si C est inversible, c'est vrai sinon c'est faux. Prendre par exemple $C \neq O_n$ telle que $C^2 = O_n$, $A = C$ et $B = O_n$, on a bien $AC = BC = O_n$ et pourtant $A \neq B$.

Erreurs classiques

- En général $A \times B \neq B \times A$, même lorsque les deux produits matriciels sont définis.
- $(A \times B)^T \neq A^T \times B^T$.
- $A \times B = 0 \not\Rightarrow A = 0$ ou $B = 0$.
- La formule du binôme et l'identité géométrique ne sont valides que pour des matrices carrées A et B qui commutent.

Corrigé des exercices

Exercice 12.1

On aurait pu commencer par le produit des deux premières matrices, c'est alors plus long !

On remarque que le produit cherché est une matrice de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Puis, on effectue : $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On en déduit que le produit cherché vaut $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 12.2

On commence par remarquer que le produit est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

La matrice $E_{i,j}$ n'est constituée que de lignes nulles sauf la ligne L_i, où il y a un 1 en position j. Son produit avec $E_{j,k}$ est donc une matrice dont toutes les lignes différentes de celle en position i sont nulles. Quant à cette ligne, comme toutes les colonnes de $E_{j,k}$ sont nulles sauf C_k, elle est elle aussi constituée de 0 sauf le terme en position k qui vaut $1 \times 1 = 1$. En effet, le terme 1 apparaît en position j sur la ligne L_i de $E_{i,j}$ et en position j sur la colonne C_k de $E_{j,k}$. Ainsi : $E_{i,j} \times E_{j,k} = E_{i,k}$.

Exercice 12.3

1. Notons C le produit AB et déterminons ses coefficients. Soit $(i, \in [\![1, n]\!]^2$, on a par définition du produit matriciel

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} \omega^{(i-1)(k-1)} \ \omega^{-(k-1)(j-1)} = \sum_{k=1}^{n} \omega^{(i-j)(k-1)}$$

- Si $i = j$, $c_{i,i} = \sum\limits_{k=1}^{n} 1 = n$.
- Si $i \neq j$, l'identité géométrique permet de conclure :

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \left(\omega^{(i-j)}\right)^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\omega^{(i-j)}\right)^{k} = \frac{\left(\omega^{(i-j)}\right)^n - 1}{\omega^{(i-j)} - 1}$$

Comme ω^{i-j} est une racines n-ièmes de l'unité, $\left(\omega^{(i-j)}\right)^n = 1$ et $c_{i,j} = 0$.

Finalement, $c_{i,j} = n\ \delta_{i,j}$. Ceci étant vrait pour tout couple (i, j), on a $AB = nI_n$.

2. D'après le **théorème 12.14**, A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{n}B$. ▲

Exercice 12.4

On pose $A = (a_{i,j})$ et $D = (d_{i,j})$ avec $d_{i,j} = 0$ si $i \neq j$.
Soit $(p, q) \in [\![1, n]\!]^2$.

- Le terme d'indice (p, q) de AD est $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{p,k} d_{k,q} = a_{p,q} d_{q,q}$.
- Le terme d'indice (p, q) de DA est $\sum\limits_{k=1}^{n} d_{p,k} a_{k,q} = d_{p,p} a_{p,q}$.

Comme $AD = DA$, ces termes sont égaux. Dans le cas $p \neq q$, comme $d_{p,p} \neq d_{q,q}$, nécessairement $a_{p,q} = 0$. A est bien diagonale. ▲

Par contre dans le cas $p = q$, on n'a aucune condition.

Exercice 12.5

1. On peut penser à décomposer A sous la forme $A = 2I_2 + J$, où $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Comme $2I_2$ et J commutent et que $J^2 = O_2$, on a tout intérêt à appliquer la **formule du binôme**.

On peut aussi deviner en faisant un lot de produits successifs !

$$A^n = (J + 2I_2)^n = 2^n I_2 + n2^{n-1} J = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

2. $B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, $B^4 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B^5 = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$, $B^6 = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$, $B^7 = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 16 & 0 \end{pmatrix}$. Cela vient ! On conjecture que :

Comme nous croyons fortement à l'indication, calculons les premières puissances, peut-être une idée viendra-t-elle ?

$$\forall n \in \mathbb{N},\ B^{2n} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \text{ et } B^{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 2^n \\ 2^{n+1} & 0 \end{pmatrix}$$

Raisonnons par récurrence.

- **Initialisation :** Pas de problème, c'est déjà fait !
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $B^{2n} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$ et $B^{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 2^n \\ 2^{n+1} & 0 \end{pmatrix}$.

$$B^{2n+2} = B^{2n+1}B = \begin{pmatrix} 0 & 2^n \\ 2^{n+1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 \\ 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$$

$$B^{2n+3} = B^{2n+2}B = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 \\ 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2^{n+1} \\ 2^{n+2} & 0 \end{pmatrix}$$

- **Conclusion :** Par récurrence, nous avons démontré notre conjecture.

3. On peut décomposer C sous la forme $C = I_2 + J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$.

Comme I_2 et J commutent, la **formule du binôme** s'applique :

Pour tout $k \geqslant 2$, $J^k = 0_2$.

$$C^n = (I_2 + J)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I_2^{n-k} \times J^k = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} J^k = I_2 + nJ$$

Ainsi $C^n = \begin{pmatrix} 1+4n & -4n \\ 4n & -4n+1 \end{pmatrix}$. ▲

Exercice 12.6

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. On raisonne par récurrence.

- **Initialisation** : Lorsque $n = 1$, $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$ conviennent.

• **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que A^n soit bien de la forme $\begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1+a_n & a_n+b_n \\ 0 & 1 & 1+a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui est bien de la forme attendue.

• **Conclusion** : Par récurrence, nous pouvons conclure que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$, A^n est de la forme $A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. La question précédente nous fournit de plus les relations $a_{n+1} = 1 + a_n$ et $b_{n+1} = a_n + b_n$. En particulier, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est arithmétique de raison 1. Comme $a_1 = 1$, il s'ensuit que $a_n = a_1 + n - 1 = n$.

Il y a « télescopage » des termes.

$$\begin{cases} b_n = n - 1 + b_{n-1} \\ b_{n-1} = n - 2 + b_{n-2} \\ \quad\vdots \qquad \vdots \\ b_2 = b_1 + 1 \\ b_1 = b_1 \end{cases}$$

En ajoutant membre à membre toutes ces égalités, et tenant compte de $b_1 = 0$, il vient :

$$b_n = (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 + b_1 = \frac{(n-1)\,n}{2}.$$

Ainsi, pour $n \geqslant 1$, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{(n-1)n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. ▲

Exercice 12.7

1. Adoptons le point de vue SEL. On considère un second membre paramétré (a, b, c) et on résout le système

Méthode 12.3

$$(S) \begin{cases} x & +y & +z & = & a \\ -x & +2y & +z & = & b \\ & y & -z & = & c \end{cases}$$

L'algorithme de Gauss donne :

$$(S) \iff \begin{cases} x & +y & +z & = & a \\ & 3y & +2z & = & a+b \\ & y & -z & = & c \end{cases} \iff \begin{cases} x & +y & +z & = & a \\ & y & -z & = & c \\ & & 5z & = & a+b-3c \end{cases}$$

Ce dernier système est triangulaire supérieur à coefficients diagonaux tous non nuls. C'est un système de Cramer et par conséquent, la matrice A est bien inversible. On achève la résolution de (S) par remontée. Il vient :

$$(S) \iff \begin{cases} x & & & = & \frac{1}{5}(3a - 2b + c) \\ & y & & = & \frac{1}{5}(a + b + 2c) \\ & & z & = & \frac{1}{5}(a + b - 3c) \end{cases}$$

Par identification, $A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

2. Mettons en œuvre l'algorithme de Gauss-Jordan.

Le calcul se présente dans deux colonnes. À gauche, on marque la matrice à inverser, B ici. À droite, on note la matrice identité.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2 \quad \left(\begin{array}{rrr|rrr} 0 & 8 & -2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - 8L_3 \quad \left(\begin{array}{rrr|rrr} 0 & 0 & 14 & 1 & 3 & -8 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_2 \\ L_2 \leftarrow L_3 \\ L_3 \leftarrow L_1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 14 & 1 & 3 & -8 \end{array}\right)$$

Au moyen d'opérations élémentaires sur les lignes, effectuées sur les deux matrices en parallèle, on échelonne la matrice de gauche.

À ce stade, nous avons établi que B est équivalente (à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes) à une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux tous non nuls : B est donc inversible. Pour calculer B^{-1} nous « remontons » vers I_3.

On poursuit les opérations élémentaires, cette fois dans le but de transformer la matrice de gauche en l'identité.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{14} & \frac{3}{14} & -\frac{8}{14} \end{array}\right)$$

$$L_3 \leftarrow \tfrac{1}{14}L_3$$

$$\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 2 & 0 & \frac{1}{14} & \frac{17}{14} & -\frac{8}{14} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{14} & \frac{6}{14} & -\frac{2}{14} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{14} & \frac{3}{14} & -\frac{8}{14} \end{array}\right)$$

Lorsque c'est fait, on lit B^{-1} dans la colonne de droite.

$$L_1 \leftarrow 2L_2 - L_1 \quad \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{14} & -\frac{5}{14} & \frac{4}{14} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{14} & \frac{6}{14} & -\frac{2}{14} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{14} & \frac{3}{14} & -\frac{8}{14} \end{array}\right)$$

Finalement, B est inversible et

$$B^{-1} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 3 & -5 & 4 \\ 2 & 6 & -2 \\ 1 & 3 & -8 \end{pmatrix}.$$

3. Pour vérifier l'inversibilité de C on procède par opérations élémentaires en lignes comme expliqué dans la **méthode 12.6** :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & -4 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, C est équivalente (par opérations en lignes) à une matrice triangulaire non inversible. C n'est donc pas inversible. ▲

Corrigé

Exercice 12.8

On met à l'œuvre la **méthode 12.3**.

1. On considère un second membre paramétré (a, b, c) et on résout le système $(S)\begin{cases} 2x+2y+3z &= a \\ x+y+4z &= b \\ x-2y+z &= c \end{cases}$. L'algorithme de Gauss donne :

$$(S) \iff \begin{cases} x+y+4z &= b \\ 3y+3z &= b-c \\ 5z &= 2b-a \end{cases} \iff \begin{cases} x &= \frac{1}{15}\left[\ 9a-8b+5c\right] \\ y &= \frac{1}{15}\left[\ 3a-\ b-5c\right] \\ z &= \frac{1}{15}\left[-3a+6b+0c\right] \end{cases}$$

Par identification, $A^{-1} = \dfrac{1}{15}\begin{pmatrix} 9 & -8 & 5 \\ 3 & -1 & -5 \\ -3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Comme préconisé dans la **méthode 12.4**, on effectue en parallèle le calcul, à partir de A (colonne de gauche) et de I_3 (à droite) :

Vous pouvez détailler plus les étapes du calcul, à condition de bien identifier à chaque étape, les opérations élémentaires sur les lignes que vous souhaitez effectuer, et bien vérifier que vous les appliquez aux deux colonnes du calcul.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_1 \leftrightarrow L_2 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_2 \\ L_2 \leftarrow 2L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$L_2 \leftrightarrow L_3 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

À ce stade, nous avons établi que A est équivalente à une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux tous non nuls : A est donc inversible et nous allons (re-) calculer A^{-1} en remontant.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} L_1 \leftarrow 15L_1 \\ L_2 \leftarrow 5L_2 \\ L_3 \leftarrow 3L_3 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 15 & 15 & 60 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 15 & 15 & 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 15 & -3 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 4L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 15 & 15 & 0 & 12 & -9 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 3 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 15 & -3 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 15 & 0 & 0 & 9 & -8 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 3 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 15 & -3 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

Finalement, en divisant, les deux matrices obtenues par 15, nous retrouvons bien l'expression de A^{-1}.

3. On commence par calculer les puissances de A :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 17 \\ 7 & -5 & 11 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 35 & -16 & 44 \\ 20 & -13 & 12 \\ -4 & 8 & -9 \end{pmatrix}$$

En effectuant la combinaison linéaire, on obtient $A^3 - 4A^2 + 8A - 15I_3 = O_3$, soit $A\left(A^2 - 4A + 8I_3\right) = 15I_3$. Ainsi, A est inversible et que :

$$A^{-1} = \frac{1}{15}\left(A^2 - 4A + 8I_3\right) = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 9 & -8 & 5 \\ 3 & -1 & -5 \\ -3 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

▲

Exercice 12.9

On va triangulariser la matrice M en procédant par opérations élémentaires en lignes.

Voir la **méthode 12.6**.

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda^2 & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 \end{pmatrix}$$

- Si $\lambda = 1$, alors $M \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Cette dernière matrice n'étant pas inversible, M ne l'est pas non plus.
- Si $\lambda \neq 1$, nous pouvons diviser par $1 - \lambda$, pour obtenir

$$M \sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1+\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda+2 \end{pmatrix}.$$

Cette dernière matrice est triangulaire et inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls, c'est-à-dire si $\lambda \neq -2$.

En définitive, nous pouvons conclure que M est inversible si et seulement si $\lambda \notin \{-2,\ 1\}$. ▲

Exercice 12.10

Notons $X = (x_1\ x_2\ \cdots\ x_n)^T$ et $B = (b_1\ b_2\ \cdots\ b_n)^T$ deux matrices colonnes. Pour vérifier l'inversibilité de la matrice A et calculer son inverse, nous allons résoudre le système

C'est la **méthode 12.3**.

$$(S) \quad AX = B$$

On a :

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 x_n & = & b_1 \\ \lambda_2 x_{n-1} & = & b_2 \\ & \vdots & \\ \lambda_n x_1 & = & b_n \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & \frac{1}{\lambda_n} b_n \\ x_2 & = & \frac{1}{\lambda_{n-1}} b_{n-1} \\ & = & \\ x_n & = & \frac{1}{\lambda_1} b_1 \end{array}\right.$$

Le système (S) admet une unique solution, il est donc de Cramer, ce qui revient à dire que A est inversible. On détermine A^{-1} par identification :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{\lambda_n} \\ \vdots & \iddots & \frac{1}{\lambda_{n-1}} & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ \frac{1}{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

▲

Exercice 12.11

L'inverse de A est $B - I_n$ car on remarque que :

$$AB = A + I_n \Rightarrow A(B - I_n) = I_n$$

Donc $B - I_n$ est inverse à droite de A donc est l'inverse de A. ▲

Exercice 12.12

1. Notons pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$ la propriété que u_n s'écrit sous la forme d'une fraction $u_n = \dfrac{p_n}{q_n}$ où p_n et q_n sont des entiers naturels non nuls.

- **Initialisation :** Lorsque $n = 0$, $p_0 = 1$ et $q_0 = 2$ conviennent.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$. Alors

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2} = \frac{2\frac{p_n}{q_n} + 1}{\frac{p_n}{q_n} + 2} = \frac{2p_n + q_n}{p_n + 2q_n}$$

Comme p_n et q_n sont des entiers non nuls, il en va de même de $2p_n + q_n$ et $p_n + 2q_n$. On peut donc poser :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} p_{n+1} & = & 2p_n + q_n \\ q_{n+1} & = & p_n + 2q_n \end{array} \right.$$

- **Conclusion :** Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on a montré que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie. En outre la démonstration de l'hérédité a permis d'établir la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} p_{n+1} & = & 2p_n + q_n \\ q_{n+1} & = & p_n + 2q_n \end{array} \right.$$

Introduisons la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ de sorte que pour tout entier n, on a

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$$

2. Pour calculer les puissances successives de A, on peut penser à décomposer A sous la forme $A = I_2 + J$, où $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On observe que les puissances de J sont simples à calculer puisque pour tout entier $k \in \mathbb{N}^\star$, $J^k = 2^{k-1}J$. Comme I_2 et J commutent, la **formule du binôme** donne :

$$\begin{aligned} A^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k = I_2 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} J^k = I_2 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{k-1} J \\ &= I_2 + \frac{1}{2}\Big(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^k\Big) J = I_2 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{k-1} J = I_2 + \frac{1}{2}(3^n - 1)J \end{aligned}$$

Finalement

$$A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n + 1 & 3^n - 1 \\ 3^n - 1 & 3^n + 1 \end{pmatrix}$$

3. Une récurrence immédiate montre que $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix}$, ce qui donne :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} p_n &= \frac{1}{2}\left(3^{n+1}-1\right) \\ q_n &= \frac{1}{2}\left(3^{n+1}+1\right) \end{cases}$$

En particulier, $u_n = \dfrac{3^{n+1}-1}{3^{n+1}+1} = \dfrac{1-3^{-n-1}}{1+3^{-n-1}}$.

4. (u_n) est donc convergente de limite 1. ▲

Exercice 12.13

1. $A = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

2. La démonstration sera par récurrence :

- **Initialisation** : Pour $n = 0$, on a $A^0 U_0 = IU_0 = U_0$.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $U_n = A^n U_0$. Montrons que $U_{n+1} = A^{n+1} U_0$. Partons de U_{n+1} :

$$U_{n+1} = AU_n = A\left(A^n U_o\right) = \left(AA^n\right) U_0 = A^{n+1} U_0$$

- **Conclusion** : Par récurrence, on a montré que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $U_n = A^n U_0$

3. $P = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$. À l'aide de la méthode de son choix, on vérifie que P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{2}{35} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}$

On applique par exemple la **méthode 12.3**.

4. $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{2}{35} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,3 \end{pmatrix}$.

D étant une matrice diagonale, on en déduit aisément que $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,3^n \end{pmatrix}$.

5. En multipliant à gauche par P, et à droite par P^{-1}, l'égalité de la question précédente, on obtient :

$$PDP^{-1} = P\left(P^{-1}AP\right)P^{-1} = \left(P^{-1}P\right)A\left(P^{-1}P\right) = A$$

6. Faisons une démonstration par récurrence.

- **Initialisation** : Pour $n = 0$, on a $A^0 = I$ et $PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

Montrons qu'alors $A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$
Partons de A^{n+1} :

$$\begin{aligned} A^{n+1} = AA^n &= A\left(PD^nP^{-1}\right) = PDP^{-1}\left(PD^nP^{-1}\right) \\ &= PD\left(P^{-1}P\right)D^nP^{-1} = PDD^nP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$

• **Conclusion** : Par récurrence, on a montré que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

7.

$$\begin{aligned} A^n = PD^nP^{-1} &= \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{2}{35} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 5\times 0,3^n \\ 2 & -5\times 0,3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{2}{35} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{5}{7}+\frac{2}{7}\times 0,3^n & \frac{5}{7}-\frac{5}{7}\times 0,3^n \\ \frac{2}{7}-\frac{2}{7}\times 0,3^n & \frac{2}{7}+\frac{5}{7}\times 0,3^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Utilisons $U_n = A^nU_0$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7}+\frac{2}{7}\times 0,3^n & \frac{5}{7}-\frac{5}{7}\times 0,3^n \\ \frac{2}{7}-\frac{2}{7}\times 0,3^n & \frac{2}{7}+\frac{5}{7}\times 0,3^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,4 \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$x_n = 0,6\times\left(\frac{5}{7}+\frac{2}{7}\times 0,3^n\right)+0,4\times\left(\frac{5}{7}-\frac{5}{7}\times 0,3^n\right) = \frac{5}{7}+\frac{10}{7}\times 0,3^n$$

$$y_n = 0,6\times\left(\frac{2}{7}-\frac{2}{7}\times 0,3^n\right)+0,4\times\left(\frac{2}{7}+\frac{5}{7}\times 0,3^n\right) = \frac{2}{7}+\frac{0,8}{7}\times 0,3^n$$

Compte tenu de $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,3^n = 0$, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \dfrac{5}{7}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \dfrac{2}{7}$.

▲

Exercice 12.14

1. En utilisant une méthode au choix, on montre que P est inversible et que

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

On calcule alors $P^{-1}AP$:

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -12 & 16 & -4 \\ 6 & -9 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Finalement, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Par construction $D = P^{-1}AP$ d'où l'on tire que $A = PDP^{-1}$. Ainsi $A^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^2P^{-1}$. Une récurrence immédiate montre que

pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

Comme $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$, on obtient

$$\begin{aligned} A^n &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -12 & 16 & -4 \\ 6 & -9 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2^n & 3^n \\ 1 & 2^{n+1} & 3^{n+1} \\ 1 & 2^{n+2} & 3^{n+2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -12 & 16 & -4 \\ 6 & -9 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6-6\cdot 2^n+2\cdot 3^n & -5+8\cdot 2^n-3^n & 1-2\cdot 2^n+3^n \\ 6-6\cdot 2^{n+1}+2\cdot 3^{n+1} & -5+8\cdot 2^{n+1}-3^{n+1} & 1-2\cdot 2^{n+1}+3^{n+1} \\ 6-6\cdot 2^{n+2}+2\cdot 3^{n+2} & -5+8\cdot 2^{n+2}-3^{n+2} & 1-2\cdot 2^{n+2}+3^{n+2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = AU_n \end{aligned}$$

4. La suite (U_n) est une suite « géométrique » de matrices colonnes. Par conséquent, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $U_n = A^nU_0$. Compte tenu de l'expression de A^n calculée précédemment, il vient :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{2}\left[0\cdot(6-6\cdot 2^n+2\cdot 3^n) + 1\cdot(-5+8\cdot 2^n-3^n) + 2\cdot(1-2\cdot 2^n+3^n)\right] \\ &= -\frac{3}{2} + 2^{n+1} - \frac{1}{2}3^n \end{aligned}$$

▲

Exercice 12.15

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $M(x)M(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -(x+y)^2 & 1 & x+y \\ -2(x+y) & 0 & 1 \end{pmatrix} = M(x+y)$ ce qui permet d'écrire que $M(x)M(-x) = M(0) = I_3$. On peut conclure que $M(x)$ est inversible, d'inverse $M(-x)$. ▲

On dit que $(G, \times)$ est un groupe. On dit même que G est un sous-groupe du groupe linéaire !

Exercice 12.16

Notons $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ ces deux matrices carrées d'ordre n.

1. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$. Comme $(\alpha A + \beta B = (\alpha a_{i,j} + \beta b_{i,j})$ sa trace est par définition :

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(\alpha A + \beta B) &= \sum_{i=1}^{n}(\alpha a_{i,i} + \beta b_{i,i}) = \sum_{i=1}^{n}\alpha a_{i,i} + \sum_{i=1}^{n}\beta b_{i,i} \\ &= \alpha\sum_{i=1}^{n} a_{i,i} + \beta\sum_{i=1}^{n} b_{i,i} = \alpha\mathrm{Tr}(A) + \beta\mathrm{Tr}(B) \end{aligned}$$

On utilise les règles de calcul avec les sommes finies.

2. Par définition du produit matriciel, on a pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} \quad \text{et} \quad (BA)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} b_{i,k} a_{k,j}$$

Les coefficients à la i-ème ligne et i-ème colonne des deux matrices seront donc :

$$(AB)_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,i} \quad \text{et} \quad (BA)_{j,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j} b_{j,k}$$

Pour calculer la trace des matrices AB et BA sommons leurs coefficients diagonaux :

$$\mathrm{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,i} = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} b_{j,i}$$

$$\mathrm{Tr}(BA) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{k,j} b_{j,k} = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} b_{j,i}$$

Ces deux sommes sont bien égales.

3. Supposons par l'absurde que de telles matrices existent. De l'égalité $AB - BA = I_n$, on tirerait, en égalisant les traces des deux membres de l'égalité $\mathrm{Tr}(I_n) = \mathrm{Tr}(AB - BA) = \mathrm{Tr}(AB) - \mathrm{Tr}(BA) = 0$, ce qui est absurde vu que $\mathrm{Tr}(I_n) = 1 + 1 \cdots + 1 = n$. ▲

Exercice 12.17

On cherche X sous la forme d'une matrice à coefficients inconnus :

$$X = \begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & w \\ a & b & c \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$X \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 7 & 6 \\ -1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

si et seulement si

$$\begin{pmatrix} -x-y+z & 3-x+5y-2z & 2-2x+2y \\ 1-u-v+w & 7-u+5v-2w & 6-2u+2v \\ -1-a-b+c & 8-a+5b-2c & 4-2a+2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 7 & 6 \\ -1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

Les calculs intermédiaires ne sont pas écrits mais faîtes-les !

Il reste à identifier, ce qui donne un système linéaire de 9 équations à 9 inconnues.

Après résolution, les solutions sont toutes les matrices de la forme

$$X = \begin{pmatrix} a & a-1 & 2a-1 \\ b & b-3 & 2b-4 \\ c & c-2 & 2c-1 \end{pmatrix},$$

où a, b et c sont trois réels arbitraires. ▲

1. Écrivons $A = (a_{i,j})$ et explicitons les coefficients des matrices $A \times E_{i,j}$ et $E_{i,j} \times A$. Soit $(p,q) \in [\![1,n]\!]$, on a :

$$\left(A \times E_{i,j}\right)_{p,q} = \sum_{k=1}^{n} a_{p,k}\ (E_{i,j})_{k,q} = \sum_{k=1}^{n} a_{p,k}\ \delta_{i,k}\ \delta_{j,q} = a_{p,i}\ \delta_{j,q}$$

$$\left(E_{i,j} \times A\right)_{p,q} = \sum_{k=1}^{n} (E_{i,j})_{p,k} \times a_{k,q} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,q}\ \delta_{i,p}\ \delta_{j,k} = a_{j,q}\ \delta_{i,p}$$

Le symbole de Kronecker $\delta_{i,k}$ vaut 1 si $i = k$ et 0 sinon.

Dans la somme indexée par k, seul le terme correspondant à l'indice $k = i$ contribue !

Ceci étant vrai pour tout couple (p,q), cela signifie que :

- les colonnes de la matrice $A \times E_{i,j}$ sont toutes nulles, à l'exception de la j-ième (lorsque $q = j$), qui vaut la i-ième colonne de A ;
- les lignes de la matrice $E_{i,j} \times A$ sont toutes nulles, à l'exception de la i-ième (lorsque $p = i$), qui vaut la i-ième ligne de A.

Ainsi,

- la matrice $A \times E_{i,j}$ est obtenue à partir de la matrice nulle en remplaçant sa j-ème colonne par la i-ème de A ;
- la matrice $E_{i,j} \times A$ est obtenue à partir de la matrice nulle en remplaçant sa i-ème ligne par la j-ème de A.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Il est clair que si A commute avec toutes les matrices carrées, en particulier, A doit commuter avec toutes les matrices élémentaires $E_{i,j}$. Réciproquement, supposons que A commute avec les $E_{i,j}$ et montrons que A commute avec toutes les matrices carrées.
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre n. M s'écrit comme combinaison linéaire des $E_{i,j}$:

$$M = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} m_{i,j} E_{i,j}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} A \times M = A \times \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} m_{i,j} E_{i,j} &= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} m_{i,j} A \times E_{i,j} \\ &= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} m_{i,j} E_{i,j} \times A = \left(\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} m_{i,j} E_{i,j} \right) \times A \\ &= M \times A \end{aligned}$$

Ainsi, la matrice A commute avec M.
Ceci étant vrai pour toute matrice M, on a bien établi que A appartient au centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si A commute avec les matrices élémentaires.

3. Soit A une matrice carrée.
Supposons que A appartient au centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, tel que $i \neq j$. Alors

$$A \times E_{i,j} = E_{i,j} \times A$$

- D'après la première question, le coefficient $a_{j,i}$ apparaît dans la matrice $A \times E_{i,j}$ en j-ème ligne ...Or la j-ème ligne de la matrice $A \times E_{i,j}$ est nulle ! Conclusion, $a_{j,i} = 0$.

- D'autre part, le coefficient $a_{i,i}$ apparaît dans la matrice $A \times E_{i,j}$ en i-ème ligne et j-ième colonne. Or le coefficient de la i-ème ligne et j-ième colonne de la matrice $A \times E_{i,j}$ est $a_{j,j}$! Conclusion $a_{i,i} = a_{j,j}$.

Cec étant vrai pour tous les couples $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, tel que $i \neq j$, on en déduit que la matrice A doit être diagonale et que ses coefficients diagonaux sont tous égaux. Autrement dit, A est une matrice scalaire.

Réciproquement, il est évident que les matrices scalaires de la forme $\lambda \cdot I_n$ commutent avec toutes les matrices.

Pour conclure, les matrices A qui commutent avec toutes les matrices carrées sont les matrices scalaires. ▲

Chapitre 13

Polynômes et fractions rationnelles

UN MATHÉMATICIEN

De son vrai nom Niccolo Fontana, **Tartaglia** est issu d'une famille pauvre. Devenu adulte, il gagne sa vie en enseignant les mathématiques et en donnant des conseils à des commerçants pour mieux gérer leurs affaires. La connaissance de la formule de résolution des équations polynomiales du troisième degré lui permet de remporter de nombreux concours. C'est cependant le mathématicien et médecin milanais Jérôme Cardan qui publie cette formule en 1545.

Un peu d'histoire

Les premiers polynômes sont apparus dans des problèmes se ramenant à des équations polynomiales du second ou du troisième degré. Pour le second degré, Brahmagupta au VIIe siècle puis Al-Khwarizmi au début du IXe siècle en ont donné les solutions. Les mathématiciens italiens de la Renaissance, Cardan, Tartaglia et Ferrari, ont résolu celles du troisième et du quatrième degré.

Par la suite, les polynômes ont joué un rôle important en analyse sous la forme de fonctions, en particulier pour obtenir des approximations de fonctions plus complexes : ce sont les développements limités introduit par Joseph Lagrange en 1797. Il faut attendre le tournant du XXe siècle pour voir introduits les polynômes formels, c'est-à-dire détachés de la notion de fonction ou d'équation.

Objectifs

les incontournables

- Factorisation des polynômes :
  - effectuer une division euclidienne de polynômes ;
  - déterminer la décomposition primaire d'un polynôme.
- Racines d'un polynôme :
  - déterminer l'ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme ;
  - utiliser les liens entre divisibilité et racines d'un polynôme.
- Déterminer la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle.

Résumé de cours

Ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps de base, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Opérations dans $\mathbb{K}[X]$ et degré des polynômes

Définition : *Un polynôme est une expression de la forme $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$, où n est un entier naturel, $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ sont les* ***coefficients de P*** *et X est l'**indéterminée**.*

*Le **degré** d'un polynôme non nul P est le plus grand entier k tel que $a_k \neq 0$. On note $d^\circ P$ cet entier. On convient que le polynôme nul a pour degré $-\infty$.*

Notation : *On note également P la fonction polynomiale associée.*

Définition : *Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_kX^k$, $Q = \sum_{k=0}^{m} b_k\ X^k$ deux polynômes et $\lambda \in \mathbb{K}$, on définit :*

- $P + Q = \sum_{k=0}^{\max\{n,m\}} (a_k + b_k)\ X^k$
- $P' = \sum_{k=1}^{n} k.a_kX^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)a_{k+1}X^k$
- $\lambda \cdot P = \sum_{k=0}^{n} \lambda\ a_k\ X^k$
- $P \times Q = \sum_{k=0}^{n+m} c_k\ X^k$, *où* $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i \times b_{k-i}$

Proposition 13.1.— Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}^\star$. Alors

- $d^\circ(P + Q) \leqslant \max\{d^\circ P, d^\circ Q\}$ avec égalité si $d^\circ P \neq d^\circ Q$
- $d^\circ P' = d^\circ P - 1$ si P est non constant, $d^\circ P' = -\infty$ sinon
- $d^\circ(\lambda P) = d^\circ P$
- $d^\circ(P \times Q) = d^\circ P + d^\circ Q$

Dérivées successives et formule de Taylor

Proposition 13.2.— Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $P = \sum_{k=0}^{n} a_kX^k$. Alors $P^{(p)}$ est nul si $p > n$ et si $p \in [\![0, n]\!]$,

$$P^{(p)} = \sum_{k=p}^{n} a_k\ k(k-1)\ldots(k-p+1)\ X^{k-p} = \sum_{k=p}^{n} a_k\ \frac{k!}{(k-p)!}\ X^{k-p}$$

Proposition 13.3.— Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, $n \in \mathbb{N}$. Alors :

- $(P + Q)^{(n)} = P^{(n)} + Q^{(n)}$
- $(P \times Q)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} \times Q^{(n-k)}$

Théorème 13.4.— Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré inférieur ou égal à n et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors :

$$\boxed{P = P(\alpha) + \frac{P'(\alpha)}{1!}\ (X - \alpha) + \frac{P''(\alpha)}{2!}\ (X - \alpha)^2 + \cdots + \frac{P^{(n)}(\alpha)}{n!}\ (X - \alpha)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X - \alpha)^k}$$

Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$

Définition : *Soit $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$ deux polynômes. B **divise** A s'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = B \times Q$. On note $B \mid A$ cette relation.*

Théorème 13.5.— Division euclidienne —. Soit $(A, B) \in \mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})$.

$$\boxed{\text{Il existe un couple } (Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2, \text{ unique tel que } \begin{cases} A = B \times Q + R \\ d^\circ R < d^\circ B \end{cases}}$$

Remarque : si $B \neq 0$, alors $B \mid A$ ssi le reste de la division euclidienne de A par B est nul.

■ Racines d'un polynôme

Définition : *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. α est **racine** de P si $P(\alpha) = 0$.*

Théorème 13.6.— Caractérisation des racines —. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

$$\boxed{\alpha \text{ est racine de } P \text{ si et seulement si } (X - \alpha) \text{ divise } P}$$

Définition : *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $\alpha \in \mathbb{K}$. **L'ordre de multiplicité** de α comme racine de P est le plus grand entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $(X - \alpha)^k$ divise P.*

Théorème 13.7.— Caractérisation des racines multiples —. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $k \in \mathbb{N}^\star$.

$$\boxed{\alpha \text{ est racine d'ordre } k \text{ de } P \quad \text{ssi} \quad \begin{cases} \bullet \quad P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0 \\ \bullet \quad P^{(k)}(\alpha) \neq 0 \end{cases}}$$

Corollaire 13.8.— Nombre de racines et degré —. Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$.

- Si $d^\circ P = n$, alors P admet au plus n racines comptées avec multiplicité.
- Si le nombre de racines de P comptées avec multiplicité est supérieur à $n + 1$ alors $P = 0$.

Polynôme scindé

Définition : *Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est **scindé** s'il peut s'écrire sous la forme d'un produit de polynômes de degré 1 : $P = \lambda\,(X - x_1) \times \cdots \times (X - x_n)$.*

Théorème 13.9.— Soit $P = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0 = a_n\,(X - x_1) \times \cdots \times (X - x_n)$ un polynôme scindé de degré $n \in \mathbb{N}^\star$ ($a_n \neq 0$). Alors

- La somme des racines de P est donnée par $x_1 + \cdots + x_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$;
- Le produit des racines de P est donné par $x_1 \times \cdots \times x_n = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n}$.

Proposition 13.10.— Système somme-produit —. Soit $(s, p) \in \mathbb{K}^2$.
Les solutions du système $\begin{cases} x_1 + x_2 &= s \\ x_1 \times x_2 &= p \end{cases}$ sont les couples $(x_1, x_2) \in \mathbb{K}^2$, où x_1 et x_2 sont les solutions –éventuellement confondues– de l'équation du deuxième degré

$$x^2 - sx + p = 0.$$

■ Factorisation des polynômes

Théorème fondamental de l'algèbre et décompositions primaires

Théorème 13.11.— Tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ **non constant** admet une racine complexe.

Théorème 13.12.— Décomposition primaire d'un polynôme —. Tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ se factorise de façon unique – à l'ordre des facteurs près – sous la forme

- $[\mathbb{K} = \mathbb{C}]$ $$P = a\,(X-\alpha_1)^{p_1} \times \cdots \times (X-\alpha_n)^{p_n} = a \prod_{i=1}^{n} (X-\alpha_i)^{p_i},$$
  où $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont les racines complexes distinctes de P de multiplicités respectives $p_1, ..., p_n$.
- $[\mathbb{K} = \mathbb{R}]$ $$P = a \prod_{i=1}^{n} (X-\alpha_i)^{p_i} \times \prod_{j=1}^{m} \left(X^2+\beta_j X+\gamma_j\right)^{q_j},$$
  où $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont les racines réelles distinctes de P de multiplicités respectives $p_1, \ldots, p_n$ et les polynômes à coefficients réels $\left(X^2+\beta_j X+\gamma_j\right)$ ne possèdent pas de racines réelles.

Corollaire 13.13.— Polynômes irréductibles de $\mathbb{K}[X]$ —.

- $[\mathbb{K} = \mathbb{C}]$ Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.
- $[\mathbb{K} = \mathbb{R}]$ Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 de discriminant strictement négatif.

■ Fractions rationnelles

Définition : *Une **fraction rationnelle** à coefficients dans $\mathbb{K}$ et d'indéterminée X est une expression de la forme $F = P/Q$, où $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ et Q n'est pas le polynôme nul. F est **présentée sous forme irréductible** si de plus P et Q sont premiers entre eux et Q est unitaire.*

Définition : *Soit $F = P/Q$ une fraction rationnelle irréductible et $\alpha \in \mathbb{K}$. α est un **zéro** (resp. **pôle**) de F de multiplicité p si α est une racine de P (resp. Q) d'ordre de multiplicité p.*

Théorème 13.14.— Décomposition en éléments simples —. Soit $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ une fraction rationnelle non nulle présentée sous forme irréductible. On suppose que Q est scindé à racines simples décomposé sous la forme $Q(X) = \prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i)$. Alors, il existe $a_1, \ldots, a_n$ dans $\mathbb{K}$, un polynôme $E \in \mathbb{K}[X]$, uniques tels que :

$$\boxed{F(X) = E(X) + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{(X-\alpha_i)}}$$

où $E(X)$ est appelée la **partie entière** de F.

Remarque : si $F = P/Q$, sa partie entière est le quotient dans la division euclidienne de P par Q.

Méthodes

Opérations et degré

Calculs dans $\mathbb{K}[X]$

Les règles de calcul dans $\mathbb{K}[X]$ sont les mêmes que dans $\mathbb{Z}$: commutativité et associativité des opérations, distributivité (donc mise en facteur commun, etc...), ainsi que **formule du binôme de Newton** et autres identités remarquables ...

Méthode 13.1.— Comment déterminer le degré d'un polynôme

- La **proposition 13.1** permet de conclure la plupart du temps.
- Parfois, il est nécessaire de revenir à la définition. On peut alors expliciter le monôme dominant de P pour en déduire son degré.

Méthode 13.2.— Comment calculer les dérivées successives d'un polynôme

Vous pouvez suivant les cas :

- appliquer la formule pour la dérivée p-ième de P ;
- dériver *terme à terme* ;
- utiliser la **formule de Leibniz** si P est présenté sous la forme d'un produit ;
- conjecturer une expression pour la dérivée n-ième et la démontrer par récurrence.

Méthode 13.3.— Comment montrer qu'un polynôme P est nul

Vous pouvez utiliser l'une des caractérisations suivantes :

- les coefficients de P sont tous nuls ;
- P est de degré strictement négatif ;
- P est de degré inférieur à n et a (au moins) $n+1$ racines comptées avec multiplicité ;
- P possède une infinité de racines.

Remarque : cette méthode s'applique aussi pour démontrer que deux polynômes P_1 et P_2 sont égaux : il suffit d'appliquer les méthodes ci-dessus à $P = P_1 - P_2$.

Divisibilité

Division euclidienne de A par B dans $\mathbb{K}[X]$

Lorsque A et B sont déterminés explicitement, vous obtenez la division euclidienne de A par B, en posant la division suivant les puissances décroissantes :

Exemple : posons la division euclidienne de $A = X^4 - 5X^3 + 6X - 2$ par $B = X^2 - 2$.

$$
\begin{array}{lrrrrr|l}
A \leftrightsquigarrow & X^4 & -5X^3 & & +6X & -2 & X^2-2 \leftrightsquigarrow B \\
\cline{7-7}
 & & -5X^3 & +2X^2 & +6X & -2 & X^2-5X+2 \\
 & & & +2X^2 & -4X & -2 & \\
 & & & & -4X & +2 &
\end{array}
$$

Lorsque les coefficients ne sont pas explicites, on peut obtenir le reste en procédant comme suit :

Méthode 13.4.— Comment calculer le reste de la d.e. de A par B

Si $d^\circ B = p$, vous savez que $d^\circ R \leqslant p-1$. Vous devez donc déterminer les p coefficients de R, pour cela, il faut p équations.

- Pour obtenir ces équations, évaluez la relation $A = B \times Q + R$, aux points α qui annulent B.
- S'il vous en manque, c'est que B a des racines multiples. Vous pouvez alors dériver la relation $A = B \times Q + R$ et évaluer en α pour obtenir plus d'équations.

Exemple : calculons le reste de la division euclidienne de $A = X^n + 2X - 2$ par $B = (X-1)^2$. D'après le **théorème 13.5**, A s'écrit $A = B \times Q + R$, où $R = aX + b$ est un polynôme de degré inférieur à 1. En évaluant cette égalité polynomiale ainsi que sa dérivée en $\alpha = 1$, on obtient que $a = n+2$ et $b = -n-1$. Finalement, $R(X) = (n+2)X - (n+1)$.

Méthode 13.5.— Comment montrer que Q divise P

- À l'aide de la **division euclidienne** de P par Q : si le reste est nul, alors Q divise P.
- Lorsque Q est scindé $Q = \prod_{k=1}^{p} (X - \alpha_k)^{r_k}$, les α_k étant deux à deux distincts, il suffit de vérifier que les $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ sont racines de P de multiplicités supérieures à $r_1, \ldots r_p$ respectivement. Le **théorème 13.7** permet alors de conclure que $Q \mid P$.
- Si les décompositions primaires de P et Q sont connues, il suffit de vérifier que tout facteur irréductible de Q apparaît dans la décomposition de P avec un exposant supérieur.

Racines d'un polynôme

Méthode 13.6.— Comment montrer que α est racine de P

- Par définition : α est racine de P ssi $P(\alpha) = 0$.
- D'après la caractérisation : α est racine de P ssi $(X - \alpha)$ divise P.

Méthode 13.7.— Comment calculer l'ordre de multiplicité d'une racine α de P

Pour établir que α est racine d'ordre k de P, vous utilisez définition ou caractérisation :

- s'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = Q \times (X - \alpha)^k$ et $Q(\alpha) \neq 0$;
- si $P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$.

■ Décomposition primaire

❑ **Méthode 13.8.— Comment obtenir la décomposition primaire dans $\mathbb{C}[X]$**
D'après le **théorème fondamental de l'algèbre** ceci revient à déterminer les racines de P. Donc :

1 Déterminez les racines complexes α_i de P, ce qui revient à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$P(z) = 0$$

2 Calculez les ordres de multiplicités p_i de chacune de ces racines ;

3 D'après le **théorème 13.12**, P s'écrit

$$P = a\,(X-\alpha_1)^{p_1} \times \cdots \times (X-\alpha_n)^{p_n}\,, \text{où } a \in \mathbb{C}$$

4 Par identification des coefficients, a est le coefficient dominant de P.

Exemple : soit $n \in \mathbb{N}^\star$, déterminons la décomposition primaire de $P(X) = X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.

$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - \omega^k)$$

1 Les racines de P sont les nombres complexes qui vérifient l'équation polynomiale $P(z) = 0$, soit : $z^n = 1$.
Ainsi, les racines de P sont les racines n-ièmes de 1. D'après le **théorème 4.13**, il s'agit de 1, ω, ω^2, ..., ω^{n-1}, où on a noté $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

2 Nous avons donc obtenu n racines distinctes. Comme P est visiblement de degré n, on a toutes les racines et elles sont toutes simples.

3 En conséquence, $P(X) = a_n \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} (X - \omega^k)$.

4 Enfin, un simple examen des coefficients dominants des deux polynômes permet de conclure que $a_n = 1$. Ainsi :

$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - \omega^k)$$

Lorsque le polynôme est à coefficients réels, on souhaite obtenir sa décomposition en produits de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$. Pour cela, la démarche générale est la suivante :

❑ **Méthode 13.9.— Comment obtenir la décomposition primaire dans $\mathbb{R}[X]$**
Vous savez que $\mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$, vous pouvez donc considérer $P \in \mathbb{R}[X]$ comme un polynôme à coefficients complexes.

1 Décomposez P en produit de facteurs $(X - \zeta_i)^{p_i}$, où les ζ_i sont les racines réelles ou complexes de P dans $\mathbb{C}[X]$.

2 Pour les racines complexes de P, comme elles sont deux à deux conjuguées, regroupez les facteurs $(X - \zeta_j)^{q_j}(X - \overline{\zeta}_j)^{q_j} = \left(X^2 - 2\,\mathfrak{Re}\,\zeta_j\, X + |\zeta_j|^2\right)^{q_j}$.

3 Déterminez le coefficient a_n par identification.

Exemple : déterminons la décomposition primaire dans $\mathbb{R}[X]$ de $P(X) = X^4 + X^2 + 1$.

$\boxed{1}$ On décompose P dans $\mathbb{C}[X]$.

- Soit $z \in \mathbb{C}$. Résolvons $P(z) = 0$. On a :

$$\begin{aligned} P(z) = 0 \iff z^4 + z^2 + 1 = 0 &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} w & = & z^2 \\ w^2 + w + 1 & = & 0 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} w = z^2 \\ w = e^{\frac{2i\pi}{3}} \text{ ou } w = e^{\frac{4i\pi}{3}} \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} z^2 & = & e^{\frac{2i\pi}{3}} \\ \text{ou} & & \\ z^2 & = & e^{\frac{4i\pi}{3}} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Les racines du pôlynômes P sont donc les racines carrées complexes de $e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et de $e^{\frac{4i\pi}{3}}$.

$$\mathcal{S} = \{\pm e^{\frac{i\pi}{3}}; \pm e^{\frac{2i\pi}{3}}\}$$

- On a trouvé quatre racines distinctes. P étant de degré 4, on peut affirmer que l'on a trouvé toutes les racines et qu'elles sont toutes simples.
- Par conséquent, il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que $P(X) = a\ (X - e^{\frac{i\pi}{3}})(X + e^{\frac{i\pi}{3}})(X - e^{\frac{2i\pi}{3}})(X + e^{\frac{2i\pi}{3}})$.
- En identifiant le coefficient dominant, on obtient finalement :

$$P(X) = (X - e^{\frac{i\pi}{3}})(X - e^{\frac{2i\pi}{3}})(X + e^{\frac{i\pi}{3}})(X + e^{\frac{2i\pi}{3}})$$

$\boxed{2}$ On développe les produits de facteurs conjugués :

$$\begin{aligned} (X - e^{\frac{i\pi}{3}})(X - e^{\frac{2i\pi}{3}}) &= X^2 - 2\mathfrak{Re}\,(e^{\frac{i\pi}{3}})X + 1 = X^2 - X + 1 \\ (X + e^{\frac{i\pi}{3}})(X + e^{\frac{2i\pi}{3}}) &= X^2 + 2\mathfrak{Re}\,(e^{\frac{i\pi}{3}})X + 1 = X^2 + X + 1 \end{aligned}$$

$\boxed{3}$ Il existe donc $a \in \mathbb{C}$ tel que $P(X) = a\big(X^2 + X + 1\big) \times \big(X^2 - X + 1\big)$. Finalement, en identifiant le coefficient dominant, nous obtenons la décomposition primaire de $P(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$:

$$P(X) = \big(X^2 + X + 1\big) \times \big(X^2 - X + 1\big)$$

Cette méthode classique est parfois longue à mettre en œuvre. On peut parfois recourir à une identité remarquable pour optimiser les calculs.

Exemple : reprenons la décomposition primaire dans $\mathbb{R}[X]$ de $P(X) = X^4 + X^2 + 1$.

$$P(X) = \big[X^4 + 2X^2 + 1\big] - X^2 = \big[X^2 + 1\big]^2 - X^2 = \big(X^2 + X + 1\big) \times \big(X^2 - X + 1\big)$$

Les deux facteurs de degré 2 sont irréductibles sur $\mathbb{R}$ car leurs discriminants sont strictement négatifs. Il s'agit donc de la décomposition primaire de P dans $\mathbb{R}[X]$.

■ Décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples (DES)

Démarche générale

Étant donné une fraction rationnelle $F(X) = \dfrac{P(X)}{Q(X)}$, on va la décomposer en une combinaison linéaire de fractions plus simples, notamment plus simples à primitiver.

> ❑ **Méthode 13.10.— Décomposer une fraction dans $\mathbb{K}(X)$, démarche générale**
> Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. Pour obtenir la DES de F,
>
> $\boxed{0}$ Si nécessaire, présenter $F = P/Q$ sous forme irréductible. Il suffit pour cela de simplifier autant que possible numérateur et dénominateur.
>
> $\boxed{1}$ Déterminer la partie entière de F. E est le quotient de la division euclidienne de P par Q.
>
> $\boxed{2}$ Décomposer Q en produits d'irréductibles de $\mathbb{K}[X]$ à l'aide de la **méthode 13.8** ou de la **méthode 13.9**.
>
> $\boxed{3}$ Exprimer la DES de F à l'aide de coefficients inconnus (donnée par le **théorème 13.14** dans le cas d'un dénominateur scindé à racines simples ou par l'énoncé).
>
> $\boxed{4}$ Déterminer ces coefficients inconnus.

Remarque : lorsque $F = P/Q$, la partie entière de F est tout simplement le quotient de la division euclidienne de P par Q. En particulier, lorsque $d^\circ(P) < d^\circ(Q)$, la partie entière de F est nulle.

Cas particulier d'une fraction dont le dénominateur est scindé à racines simples

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ On suppose que les deux premières étapes de la démarche générale ont permis de calculer la partie entière E et de vérifier que $Q(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - \alpha_i)$ est scindé à racines simples. En ce cas,

$\boxed{3}$ Le **théorème 13.14** fournit l'expression de la DES à l'aide de coefficients à déterminer :

$$F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)} = E(X) + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{(X - \alpha_i)}$$

Pour déterminer les coefficients inconnus a_i, il suffit d'obtenir des relations entre ces coefficients en nombre suffisant. Le secret consiste à jouer sur les deux expressions ci-dessus de F, soit sous forme quotient, soit sous forme d'une somme. On peut par exemple évaluer F en des points non polaires. Nous présentons ci-dessous quelques méthodes efficaces.

> ❑ **Méthode 13.11.— Comment obtenir le coefficient a_i relatif à un pôle simple**
> Soit $F = P/Q \in \mathbb{K}(X)$ présentée sous forme irréductible et α_i un pôle simple de F.
>
> - La fraction $(X - \alpha_i)F(X) = \dfrac{(X - a_i)P(X)}{Q(X)}$ peut être simplifiée par $(X - \alpha_i)$.
> - On trouve après simplification $(X - \alpha_i)F(X) = \dfrac{P(X)}{\hat{Q}(X)}$, où $\hat{Q}$ est un polynôme.
> - En évaluant cette fraction en α_i, on trouve $a_i = \dfrac{P(\alpha_i)}{\hat{Q}(\alpha_i)}$.

Exemple : déterminons la DES de la fraction $F(X) = \dfrac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2}$.

$\boxed{1}$ Un calcul rapide montre que $E(X) = 1$, puisque $X^2+2X+5 = 1 \times (X^2-3X+2) + 5X + 7$.

$\boxed{2}$ $X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$.

$\boxed{3}$ On a donc $F(X) = \dfrac{X^2+2X+5}{(X-1)(X-2)} = 1 + \dfrac{a_1}{X-1} + \dfrac{a_2}{X-2}$.

$\boxed{4}$ On détermine a_1 et a_2 :

- $(X-1)F(X) = \dfrac{X^2+2X+5}{X-2} \xrightarrow[x=1]{} a_1 = -8$
- $(X-2)F(X) = \dfrac{X^2+2X+5}{X-1} \xrightarrow[x=2]{} a_2 = 13$

Finalement

$$F(X) = 1 - \frac{8}{X-1} + \frac{13}{X-2}$$

Mise en œuvre : exercice 13.14 et **exercice 13.15**.

Cas particulier d'un pôle multiple

La **méthode 13.11** se généralise au cas de pôles doubles ou triples de la façon suivante. Soit α un pôle d'ordre p de F de sorte que $Q(X) = (X-\alpha)^p\ \hat{Q}(X)$, où $\hat{Q}(\alpha) \neq 0$. F s'écrit alors de deux manières différentes :

$$F(X) = G(X) + \frac{a_0}{(X-\alpha)^p} + \frac{a_1}{(X-\alpha)^{p-1}} + \cdots + \frac{a_{p-1}}{(X-\alpha)} \text{ et } F(X) = \frac{P(X)}{(X-\alpha)^p \hat{Q}(X)}.$$

Conformément au programme, la première expression qui fait apparaître une fraction rationnelle G qui n'a pas de pôle en α doit être fournie par l'énoncé. La deuxième expression de F donne que $(X-\alpha)^p F(X) = \dfrac{P(X)}{\hat{Q}(X)}$ n'a pas de pôle en α. On peut donc l'évaluer en ce point. On voit à l'aide de la première expression de F que l'on obtient a_0.

> ❑ **Méthode 13.12.— Comment obtenir le coefficient a_0 pour un pôle d'ordre p**
> Avec les notations ci-dessus,
> - $(X-\alpha)^p F(X) = \dfrac{P(X)}{\hat{Q}(X)} \xrightarrow[x=\alpha]{} a_0 = \dfrac{P(\alpha)}{\hat{Q}(\alpha)}$

Remarque : dès lors que a_0 est connu, on peut se ramener à un pôle d'ordre strictement inférieur à p en considérant la fraction rationnelle $F(X) - \dfrac{a_0}{(X-\alpha)^p}$.

Cas particulier d'un dénominateur non scindé

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la décomposition primaire de Q peut faire apparaître des polynômes irréductibles de degré 2. En ce cas, la DES de $F(X)$ peut prendre l'allure suivante :

$$F(X) = G(X) + \frac{b_0 + c_0 X}{X^2 + \beta X + \gamma} = \frac{P(X)}{(X^2+\beta X+\gamma)\hat{Q}(X)}$$

Méthode 13.13.— Comment obtenir les coefficients b_0, c_0

Avec les notations ci-dessus. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine complexe de $X^2 + \beta X + \gamma$. Alors

- $(X^2 + \beta X + \gamma)F(X) = \dfrac{P(X)}{\hat{Q}(X)} \xrightarrow[x=\alpha]{} b_0 + c_0\alpha = \cdots$

Comme b_0 et c_0 sont réels tandis que α est complexe, on en déduit le valeurs de b_0 et c_0 par identification.

Autres méthodes pour déterminer les coefficients

S'il reste des coefficients à déterminer, on cherche d'autres relations entre les coefficients de F.

Méthode 13.14.— Comment obtenir d'autres relations sur les coefficients

Pour obtenir des relations supplémentaires entre les coefficients de la DES de F, on peut :

- évaluer $F(X)$ en des valeurs simples ;
- utiliser une limite à l'infini, lorsque F est de degré strictement négatif ;
- utiliser la parité de F : on écrit $F(-X) = \pm F(X)$, puis on en déduit une relation par unicité de la DES ;
- lorsqu'on cherche la DES dans $\mathbb{C}(X)$ d'une fraction à coefficients réels, les pôles sont réels ou conjugués. Par unicité de la DES, les parties polaires relatives à des pôles conjugués ont des coefficients conjugués.

Exemple : décomposons $F(X) = \dfrac{X^2 + X - 1}{X(X-1)^2(X^2+1)}$ en éléments simples de $\mathbb{R}(X)$.

$\boxed{1}$ Comme le degré du dénominateur est strictement supérieur à celui du numérateur, la partie entière de F est nulle.

$\boxed{2}$ $Q(X) = X(X-1)^2(X^2+1)$ est décomposé en produits de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$. Il y a un facteur irréductible de degré 2.

$\boxed{3}$ On admet que la DES dans $\mathbb{R}(X)$ s'écrit $F(X) = \dfrac{a_0}{X} + \dfrac{b_0}{(X-1)^2} + \dfrac{b_1}{X-1} + \dfrac{c_0 + d_0 X}{X^2+1}$.

$\boxed{4}$
- $XF(X) = \frac{X^2+X-1}{(X-1)^2(X^2+1)} \xrightarrow[x=0]{} a_0 = -1$
- $(X-1)^2F(X) = \frac{X^2+X-1}{X(X^2+1)} \xrightarrow[x=1]{} b_0 = \frac{1}{2}$
- $(X^2+1)F(X) = \frac{X^2+X-1}{X(X-1)^2} \xrightarrow[x=i]{} c_0 + d_0 i = \frac{i-2}{2}$
  d'où l'on tire $c_0 = -1, d_0 = \frac{1}{2}$
- $XF(X) = \frac{X^2+X-1}{(X-1)^2(X^2+1)} \xrightarrow[x\to\infty]{} a_0 + b_1 + d_0 = 0$
  d'où l'on tire finalement $b_1 = \frac{1}{2}$

En définitive, on a $F(X) = -\dfrac{1}{X} + \dfrac{1}{2(X-1)^2} + \dfrac{1}{2(X-1)} + \dfrac{X-2}{2(X^2+1)}$.

Mise en œuvre : exercice 13.16.

Vrai/Faux

	Vrai	Faux
1. Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.	☐	☐
2. Un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant et sans racines est irréductible.	☐	☐
3. Tout polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$ possède n racines distinctes.	☐	☐
4. Si $P \in \mathbb{K}[X]$ est de degré $n \in \mathbb{N}$, alors $P(X^2)$ est de degré $n+2$.	☐	☐
5. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme scindé, alors la fraction $F = \dfrac{P'}{P}$ n'a que des pôles simples.	☐	☐
6. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré n, alors P est scindé si et seulement si P a n racines distinctes ou confondues.	☐	☐
7. La somme des racines du polynôme $X^3 - (1+3i)X^2 + 2iX - 2$ vaut $1+3i$.	☐	☐
8. Un polynôme P divisible par deux polynômes A et B, est divisible par leur produit.	☐	☐
9. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Si $\alpha \in \mathbb{C}$ est racine de P, alors $\overline{\alpha}$ est racine de P	☐	☐
10. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. P est divisible par X^2+1 *si et seulement si* $P(i) = 0$.	☐	☐

Énoncé des exercices

Opérations dans $\mathbb{K}[X]$

Exercice 13.1 : Soit $n \geqslant 2$. On considère les polynômes $A = X^n + 2X - 2$ et $B = (X-1)^2$. Déterminer le quotient et le reste dans la division euclidienne de A par B.

Exercice 13.2 : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
1. Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ tel que $a \neq b$. Exprimer à l'aide de $P(a)$ et $P(b)$ le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$.
2. Soit $a \in \mathbb{K}$. Exprimer à l'aide de $P(a)$ et $P'(a)$ le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)^2$.

Exercice 13.3 : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $P(X+1) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} P^{(n)}(X)$.

Exercice 13.4 : Résoudre les équations d'inconnue $P \in \mathbb{K}[X]$ suivantes :

1. $P'^2 = 4P$.

2. $(X^2+1)P'' - 6P = 0$.

Équations polynomiales et décompositions primaires

Exercice 13.5 : Décomposer en produits de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :

1. $P_1 = X^5 - 1$,
2. $P_2 = X^6 + 1$,
3. $P_3 = X^9 + X^6 + X^3 + 1$,
4. $P_4 = (1 - X^2)^3 + 8X^3$.

Exercice 13.6 : Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $P = 6X^4 + X^3 + (6i+10)X^2 + (2+i)X - (4+2i)$, sachant qu'il possède des racines réelles.

Exercice 13.7* : Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme

$$P_n = X^{2n} - 2\cos(na)X^n + 1.$$

D'après CCINP

Exercice 13.8 : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré n supérieur ou égal à 2.
1. On suppose que P admet n racines distinctes. Montrer que P' est scindé et admet exactement $n-1$ racines distinctes.
2. On suppose que P est scindé. Montrer que P' est scindé.

Racines de polynômes

Exercice 13.9 : Soit (S) $\begin{cases} 3x & +4xy & +3y & = -5 \\ x & -2xy & +y & = 5 \end{cases}$.
1. Déterminer les valeurs de la somme $\sigma = x + y$ et du produit $\rho = xy$ de tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ de solutions de (S).
2. Résoudre (S).

Exercice 13.10 : 1. Factorisez dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $Q = X^2 + X + 1$.
2. Soit m, n, p trois entiers naturels. Démontrez que Q divise $X^{3m+2} + X^{3n+1} + X^{3p}$.
3. Pour quelles valeurs de l'entier naturel n le polynôme $(X+1)^n + X^n + 1$ est-il divisible par Q ?

D'après Petites Mines, 2005

Exercice 13.11 :** Le but de l'exercice est de résoudre dans $\mathbb{C}[X]$ l'équation

$$P(X^2) = P(X)P(X-1) \tag{13.1}$$

1. Montrer que si P est un polynôme non nul vérifiant la relation (13.1), alors l'ensemble de ses racines complexes est contenu dans $\{0, -1, j, j^2\}$
2. En déduire l'ensemble des solutions de (13.1).

D'après Centrale-Supélec

■ Familles de polynômes

Exercice 13.12 : Polynômes d'interpolation de Lagrange
Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier et $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ un $n+1$-uplet de nombres deux à deux distincts.
On définit pour tout $i \in [\![0, n]\!]$ $L_i = \dfrac{\prod\limits_{j;\, j \neq i} (X - a_j)}{\prod\limits_{j;\, j \neq i} (a_i - a_j)}$.

1. Observer que pour tout $(i, j) \in [\![0, n]\!]^2$, on a $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$

2. Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré inférieur ou égal à n, on a : $P(X) = \sum\limits_{i=0}^{n} P(a_i)L_i(X)$.

Exercice 13.13 : Polynômes de Tchebychev**
Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier. On se propose d'étudier les polynômes $P_n \in \mathbb{R}[X]$ qui vérifient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P_n(\cos x) = \cos nx. \tag{13.2}$$

1.
a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si P_n existe, alors il est unique.
b. Vérifier que $P_0 = 1$, $P_1 = X$, $P_2 = 2X^2 - 1$.
c. Montrer par récurrence double que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, P_n existe et vérifie la relation $P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n$.
2.
a. Déterminer le degré de P_n ainsi que son coefficient dominant.
b. Résoudre dans $[0, \pi]$ l'équation $\cos nx = 0$. En déduire l'ensemble des racines de P_n puis sa décomposition primaire.
c. En évaluant le polynôme P_n en un point x_0 bien choisi, en déduire :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = \frac{(-1)^{n/2}}{2^{n-1}} \text{ si } n \text{ est pair, } 0 \text{ sinon.}$$

■ Décomposition en éléments simples de fractions rationnelles

Exercice 13.14 : Déterminez la décomposition en éléments simples de $\mathbb{R}(X)$ des fractions rationnelles suivantes :

1. $F(X)=\dfrac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2}$ **2.** $F(X)=\dfrac{X^2}{X^2-4X+3}$ **3.** $F(X)=\dfrac{X^2+1}{(X-1)(X-2)(X-3)}$

Exercice 13.15 : Déterminez la décomposition en éléments simples de $\mathbb{C}(X)$ des fractions rationnelles suivantes :

1. $F(X)=\dfrac{2X}{X^2+1}$ **2.** $F(X)=\dfrac{1}{X^2+X+1}$ **3.** $F(X)=\dfrac{X^2+X-1}{X(X^2+1)}$

Exercice 13.16 : Déterminez la décomposition en éléments simples de $\mathbb{R}(X)$ des fractions rationnelles suivantes :

1. $F(X)=\dfrac{X-2}{X(X-1)^2}$, sachant que $F(X)=\dfrac{a_0}{X^2}+\dfrac{a_1}{X}+\dfrac{b_0}{(X+1)^2}+\dfrac{b_1}{X+1}$.

2. $F(X)=\dfrac{2X^3+X}{X^4-5X^2+4}$, en observant que F est impaire.

3. $F(X)=\dfrac{1}{X^4+X^2+1}$, sachant que $F(X)=\dfrac{a_0+b_0X}{X^2+X+1}+\dfrac{c_0+d_0X}{X^2-X+1}$.

4. $F(X)=\dfrac{1}{X^3+1}$, sachant que $F(X)=\dfrac{a_0}{X+1}+\dfrac{b_0+c_0X}{X^2-X+1}$.

■■ Indications

Ex. 13.1

Vous pourrez déterminer la division euclidienne de A par B, soit en utilisant la **formule de Taylor**, *soit à l'aide du changement d'indéterminée $Y=X-1$.*

Ex. 13.2

1. *Exprimez le reste R à l'aide de coefficients inconnus, que vous déterminerez en évaluant P en a et b.*

Ex. 13.3

La somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}P^{(n)}(X)$ ne compte qu'un nombre fini de termes non nuls. De même, vous pourrez poser $P(X)=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}a_kX^k$, où les coefficients (a_k) sont nuls à partir d'un certain rang.

Ex. 13.4

Vous pouvez raisonner par analyse-synthèse et commencer par examiner le degré d'une solution au problème posé.

Ex. 13.8

1. *Comme P est à coefficients réels, on peut étudier la fonction polynomiale associée...*

Ex. 13.9

On pourra utiliser la **proposition 13.10**.

Ex. 13.12

1. Notation : *le symbole de Kronecker* $\delta_{i,j}$ *vaut* 1 *si* $i = j$ *et* 0 *sinon.*

2. *Comment montrer une égalité polynomiale ?*

Ex. 13.13

1. b. *Vérifiez que pour tout entier* $n \in \mathbb{N}$ *et tout réel* $x \in \mathbb{R}$, $\cos(n+2)x = 2\cos x \cos(n+1)x - \cos nx$.

Corrigé des vrai/faux

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
V	F	F	F	V	V	V	F	V	V

1. C'est le **théorème 13.11** !
2. Le polynôme $(X^2+1)\times(X^2+X+1)$ n'est certainement pas irréductible dans $\mathbb{R}[X]$. Pourtant, il n'admet aucune racine réelle.
3. Un polynôme de degré n admet au plus n racines distinctes ! mais X^n n'admet qu'une seule racine !
4. Le polynôme $P(X^2)$ est de degré $2n$.
5. Si P est scindé, il s'écrit $P=\prod_{k=1}^{p}(X-\alpha_k)^{r_k}$. En ce cas,

$$\frac{P'}{P}=\sum_{k=1}^{p}\frac{r_k}{X-\alpha_k}$$

En particulier, elle n'a que des pôles simples.
6. En effet P est scindé si et seulement si, il s'écrit $P=\prod_{k=1}^{p}(X-\alpha_k)^{r_k}$.
7. D'après les liens entre racines et coefficients on a effectivement, $\sigma_1=1+3i$.
8. C'est le cas si les polynômes A et B sont premiers entre eux, mais c'est faux en général. Par exemple, $X(X-1)(X-2)=X^3-3X^2+2X$ est divisible par $A=X^2-X$ et $B=X^2-2X$, mais il n'est pas divisible par leur produit.
9. Si α est racine de P, alors $P(\alpha)=a_n\alpha^n+\cdots+a_1\alpha+a_0=0$. En conjugant cette expression, il vient : $0=a_n\overline{\alpha}^n+\cdots+a_1\overline{\alpha}+a_0=P(\overline{\alpha})$.
10. Comme P est à coefficients réels, on a

$$P(i)=0 \iff \left\{\begin{array}{rcl} P(i) & = & 0 \\ P(-i) & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} (X-i) & \mid & P \\ (X+i) & \mid & P \end{array}\right. \iff (X^2+1)\mid P.$$

Corrigé des exercices

Exercice 13.1

Effectuons le changement d'indéterminée $Y = X - 1$ et calculons $A(Y+1)$ à l'aide de la **formule du binôme de Newton**, il vient

On peut obtenir ce résultat à l'aide de la formule de Taylor pour A.

$$\begin{aligned} A(Y+1) &= (Y+1)^n + 2(Y+1) - 2 = 2Y + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} Y^k \\ &= 1 + (n+2)Y + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} Y^k \\ &= 1 + (n+2)Y + Y^2 \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k+2} Y^k \end{aligned}$$

Finalement, $A(X) = 1 + (n+2)(X-1) + (X-1)^2 \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k+2} (X-1)^k$.

Il s'agit de la formule de Taylor de A au point 1. Elle pouvait aussi être obtenue en calculant les dérivées successives de A au point 1.

Par unicité de la division euclidienne, le reste et le quotient de la division euclidienne de A par B sont donnés par :

- $R(X) = 1 + (n+2)(X-1) = (n+2)X - (n+1)$
- $Q(X) = \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k+2} (X-1)^k$. ▲

Exercice 13.2

1. Posons $B = (X-a)(X-b)$. Il s'agit d'un polynôme de degré 2. Par conséquent, d'après le **théorème de la division euclidienne**, il existe un couple (Q, R) de polynômes, unique tel que

Le polynôme Q est totalement inconnu, pour contourner cette difficulté on évalue en a et b.

$$\left\| \begin{array}{rcl} P(X) &=& (X-a)(X-b)Q(X) + R(X) \\ R(X) &=& \alpha X + \beta \end{array} \right. , \text{ où } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

Évaluons la première égalité polynomiale en a et b, il vient : $\begin{cases} \tilde{P}(a) = \tilde{R}(a) \\ \tilde{P}(b) = \tilde{R}(b) \end{cases}$.

Finalement, en remplaçant R par son expression, on en déduit que α et β sont solutions du système :

$$\begin{cases} \alpha a + \beta = P(a) \\ \alpha b + \beta = P(b) \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \dfrac{P(b) - P(a)}{b-a} \\ \beta = \dfrac{bP(a) - aP(b)}{b-a} \end{cases}$$

Ainsi, le reste de la division euclidienne de P par B est

$$R(X) = \frac{P(b) - P(a)}{b-a} X + \frac{bP(a) - aP(b)}{b-a} = \frac{P(b)(X-a) - P(a)(X-b)}{b-a}$$

2. Effectuons la division euclidienne de P par $B = (X-a)^2$, il existe un couple (Q, R) de polynômes, unique tel que

$$\left\| \begin{array}{rcl} P(X) & = & (X-a)^2 Q(X) + R(X) \\ R(X) & = & \alpha X + \beta \end{array} \right. , \text{ où } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

Comme précédemment, pour déterminer les deux coefficients α et β, on utilise deux relations. La première est obtenue en évaluant la première égalité polynomiale en a, et la deuxième en dérivant cette égalité puis en évaluant en a. Ainsi,

Comme a est racine double de B, les inconnues $Q(a)$ et $Q'(a)$ n'interviennent pas !

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \tilde{P}(a) & = & \tilde{R}(a) \\ \tilde{P}'(a) & = & \tilde{R}'(a) \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha a + \beta & = & P(a) \\ \alpha & = & P'(a) \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha & = & P'(a) \\ \beta & = & P(a) - aP'(a) \end{array} \right.$$

Ainsi, le reste de la division euclidienne de P par B est

$$R(X) = P'(a)X + P(a) - aP'(a) = P(a) + P'(a)(X-a). \qquad \blacktriangle$$

Exercice 13.3

Soit (a_k) la suite des coefficients de P, donc nécessairement nulle à partir d'un certain rang de sorte que $P(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$. D'après la **proposition 13.2**, la dérivée n-ième de P, s'écrit $P^{(n)}(X) = \sum_{k=n}^{+\infty} a_k \frac{k!}{(k-n)!} X^{k-n}$.

Lorsqu'on doit calculer une somme double, un bon réflexe consiste à intervertir l'ordre de sommation.

Réinjectons ceci dans la somme proposée, il vient :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} P^{(n)}(X) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=n}^{+\infty} a_k \frac{k!}{(k-n)!} X^{k-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} a_k \binom{k}{n} X^{k-n} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{k} a_k \binom{k}{n} X^{k-n} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \left(\sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} X^{k-n} \right) \end{aligned}$$

Finalement, la **formule du binôme de Newton** permet de conclure que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} P^{(n)}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (X+1)^k = P(X+1). \qquad \blacktriangle$$

Exercice 13.4

1. Suivant l'indication fournie, raisonnons par **analyse-synthèse** :

Analyse : Supposons que $P \in \mathbb{K}[X]$ vérifie $[P'(X)]^2 = 4P(X)$ et notons n le degré de P. Les propriétés algébriques sur le degré des polynômes (**proposition 13.1**) nous conduisent à la discussion suivante :

L'analyse permet de réduire l'ensemble des « candidats » solutions du problème posé : il s'agit nécessairement de polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

- si $n \leqslant 0$, alors P' est le polynôme nul et dans ce cas $P = 0$;
- si $n > 0$, l'égalité $[P'(X)]^2 = 4P(X)$ entraîne que $2(n-1) = n$, soit encore $n = 2$.

Ainsi, si P vérifie $[P'(X)]^2 = 4P(X)$, alors P est le polynôme nul, ou bien de degré 2. En particulier, P s'écrit sous la forme $P(X) = aX^2 + bX + c$, avec $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$.

Synthèse : Soit $P(X) = aX^2 + bX + c$, avec $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$ un polynôme de degré inférieur ou égal à 2. En ce cas ,

$$\begin{array}{r||rcl} 4\times & P(X) & = & aX^2 + bX + c \\ & P'(X) & = & 2aX + b \\ 1\times & [P'(X)]^2 & = & 4a^2 + 4abX + b^2 \end{array}$$

Par identification des coefficients, il s'ensuit que

$$[P'(X)]^2 = 4P(X) \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 4a^2 & = & 4a \\ 4b & = & 4ab \\ 4c & = & b^2 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} a = 1 \text{ et } c = b^2/4 \\ OU \\ a = 0 \text{ et } c = b = 0 \end{array} \right.$$

Conclusion : finalement, les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ vérifiant $[P'(X)]^2 = 4P(X)$ sont le polynôme nul et les polynômes de la forme $P(X) = X^2 + bX + \frac{b^2}{4}$, où $b \in \mathbb{K}$.

2. La preuve sera par **analyse-synthèse :**

Analyse : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ une solution de l'équation $(X^2+1)P'' = 6P$. Notons n le degré de P. Alors

- si $n \leqslant 1$, alors P'' est nul et donc P aussi ;
- si $n \geqslant 2$, l'examen des degrés dans l'égalité $(X^2 + 1)P''(X) = 6P(X)$ n'entraîne *a priori* aucune relation pour n.

Regardons alors les coefficients dominants : $a_n \neq 0$

$$\begin{array}{r||rcl} 6\times & P(X) & = & a_nX^n + \textit{ termes de degrés inférieurs,} \\ & P'(X) & = & n\,a_nX^{n-1} + \cdots \\ (X^2+1)\times & P''(X) & = & n(n-1)a_nX^{n-2} + \cdots \end{array}$$

En identifiant les coefficients dominants, il en résulte que nécessairement $n(n-1) = 6$, ce qui entraîne $n = 3$.
Ainsi, si P vérifie $(X^2+1)P''(X) = 6P(X)$, alors P est de degré inférieur ou égal à 3.

Les racines réelles de l'équation $x^2 - x - 6$ sont 3 et -2.

Synthèse : Soit $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$, $(a, b, c, d) \in \mathbb{K}^4$ un polynôme de degré inférieur ou égal à 3. Alors

$$\begin{array}{rcl} (X^2+1)P''(X) & = & (X^2+1)(6aX+2b) = 6aX^3 + 2bX^2 + 6aX + b \\ 6P(X) & = & 6aX^3 + 6bX^2 + 6cX + 6d \end{array}$$

Par identification des coefficients, il s'ensuit que

$$(1+X^2)P''(X) = 6P(X) \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 6a & = & 6a \\ 6b & = & 2b \\ 6c & = & 6a \\ 6d & = & 2b \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & c \\ b & = & 0 \\ d & = & 0 \end{array} \right.$$

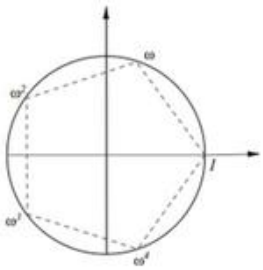
Conclusion : finalement, les solutions du problème posé sont les polynômes de la forme $P(X) = a(X^3 + X)$, où $a \in \mathbb{K}$. ▲

Corrigé

Exercice 13.5

Pour déterminer la décomposition primaire dans $\mathbb{R}[X]$, on peut tout d'abord décomposer P en produits d'irréductibles de $\mathbb{C}[X]$, puis regrouper deux par deux les polynômes conjugués pour obtenir la décomposition en facteurs premiers sur $\mathbb{R}$ (cf. **méthode 13.9**).

Un petit schéma permet de repérer facilement les racines complexes conjuguées :



1. $P_1 = X^5 - 1$.

Les racines – complexes – de P_1 sont les racines cinquièmes de l'unité : $1, \omega = e^{2i\pi/5}, e^{4i\pi/5}, e^{6i\pi/5}, e^{8i\pi/5}$. Par conséquent, la décomposition de P_1 dans $\mathbb{C}[X]$ est :

$$\begin{aligned} P_1(X) &= a(X-1)(X-e^{\frac{2i\pi}{5}})(X-e^{\frac{4i\pi}{5}})(X-e^{\frac{6i\pi}{5}})(X-e^{\frac{8i\pi}{5}}) \\ &= (X-1)(X-e^{\frac{2i\pi}{5}})(X-e^{\frac{8i\pi}{5}})(X-e^{\frac{4i\pi}{5}})(X-e^{\frac{6i\pi}{5}}) \\ &= (X-1)\left[X^2-2\cos(\tfrac{2\pi}{5})\,X+1\right]\left[X^2-2\cos(\tfrac{4\pi}{5})\,X+1\right] \end{aligned}$$

2. Pour décomposer $P_2 = X^6 + 1$, on met en œuvre la **méthode 13.9**. Les racines – complexes – de P_2 sont les racines sixièmes de -1 :

- une racine sixième particulière de $-1 = e^{i\pi}$ est $\zeta_0 = e^{\frac{i\pi}{6}}$;
- en la multipliant par les racines sixièmes de l'unité

$$\mathbb{U}_6 = \left\{1, e^{\frac{2i\pi}{6}}, e^{\frac{4i\pi}{6}}, e^{\frac{6i\pi}{6}}, e^{\frac{8i\pi}{6}}, e^{\frac{10i\pi}{6}},\right\} ;$$

- on obtient l'ensemble des racines sixièmes de -1 :

$$\mathcal{S} = \left\{e^{\frac{i\pi}{6}}, e^{\frac{3i\pi}{6}}, e^{\frac{5i\pi}{6}}, e^{\frac{7i\pi}{6}}, e^{\frac{9i\pi}{6}}, e^{\frac{11i\pi}{6}},\right\} = \left\{e^{\frac{i\pi}{6}}, e^{\frac{-i\pi}{6}}, i, -i, e^{\frac{5i\pi}{6}}, e^{\frac{-5i\pi}{6}}\right\}.$$

On en déduit successivement les décompositions primaires de P_2 dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$:

$$\begin{aligned} P_2(X) &= (X-i)(X+i)(X-e^{\frac{i\pi}{6}})(X-e^{\frac{-i\pi}{6}})(X-e^{\frac{5i\pi}{6}})(X-e^{\frac{-5i\pi}{6}}) \\ &= (X^2+1)\left[X^2-2\cos(\tfrac{\pi}{6})X+1\right]\left[X^2-2\cos(\tfrac{5\pi}{6})X+1\right] \\ &= (X^2+1)\left[X^2-\sqrt{3}X+1\right]\left[X^2+\sqrt{3}X+1\right] \end{aligned}$$

Autre méthode : on peut aussi obtenir directement cette décomposition primaire à l'aide d'**identités remarquables**, comme l'illustre le calcul ci-dessous :

$$\begin{aligned} P_2(X) &= X^6+1 = (X^2)^3+1 = \left(X^2+1\right)\left((X^2)^2-X^2+1\right) \\ &= (X^2+1)\left(X^4-X^2+1\right) = (X^2+1)\left(X^4+2X^2+1\ -\ 3X^2\right) \\ &= (X^2+1)\left((X^2+1)^2\ -\ 3X^2\right) \\ &= (X^2+1)\left(X^2-\sqrt{3}X+1\right)\left(X^2+\sqrt{3}X+1\right) \end{aligned}$$

Les deux polynômes de degré 2 ont un discriminant négatif, il s'agit bien de la décomposition de P_2 en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

3. On remarque que $P_3 = X^9 + X^6 + X^3 + 1$ est le polynôme composé de $Q(Y) = Y^3 + Y^2 + Y + 1$ avec X^3. Commençons par obtenir la décomposition primaire de Q dans $\mathbb{C}[X]$: comme les racines de Q sont les racines quatrièmes de l'unité privé de 1, il s'ensuit que

$$Q(Y) = (Y+1)(Y-i)(Y+i)$$

En composant avec X^3, on obtient

$$\begin{aligned} P_3(X) &= (X^3+1)\,(X^3-i)\,(X^3+i) \\ &= (X^3+1)\,(X^6+1) \end{aligned}$$

À l'aide de la question précédente, et de l'**identité géométrique**, $X^3+1 = (X+1)(X^2-X+1)$, on peut finalement conclure :

$$P_3(X) = (X+1)(X^2-X+1)(X^2+1)\big[X^2-\sqrt{3}X+1\big]\,\big[X^2+\sqrt{3}X+1\big]$$

Chacun des polynômes de degré 2 ayant un discriminant strictement négatif, il s'agit de la décomposition de P_3 en produit d'irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

4. Pour décomposer $P_4 = (1-X^2)^3+8X^3$ en produit d'irréductibles de $\mathbb{R}[X]$, on peut partir de l'**identité remarquable** $A^3+B^3 = (A+B)(A^2-AB+B^2)$. Ainsi,

Il s'agit encore de l'identité géométrique.

$$\begin{aligned} P_4(X) &= (1+2X-X^2)\,\big((1-X^2)^2-2X(1-X^2)+4X^2\big) \\ &= (1+2X-X^2)\,(X^4+2X^3+2X^2-2X+1) \\ &= -(X-1+\sqrt{2})(X-1-\sqrt{2})\,(X^4+2X^3+2X^2-2X+1) \end{aligned}$$

Or, le polynôme $Q(X) = X^4+2X^3+2X^2-2X+1$ se factorise dans $\mathbb{C}[X]$:

$$\begin{aligned} Q(X) &= (X^4+2X^3+X^2 \;+\; X^2-2X+1) \\ &= ((X^2+X)^2 \;+\; (X-1)^2) \\ &= ((X^2+X)^2 \;-\; (iX-i)^2) \\ &= \big[X^2+(1+i)X-i\big]\,\big[X^2+(1-i)X+i\big] \end{aligned}$$

Tout revient donc à factoriser les polynômes $X^2+(1+i)X-i$ et $X^2+(1-i)X+i$ dans $\mathbb{C}[X]$.

- Le discriminant de $X^2+(1+i)X-i$ est $\Delta = 6i$. Une racine carrée complexe de Δ est $\delta = \sqrt{3}(1+i)$.
- Les racines de $X^2+(1+i)X-i$ sont : $z_1 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}\,(1+i)$ et $z_2 = -\frac{\sqrt{3}+1}{2}\,(1+i)$.
- De même, les racines de $X^2+(1-i)X+i$ sont $z_3 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}\,(1-i)$ et $z_4 = -\frac{\sqrt{3}+1}{2}\,(1-i)$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} Q(X) &= \big[(X^2+(1+i)X-i\big]\,\big[X^2+(1-i)X+i\big] \\ &= (X-z_1)(X-z_2)(X-z_3)(X-z_4) \\ &= \big[X^2-2\mathfrak{Re}\,z_1X+|z_1|^2\big]\,\big[X^2-2\mathfrak{Re}\,z_2X+|z_2|^2\big] \\ &= \big[X^2+(1-\sqrt{3})X+2-\sqrt{3}\big]\,\big[X^2+(1+\sqrt{3})X+2+\sqrt{3}\big] \end{aligned}$$

Finalement, nous avons obtenu la factorisation suivante :

$$P_4 = -(X-1+\sqrt{2})(X-1-\sqrt{2})\big[X^2+(1-\sqrt{3})X+2-\sqrt{3}\big]\big[X^2+(1+\sqrt{3})X+2+\sqrt{3}\big]$$

Les deux polynômes de degré 2 sont sans racines réelles : il s'agit donc bien de la décomposition de P_4 en produit d'irréductibles de $\mathbb{R}[X]$. ▲

Corrigé

Exercice 13.6

Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après l'unicité de l'écriture algébrique des nombres complexes, on a l'équivalence :

$$\begin{aligned}\tilde{P}(x) = 0 \quad &\iff \quad 6x^4 + x^3 + (6i+10)x^2 + (2+i)x - (4+2i) = 0 \\ &\iff \quad \left\{ \begin{array}{rcll} 6x^4 + x^3 + 10x^2 + 2x - 4 & = & 0 & (R) \\ 6x^2 + x - 2 & = & 0 & (I) \end{array} \right.\end{aligned}$$

L'équation aux parties imaginaires (I) admet deux racines réelles distinctes : $\frac{1}{2}$ et $-\frac{2}{3}$. On vérifie aisément que ces deux réels sont aussi solutions de l'équation (R). Ainsi, $\frac{1}{2}$ et $-\frac{2}{3}$ sont racines de P.
D'après le **caractérisation des racines**, il s'ensuit que P est divisible par $6(X - \frac{1}{2})(X + \frac{2}{3}) = 6X^2 + X - 2$. En posant la division euclidienne de P par $6X^2 + X - 2$, on obtient aisément :

$$P = (6X^2 + X - 2)(X^2 + 2 + i)$$

Les racines de $X^2 + 2 + i$ sont les racines carrées complexes α et β de $-2 - i$. Pour les calculer, on les cherche sous forme algébrique $x + iy$. On a l'équivalence :

$$(x+iy)^2 = -2 - i \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x^2 - y^2 & = & -2 \\ x^2 + y^2 & = & \sqrt{5} \\ xy & < & 0 \end{array} \right.$$

On obtient $\alpha = \sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-2}{2}} - i\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}+2}{2}}$. et $\beta = -\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-2}{2}} + i\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}+2}{2}}$.
Finalement, la décomposition primaire de P dans $\mathbb{C}[X]$ s'écrit :
$P = c(X - \frac{1}{2})(X + \frac{2}{3})(X - \alpha)(X - \beta) = (2X - 1)(3X + 2)(X - \alpha)(X - \beta)$ ▲

Exercice 13.7

Pour décomposer un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$, on effectue un changement de variable $w = z^n$, ou on se ramène à l'équation $z^n + z^{n-1} + \cdots + 1 = 0$ pour utiliser l'identité géométrique.

Factoriser P_n dans $\mathbb{C}[X]$ revient à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation polynomiale $z^{2n} - 2\cos(na)z^n + 1 = 0$. Le changement d'inconnue $w = z^n$ s'impose :

$$\begin{aligned}\tilde{P}_n(z) = 0 \quad &\iff \quad \left\{ \begin{array}{rcl} w & = & z^n \\ w^2 - 2\cos(na)\,w + 1 & = & 0 \end{array} \right. \\ &\iff \quad \left\{ \begin{array}{rcl} w & = & z^n \\ w = e^{ina} & \text{ou} & w = e^{-ina} \end{array} \right. \\ &\iff \quad \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ z = e^{i(a + \frac{2k\pi}{n})} \text{ ou } z = e^{-i(a + \frac{2k\pi}{n})}\end{aligned}$$

Connaissant les racines complexes de P_n, on obtient aisément la factorisation en produit d'irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$:

$$P_n(X) = \prod_{k=0}^{n-1} \left[\left(X - e^{i(a+\frac{2k\pi}{n})}\right)\left(X - e^{-i(a+\frac{2k\pi}{n})}\right) \right]$$

Pour obtenir la décomposition primaire de P_n dans $\mathbb{R}[X]$, on regroupe les facteurs associés aux racines réelles et les facteurs associés à des racines complexes conjuguées.
Pour ce faire, on remarque que 1 (resp. -1) est racine de P_n si et seulement si $na \equiv 0[2\pi]$, (resp. $na \equiv n\pi[2\pi]$), d'où la discussion suivante :

▸ si $na \equiv 0[2\pi]$ et $na \equiv n\pi[2\pi]$. Alors $n = 2m$ est pair et

$$\begin{aligned} P_n(X) &= X^{2n} - 2X^n + 1 = (X^n - 1)^2 \\ &= (X-1)^2(X+1)^2 \prod_{k=1}^{m-1} \left[X^2 - 2\cos(\tfrac{2k\pi}{n})\, X + 1\right]^2 \end{aligned}$$

▸ si $na \equiv 0[2\pi]$ et $na \not\equiv n\pi[2\pi]$. Alors $n = 2m+1$ est impair et

$$\begin{aligned} P_n(X) &= X^{2n} - 2X^n + 1 = (X^n - 1)^2 \\ &= (X-1)^2 \prod_{k=1}^{m} \left[X^2 - 2\cos(\tfrac{2k\pi}{n})\, X + 1\right]^2 \end{aligned}$$

▸ si $na \not\equiv 0[2\pi]$ et $na \equiv n\pi[2\pi]$. Alors $n = 2m+1$ est impair et

$$\begin{aligned} P_n(X) &= X^{2n} - 2(-1)^n X^n + 1 = ((-X)^n - 1)^2 \\ &= (X+1)^2 \prod_{k=1}^{m} \left[X^2 + 2\cos(\tfrac{2k\pi}{n})\, X + 1\right]^2 \end{aligned}$$

▸ si $na \not\equiv 0[2\pi]$ et $na \not\equiv n\pi[2\pi]$. Les racines de P_n sont complexes et deux à deux conjuguées, par conséquent

$$P_n(X) = \prod_{k=0}^{n-1} \left[X^2 - 2\cos(a + \tfrac{2k\pi}{n})\, X + 1\right] \qquad \blacktriangle$$

Exercice 13.8

1. Supposons que P admette n racines distinctes $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$. Montrons que P' admet exactement $n-1$ racines distinctes. Tout d'abord, d'après les propriétés du degré des polynômes, P' est de degré $n-1$. Il admet donc au plus $n-1$ racines distinctes.

Or, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a $\tilde{P}(\alpha_k) = \tilde{P}(\alpha_{k+1}) = 0$. D'après le **théorème de Rolle**, il en découle l'existence d'un réel $\beta_k \in]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$ tel que $\tilde{P}'(\beta_k) = 0$. Ceci étant vrai pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, P' admet donc au moins $n-1$ racines distinctes.

Comme P est à coefficients réels, la fonction polynomiale associée est réelle, elle vérifie le **théorème de Rolle**.

Finalement, P' est de degré $n-1$ et admet $n-1$ racines distinctes, en particulier, il s'agit d'un polynôme scindé.

2. Supposons que P admette r racines distinctes $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_r$ de multiplicités respectives $m_1, m_2, \ldots, m_r$. Comme par hypothèse P est scindé, il s'ensuit que

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_r = n$$

• Soit $k \in [\![1, r]\!]$. Comme α_k est une racine d'ordre m_k de P, il découle de la **caractérisation des racines multiples** que

$$\tilde{P}(\alpha_k) = \tilde{P}'(\alpha_k) = \cdots = \tilde{P}^{(m_k-1)}(\alpha_k) = 0.$$

En particulier, α_k est donc une racine de P' d'ordre de multiplicité $m_k - 1$.

• D'autre part, pour tout $k \in [\![1, r-1]\!]$ la relation $\tilde{P}(\alpha_k) = \tilde{P}(\alpha_{k+1}) = 0$ entraîne, grâce au **théorème de Rolle**, l'existence d'un réel $\beta_k \in]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$ tel que $\tilde{P}'(\beta_k) = 0$. Autrement dit, les β_k sont $r-1$ racines de P', distinctes des précédentes.

• Au total, le nombre de racines de P' comptées avec multiplicité est supérieur ou égal à

$$\begin{aligned} N &= (m_1 - 1) + (m_2 - 1) + \cdots + (m_r - 1) + (r - 1) \\ &= m_1 + m_2 + \cdots + m_r - r + r - 1 = n - 1 \end{aligned}$$

Corrigé

Comme P' est de degré inférieur à $n-1$, il ne saurait posséder plus de $n-1$ racines, comptées avec multiplicités, par conséquent P' admet exactement $n-1$ racines (distinctes ou confondues). Il est donc scindé sur $\mathbb{R}$. ▲

Exercice 13.9

1. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Notons $\sigma = x+y$ et $\rho = xy$. Avec ces notations,

$$(S) \iff \left\{ \begin{array}{lll} 3\sigma & +4\rho & = -5 \\ \sigma & -2\rho & = 5 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{lll} \boxed{1}\sigma & -2\rho & = 5 \\ & 10\rho & = -20 \end{array} \right.$$

2. Ainsi, (S) est-il équivalent au système

$$\left\{ \begin{array}{lll} x+y & = & 1 \\ x \times y & = & -2 \end{array} \right.$$

Or les solutions de ce système sont celles de l'équation du deuxième degré $t^2 - t - 2 = 0$, à savoir 2 et -1. Finalement, (S) admet deux couples de solutions $(2,-1)$ et $(-1,2)$. ▲

Exercice 13.10

1. Si vous ne savez pas que $Q(X) = (X-j)(X-j^2)$, vous pouvez retrouver ce résultat en calculant le discriminant de Q et en appliquant les formules pour les solutions d'une équation polynomiale de degré 2. On peut encore démontrer ceci à l'aide de l'**identité géometrique**, en effet

$$(X-1)Q(X) = X^3 - 1.$$

Par conséquent, les racines de Q sont les racines troisièmes de l'unité sauf 1, c'est-à-dire j et $\overline{j} = j^2$.

2. Soit $(m,n,p) \in \mathbb{N}^3$. On pose $P = X^{3m+2} + X^{3n+1} + X^{3p}$. Comme P est à coefficients réels, on sait que les racines de P sont réelles ou complexes conjuguées. Par conséquent :

$$\begin{array}{lll} Q \text{ divise } P & \textit{si et seulement si} & (X-j)(X-\overline{j}) \text{ divise } P \\ & \textit{si et seulement si} & j \text{ et } \overline{j} \text{ sont racines de } P \\ & \textit{si et seulement si} & j \text{ est racine de } P \end{array}$$

Il suffit donc de vérifier si $\tilde{P}(j)$ est nul. Or d'après les règles de calcul avec les puissances,

✎ $j^3 = 1$

$$\begin{array}{rcl} \tilde{P}(j) & = & j^{3m+2} + j^{3n+1} + j^{3p} = j^2 \times (j^3)^m + j \times (j^3)^n + (j^3)^p \\ & = & j^2 + j + 1 \end{array}$$

Comme $j^2 + j + 1 = \tilde{Q}(j)$ est nul, il s'ensuit que j est racine de P. D'après ce qui précède, ceci garantit que P est divisible par Q.

3. Notons P_n le polynôme $P_n = (X+1)^n + X^n + 1$. Comme P_n est à coefficient réels, le raisonnement précédent s'applique :

$$P_n \text{ est divisible par } Q \textit{ si et seulement si } j \text{ est racine de } P_n$$

Or, compte-tenu de la relation $j^2+j+1=0$, on a $\tilde{P}_n(j)=(j+1)^n+j^n+1=(-j^2)^n+j^n+1$. Pour simplifier cette expression, on discute suivant la valeur du reste de la division euclidienne de n par 6 :

n	j^n	$(-j^2)^n$	$P_n(j)$
$6k$	1	$+1$	3
$6k+1$	j	$-j^2$	$2(1+j)$
$6k+2$	j^2	$+j$	0
$6k+3$	1	-1	1
$6k+4$	j	$+j^2$	0
$6k+5$	j^2	$-j$	$-2j$

Finalement, P_n est divisible par Q *si et seulement si* le reste de la division euclidienne de n par 6 est égal à 2 ou à 4. ▲

Exercice 13.11

1. Soit P une solution non nulle de (13.1) et α une racine de P. En évaluant la relation (13.1) en α, il s'ensuit que α^2 est aussi racine de P. Par itération, il en découle que $\alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{(2^n)}, \ldots$ sont aussi racines de P.

Supposons que $|\alpha|$ soit différent de 0 et de 1. En ce cas, le polynôme P admettrait une infinité de racines distinctes, ce qui entraînerait que P est le polynôme nul, ce qui est exclu. Par l'absurde, on a donc établi que les racines de P sont soit nulle, soit de module 1.
Soit $\alpha=e^{i\theta}$, une racine complexe non nulle de P. En évaluant (13.1) en $1+\alpha$, il vient que $(1+\alpha)^2$ est aussi racine de P. D'après ce qui précède, ceci entraîne

- soit $\alpha+1=0$, ce qui revient à dire que $\alpha=-1$;
- soit $\alpha+1$ est un nombre complexe de module 1, ce qui entraîne, que

$$1+|1+e^{i\theta}|^2=2\cos^2(\theta/2),$$

d'où l'on tire que $\theta\equiv\pm\dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$. Ainsi, l'ensemble des racines complexes de P est contenu dans $\{0,-1,j,\overline{j}\}$.

✎ $j^2=\overline{j}$

2. Clairement, le polynôme nul est solution de (13.1). Soit P un polynôme non nul, solution de (13.1). D'après le théorème de décomposition primaire dans $\mathbb{C}[X]$, P se décompose, de manière unique à l'ordre des facteurs près, sous la forme :

$$P(X)=X^\alpha(X+1)^\beta(X-j)^\gamma(X-\overline{j})$$

✎ *Le coefficient dominant de P doit être égal à 1.*

On en déduit les décompositions primaires de $P(X)\times P(X-1)$ et de $P(X^2)$:

$$P(X)P(X-1)=X^{\alpha+\beta}(X-1)^\alpha(X+1)^\beta(X+\overline{j})^\gamma(X-\overline{j})^\delta(X-j)^\gamma(X+j)^\delta$$
$$P(X^2)=X^{2\alpha}(X-i)^\beta(X+i)^\beta(X-\overline{j})^\gamma(X+\overline{j})^\gamma(X-j)^\delta(X+j)^\delta$$

Par unicité de la décomposition primaire d'un polynôme, il vient

$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha+\beta & = & 2\alpha \\ \beta & = & 0 \\ \alpha & = & 0 \\ \gamma & = & \delta \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \alpha & = & 0 \\ \beta & = & 0 \\ \gamma & = & \delta \end{array}\right.$$

Ainsi, $P(X) = \left[(X-j)(X-j^2)\right]^\gamma = \left[X^2+X+1\right]^\gamma$

Conclusion : les solutions de (13.1) sont le polynôme nul et les polynômes de la forme $P(X) = \left[X^2+X+1\right]^\gamma$. ▲

Exercice 13.12

1. Soit $(i,k) \in [\![0,n]\!]^2$.

▸ Si $k \neq i$, alors k appartient à l'ensemble d'indices $\{j \in [\![0,n]\!] \mid j \neq i\}$. Par conséquent, $(X-a_k)$ divise le polynôme $\prod\limits_{j;\, j\neq i} (X-a_j)$ et donc aussi L_i.

D'après la **caractérisation des racines**, il s'ensuit que

$$L_i(a_k) = \frac{\prod_{j;\, j\neq i}(a_k-a_j)}{\prod_{j;\, j\neq i}(a_i-a_j)} = 0$$

▸ Si $k = i$, alors les produits finis $\prod\limits_{j;\, j\neq i} (a_k-a_j)$ et $\prod\limits_{j;\, j\neq i} (a_i-a_j)$ coïncident.

Par conséquent

$$L_i(a_k) = \frac{\prod_{j;\, j\neq i}(a_k-a_j)}{\prod_{j;\, j\neq i}(a_i-a_j)} = 1$$

▸ Dans tous les cas, on a bien vérifié que $L_i(a_k) = \delta_{i,k}$.

2. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

On montre que les polynômes $P(X)$ et $Q(X) = \sum\limits_{i=0}^{n} P(a_i)L_i(X)$ sont égaux.

D'après les propriétés algébriques du degré des polynômes, $P-Q$ est de degré inférieur ou égal à n. De plus, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on a

Dans la somme $\sum_i P(a_i)\delta_{i,k}$, tous les termes sont nuls sauf le $k^{\text{ième}}$.

$$\begin{array}{rcl} P-Q(a_k) & = & P(a_k) - \sum_{i=0}^{n} P(a_i)L_i(a_k) \\ & = & P(a_k) - \sum_{i=0}^{n} P(a_i)\delta_{i,k} \\ & = & P(a_k) - P(a_k) = 0 \end{array}$$

Ainsi, le polynôme $P-Q$ est de degré inférieur à n et admet au moins $n+1$ racines distinctes : il s'agit donc du polynôme nul. ▲

Exercice 13.13

Un polynôme de degré de degré $d \geqslant 0$ admet au plus d racines distinctes, en particulier, il admet un nombre fini de racines !

1.

a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit P_n et R_n des polynômes vérifiant(13.2). En ce cas, pour tout nombre réel x, $P_n(\cos x) = R_n(\cos x) = \cos(nx)$. Par conséquent $P_n - R_n$ possède une infinité de racines distinctes : il s'agit donc du polynôme nul, ce qui revient à dire que $P_n = R_n$.

b. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $\cos 0x = 1$, $\cos x = \cos x$ et $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$. Par conséquent, les polynômes $P_0(X) = 1$, $P_1(X) = X$, et $P_2(X) = 2X^2 - 1$ conviennent.

c. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ fixés. La formule de trigo $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cos b$, appliquée avec $a = n+1$ et $b = 1$, donne

$$2\cos(n+1)x \ \cos x = \cos(n+2)x + \cos nx$$

À présent , montrons par récurrence double que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, P_n existe.

- **Initialisation :** D'après la question précédente, P_0 et P_1 existent.
- **Hérédité :** Soit $n \geqslant 0$ tel que P_n et P_{n+1} existent. Définissons

$$Q(X) = 2XP_{n+1}(X) - P_n(X)$$

D'après la remarque ci-dessus, nous avons pour tout nombre réel x

$$\begin{aligned} Q(\cos x) &= 2\cos x P_{n+1}(\cos x) - P_n(\cos x) \\ &= 2\cos x \ \cos(n+1)x - \cos nx = \cos(n+2)x. \end{aligned}$$

Par conséquent le polynôme $Q(X) = 2XP_{n+1}(X) - P_n(X)$ vérifie la relation (13.2). Il s'ensuit que P_{n+2} existe et $P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$.

- **Conclusion :** Par récurrence double , nous avons démontré l'existence de P_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

De plus par construction, la suite (P_n), vérifie la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n \tag{13.3}$$

2. Factorisation

a. Lorsque $n = 1$ ou $n = 2$, on sait que P_n est de degré n et que son coefficient dominant est 2^{n-1}. Montrons par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}^\star$ que P_n est de degré n et que son coefficient dominant est 2^{n-1}.

- **Initialisation :** C'est vérifié !
- **Hérédité :** Soit $n \geqslant 1$ tel que les monômes dominants de P_n et P_{n+1} soient respectivement $2^{n-1}X^n$ et 2^nX^{n+1}. Alors par la relation (13.3), nous avons $P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n$. Le monôme dominant de P_{n+2} est obtenu en effectuant le produit des monômes dominants de $2X$ et P_{n+1}, ce qui donne 2^{n+1}.
- **Conclusion :** Nous avons prouvé par récurrence double que $\forall n \geqslant 1$ P_n admet $2^{n-1}X^n$ comme monôme dominant.

b. Résolvons dans $[0, \pi]$ l'équation

$$\cos nx = 0 \tag{13.4}$$

Pour tout nombre réel $x \in [0, \pi]$, nous avons

$$\cos nx = 0 \iff nx \equiv \frac{\pi}{2} \quad [\pi] \iff x \equiv \frac{\pi}{2n} \quad [\frac{2\pi}{2n}]$$

Par conséquent l'ensemble des solutions de (13.4) dans $[0, \pi]$ est :

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{2n}; \frac{3\pi}{2n}; \frac{5\pi}{2n}; \ldots; \frac{(2n-1)\pi}{2n} \right\} = \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2n}; k \in [\![0, n-1]\!] \right\}$$

La fonction cos est strictement monotone donc injective sur $[0, \pi]$, il s'ensuit

$$card\{x_k\} = card\{\cos t_k\} = card\mathcal{S} = n$$

Posons $t_k = \dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$ et $x_k = \cos t_k$. D'après la relation (13.2), il en résulte que $P_n(x_k) = \cos nt_k = 0$. Par conséquent, $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ sont n racines distinctes de P_n. Or, d'après la question **2.a** P_n est degré n, il admet au plus n racines réelles distinctes ou confondues. Donc on les a toutes et elles sont toutes simples ! !

D'après le théorème de factorisation des polynômes à coefficients réels, P_n s'écrit donc $P_n = a_n \prod_{k=0}^{n-1}(X - x_k)$. En identifiant les coefficients dominants grâce à la question **2. a**, nous obtenons finalement :

$$P_n = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} (X - x_k)$$

c. En évaluant le polynôme P_n point 0 , nous obtenons

$$P_n(0) = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} (0 - x_k) = 2^{n-1}(-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n}$$

D'où il découle que

$$\prod_{k=0}^{n-1} \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} P_n(0)$$

D'autre part, par la relation (13.2), il vient

$$P_n(0) = P_n(\cos \pi/2) = \cos(n\pi/2) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ (-1)^{n/2} & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

En réinjectant ce résultat dans la précédente égalité, il vient finalement

$$\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = \frac{(-1)^{n/2}}{2^{n-1}} \text{ si } n \text{ est pair, 0 sinon.}$$

▲

Exercice 13.14

On met en œuvre la **méthode 13.10**.

1. Soit $F(X) = \dfrac{X^2 + 2X + 5}{X^2 - 3X + 2}$ La partie entière de F est égale à 1. F admet deux pôles simples : 1 et 2. Par conséquent, F admet une DES de la forme :

$$F(X) = \frac{X^2 + 2X + 5}{(X-1)(X-2)} = 1 + \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-2}$$

On détermine les coefficients relatifs aux pôles simples à l'aide de la **méthode 13.12**.

On a

$$(X-1)F(X) = \frac{X^2 + 2X + 5}{X-2} \xrightarrow[x=1]{} a = -8$$

$$(X-2)F(X) = \frac{X^2 + 2X + 5}{X-1} \xrightarrow[x=2]{} b = 13$$

Ainsi, $F(X) = 1 - \dfrac{8}{X-1} + \dfrac{13}{X-2}$.

2. $X^2 = 1 \times (X^2 - 4X + 3) + 4X - 3$. D'où la partie entière de F est $E(X) = 1$. Le dénominateur est scindé $Q(X) = (X-1) \times (X-3)$ à racines simples 1 et 3. Par conséquent, la DES de F s'écrit

$$F(X) = 1 + \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-3}$$

Utilisons la méthode « pôle simple » pour déterminer les coefficients a et b

$$\begin{aligned}(X-1)F(X) &= \frac{X^2}{X-3} \xrightarrow[x=1]{} a = \frac{9}{2}\\ (X-3)F(X) &= \frac{X^2}{X-1} \xrightarrow[x=3]{} b = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Ainsi, $$F(X) = 1 - \frac{9}{2(X-1)} - \frac{1}{2(X-3)}.$$

3. $F(X) = \dfrac{X^2+1}{(X-1)(X-2)(X-3)}$ est de degré strictement négatif, sa partie entière est nulle. Vu les trois pôles simples de F sa DES prendra l'allure suivante :

$$F(X) = \frac{X^2+1}{(X-1)(X-2)(X-3)} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-2} + \frac{c}{X-2}$$

On a

$$\begin{aligned}(X-1)F(X) &= \frac{X^2+1}{(X-2)(X-3)} \xrightarrow[x=1]{} a = 1\\ (X-2)F(X) &= \frac{X^2+1}{(X-1)(X-3)} \xrightarrow[x=2]{} b = -5\\ (X-3)F(X) &= \frac{X^2+1}{(X-1)(X-2)} \xrightarrow[x=3]{} c = 5\end{aligned}$$

D'où $F(X) = \dfrac{1}{X-1} - \dfrac{5}{X-2} + \dfrac{5}{X-3}$. ▲

Exercice 13.15

1. $F(X) = \dfrac{2X}{X^2+1}$ admet deux pôles simples i et $-i$. En remarquant que $2X = (X-i) + (X+i)$, on obtient directement :

$$F(X) = \frac{(X-i)+(X+i)}{(X-i)(X+i)} = \frac{1}{X-i} + \frac{1}{X+i}.$$

2. $F(X) = \dfrac{1}{X^2+X+1}$ est de degré strictement négatif : sa partie entière est donc nulle. Elle admet deux pôles simples (conjugués) j et j^2. Comme de plus F est à coefficients réels, les parties polaires relatives à ces pôles sont aussi conjuguées, ainsi $F(X) = \dfrac{1}{(X-j)(X-j^2)} = \dfrac{a}{X-j} + \dfrac{\overline{a}}{X-j^2}$. De plus,

$$(X-j)F(X) = \frac{1}{X-j^2} \xrightarrow[x=j]{} a = (j-\overline{j})^{-1} = (i\sqrt{3})^{-1}$$

D'où $F(X) = \dfrac{-i\sqrt{3}}{3(X-j)} + \dfrac{i\sqrt{3}}{3(X-j^2)}$.

3. Encore une fois, la partie entière est nulle. F admet trois pôles simples 0 i et $-i$. En vertu du **théorème 13.14**, la DES de F s'écrit :

$$\begin{aligned} F(X) &= \frac{a}{X} + \frac{b}{(X-i)} + \frac{c}{(X+i)} \\ \overline{F}(X) &= \frac{\overline{a}}{X} + \frac{\overline{c}}{(X-i)} + \frac{\overline{b}}{(X+i)} \end{aligned}$$

Par unicité de la DES, il vient b et c sont conjugués. De plus,

$$\begin{aligned} XF(X) &= \frac{X^2+X-1}{X^2+1} \xrightarrow[x=0]{} a = -1 \\ (X-i)F(X) &= \frac{X^2+X-1}{X(X+i)} \xrightarrow[x=i]{} b = 1 - \frac{i}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, $$F = -\frac{1}{X} + \frac{2-i}{2(X-i)} + \frac{2+i}{2(X+i)}.$$ ▲

Exercice 13.16

1. F a deux pôles, 0 (pôle simple) et 1 (pôle double). On admet que la DES de F s'écrit sous la forme $F(X) = \dfrac{a_0}{X} + \dfrac{b_0}{(X-1)^2} + \dfrac{b_1}{(X-1)}$. On détermine alors les coefficients réels a_0, b_0, b_1. Il vient :

On utilise ici une limite à l'infini pour obtenir une autre relation entre les coefficients.

$$\begin{aligned} XF(X) &= \tfrac{X-2}{(X-1)^2} & &\xrightarrow[x=0]{} a_0 = -2 \\ (X-1)^2F(X) &= \tfrac{X-2}{X} = 1 - \tfrac{2}{X} & &\xrightarrow[x=1]{} b_0 = -1 \\ XF(X) &= \tfrac{X-2}{(X-1)^2} & &\xrightarrow[x=\to\infty]{} 0 = a_0 + b_1 \\ & & &\text{d'où } b_1 = -a_0 = 2 \end{aligned}$$

Ainsi, $$F(X) = -\frac{2}{X} - \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{2}{(X-1)}$$

2. $F(X) = \dfrac{2X^3+X}{X^4-5X^2+4}$ est de degré strictement négatif, la partie entière est donc nulle. On observe que F est impaire. Le dénominateur se factorise sous la forme $Q(X) = (X^2-1)\,(X^2-4) = (X-1)(X+1)(X-2)(X+2)$. F admet 4 pôles simples et par suite, F se décompose sous la forme :

$$F = \frac{a_0}{X-1} + \frac{b_0}{X+1} + \frac{c_0}{X-2} + \frac{d_0}{X+2}$$

Comme F est impaire, il découle de l'unicité de la DES que $a_0 = b_0$ et $c_0 = d_0$. On détermine les coefficients a_0, c_0 à l'aide de la **méthode 13.12**. Il vient :

$$\begin{aligned} (X-1)F(X) &= \tfrac{2X^3+X}{(X+1)(X^2-4)} \xrightarrow[x=1]{} a_0 = -\tfrac{1}{2} \\ (X-2)F(X) &= \tfrac{2X^3+X}{(X+2)(X^2-1)} \xrightarrow[x=2]{} c_0 = \tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, $$F(X) = -\frac{1}{2(X-1)} - \frac{1}{2(X+1)} + \frac{3}{2(X-2)} + \frac{3}{2(X+2)}.$$

3. On observe que F est paire cette fois. Le dénominateur se factorise sous la forme :

$$\begin{aligned} Q(X) &= X^4 + X^2 + 1 = (X^4 + 2X^2 + 1) - X^2 \\ &= (X^2+1)^2 - X^2 = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1) \end{aligned}$$

On admet que la DES de F prend l'allure suivante $F(X) = \dfrac{a_0 + b_0 X}{X^2 + X + 1} + \dfrac{c_0 + d_0 X}{X^2 - X + 1}$. Comme F est paire on a $F(-X) = F(X)$. Par unicité de la DES il s'ensuit que $c_0 = a_0$ et $d_0 = -b_0$.
On détermine les coefficients a_0, b_0, c_0 et d_0 à l'aide de la **méthode 13.14**. Il vient :

$$\begin{aligned} F(X) &= \frac{1}{X^4 + X^2 + 1} && \xrightarrow[x=0]{} 1 = a_0 + c_0 \\ & && \text{d'où l'on tire } a_0 = c_0 = \tfrac{1}{2} \\ XF(X) &= \frac{X}{X^4 + X^2 + 1} && \xrightarrow[x\to\infty]{} 0 = b_0 + d_0 \\ F(X) &= \frac{1}{X^4 + X^2 + 1} && \xrightarrow[x=i]{} 1 = \tfrac{a_0 - b_0 i}{1} + \tfrac{c_0 + d_0 i}{-i} \\ & \text{d'où l'on tire par identification} && b_0 = \tfrac{1}{2}, d_0 = -\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, $$F(X) = \frac{1+X}{2(X^2+X+1)} + \frac{1-X}{2(X^2+X+1)}.$$

4. $F(X) = \dfrac{1}{X^3+1}$ est de degré strictement négatif, la partie entière est donc nulle. Le dénominateur Q se décompose à l'aide de l'**identité géométrique** sous la forme $Q(X) = (X+1)(X^2 - X + 1)$. D'après l'indication fournie, F s'écrit également $F(X) = \dfrac{a_0}{X+1} + \dfrac{b_0 + c_0 X}{X^2 - X + 1}$. On détermine les coefficients a_0, b_0, c_0 à l'aide de la **méthode 13.14**. Il vient :

$$\begin{aligned} (X+1)F(X) &= \tfrac{1}{X^2-X+1} && \xrightarrow[x=-1]{} a_0 = \tfrac{1}{3} \\ XF(X) &= \tfrac{X}{X^3+1} && \xrightarrow[x\to\infty]{} 0 = a_0 + c_0 \\ & && \text{d'où l'on tire } c_0 = -\tfrac{1}{3} \\ F(X) &= \tfrac{1}{X^3+1} && \xrightarrow[x=0]{} 1 = a_0 + b_0 \\ & && \text{soit } b_0 = \tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

En définitive, $$F(X) = \frac{1}{3(X+1)} + \frac{2-X}{3(X^2-X+1)}.$$ ▲

Corrigé

Deuxième semestre

Chapitre 14

Analyse asymptotique

UN MATHÉMATICIEN

Né à Berlin dans une famille juive, **Edmund Landau** étudie les mathématiques dans l'université de sa ville natale ; il y enseigne avant d'être nommé professeur dans la célèbre université de Göttingen. Chassé par les nazis en 1934, il se rend en Angleterre et aux Pays-Bas. Ses travaux concernent d'une part la théorie des nombres mais aussi les fonctions de variables complexes. Son nom reste attaché aux notations de comparaisons de fonctions.

Un peu d'histoire

L'apparition du calcul différentiel à la fin du XVIIe siècle a rendu nécessaire la comparaison de fonctions. À l'époque, Leibniz parlait d'éléments infinitésimaux qui pouvaient être négligés au sens propre du mot. Brook Taylor, en introduisant la formule qui a fait son renom, la terminait simplement par des points de suspension.

Un siècle plus tard Joseph Lagrange a senti le besoin d'encadrer les restes dans l'inégalité des accroissements finis mais aussi dans la formule de Taylor.

Le mathématicien Paul Bachmann puis après lui Godfrey Hardy et John Littlewood, ont introduit des notations pour indiquer qu'une fonction est négligeable devant une autre. C'est pourtant celles d'Edmund Landau que nous utilisons de nos jours avec les petit o et grand O, cette lettre étant l'initiale du mot allemand *Ordnung*.

Objectifs

les incontournables

- Calculer un équivalent d'une suite ou d'une fonction :
  - Connaître parfaitement les équivalents des fonctions usuelles et des suites de référence ;
  - Calculer un équivalent d'une suite ou d'une fonction obtenue par opérations algébriques compatibles, par somme, ou par changement de variable.
- Calculer un développement limité d'une fonction :
  - Connaître parfaitement les développements limité des fonctions usuelles ;
  - Calculer le développement limité d'une fonction obtenue par opérations algébriques, par changement de variable, par primitivation ou dérivation.

et plus si affinités

- Calculer le développement limité d'une fonction réciproque.
- Déterminer un développement asymptotique d'une suite ou un développement limité généralisé d'une fonction.

Résumé de cours

Comparaison locale des fonctions

Trois relations de comparaison

Définition : *Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I} \cup \{\pm\infty\}$. On dit que f **est dominée par** g (resp. **négligeable devant** g, ou **équivalente à** g) au voisinage de a, et on note $f = \mathcal{O}_a(g)$ (resp. $f = o_a(g)$, ou $f \sim_a g$), s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a dans I et une fonction $\varphi : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ vérifiant l'égalité $(\forall x \in \mathcal{V}), \quad f(x) = \varphi(x)g(x)$ et telle que φ est bornée (resp. $\lim\limits_a \varphi = 0$, ou $\lim\limits_a \varphi = 1$).*

En pratique, la proposition suivante remplace souvent cette définition :

Proposition 14.1.— Caractérisations à l'aide des quotients —. Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I} \cup \{\pm\infty\}$. On suppose que g ne s'annule pas dans $I \setminus \{a\}$ et que f et g sont continues au point a si $a \in I$.

- $f = \mathcal{O}_a(g) \iff (f/g)$ est bornée au voisinage de a.
- $f = o_a(g) \iff \lim\limits_a (f/g) = 0$.
- $f \sim_a g \iff \lim\limits_a (f/g) = 1$.

Proposition 14.2.— Caractérisation de l'équivalence à l'aide de la différence —. Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I} \cup \{\pm\infty\}$, alors :

- $f \sim_a g \quad \iff \quad f - g = o_a(g)$.

Propriétés des fonctions équivalentes

$f, g : I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I} \cup \{\pm\infty\}$. Dans ce paragraphe, on suppose que $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$.

Théorème 14.3.— Propriété fondamentale des fonctions équivalentes —.

$$\boxed{(\forall \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}), \quad \left(\lim_{x \to a} f(x) = \ell \iff \lim_{x \to a} g(x) = \ell\right).}$$

Proposition 14.4.— $f > 0$ au voisinage de a si et seulement si $g > 0$ au voisinage de a.

Enfin, on peut remplacer f par g dans toute relation de comparaison au voisinage de a.

Obtention d'équivalents

Théorème 14.5.— Opérations compatibles avec l'équivalence —. Soit $f_1, f_2, g_1, g_2 : I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I} \cup \{\pm\infty\}$ et $\alpha \in \mathbb{R}^*$. On suppose que $f_1 \sim_a f_2$ et $g_1 \sim_a g_2$. Alors

- **Produit** $f_1(x)g_1(x) \underset{x \to a}{\sim} f_2(x)g_2(x)$.
- **Quotient** Si de plus g_1 ne s'annule pas dans $I \setminus \{a\}$, alors $\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)} \underset{x \to a}{\sim} \dfrac{f_2(x)}{g_2(x)}$.
- **Puissance** Si de plus $f_1 > 0$ dans $I \setminus \{a\}$, alors $f_1^\alpha(x) \underset{x \to a}{\sim} f_2^\alpha(x)$.

Warning ! La somme des équivalents, n'est pas en général un équivalent de la somme !

Théorème 14.6.— Soit $f_1, f_2 : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I} \cup \{\pm\infty\}$.

- **Somme** Si $f_2(x) \underset{x\to a}{=} o(f_1(x))$, alors $f_1(x) + f_2(x) \underset{x\to a}{\sim} f_1(x)$.

Théorème 14.7.— Soit $f, g : J \to \mathbb{R}$, $h : I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I} \cup \{\pm\infty\}$ et $b \in \overline{J} \cup \{\pm\infty\}$, tels que $h(I) \subset J$.

- **Composée** Si $\lim\limits_{x\to a} h(x) = b$ et $f(y) \underset{y\to b}{\sim} g(y)$ alors $f \circ h(x) \underset{x\to a}{\sim} g \circ h(x)$.

Warning ! En général, le résultat est faux pour la composition à gauche : $f \sim_a g \not\Rightarrow h \circ f \sim_a h \circ g$.

Proposition 14.8.— Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $a \in I$.

- **Accroissement** Si $f'(a) \neq 0$ alors $f(x) - f(a) \underset{x\to a}{\sim} f'(a) \cdot (x - a)$.

Comparaison de fonctions usuelles

Théorème 14.9.— Croissances comparées des fonctions usuelles —. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R}^{+\star}$ tels que $\alpha < \beta$, alors :

- **Au voisinage de 0^+ :** $(|\ln x|)^\gamma \underset{x\to 0}{=} o(1/x^\alpha)$ et $x^\beta \underset{x\to 0}{=} o(x^\alpha)$.
- **Au voisinage de $+\infty$:** $(\ln x)^\gamma \underset{x\to+\infty}{=} o(x^\alpha)$, $x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o(x^\beta)$ et $x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o(e^{\gamma x})$.
- **Au voisinage de $-\infty$:** $e^{\gamma x} \underset{x\to-\infty}{=} o(1/|x|^\alpha)$

Théorème 14.10.— Équivalents usuels au voisinage de 0 —. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

• $\sin(x) \sim_0 x$	• $1 - \cos(x) \sim_0 \frac{x^2}{2}$	• $\tan(x) \sim_0 x$
• $(1+x)^\alpha - 1 \sim_0 \alpha x$	• $\ln(1+x) \sim_0 x$	• $e^x - 1 \sim_0 x$

Proposition 14.11.— Équivalents d'un polynôme —. Soit P la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = a_d\, x^d + a_{d+1}\, x^{d+1} + \cdots + a_n\, x^n$, où a_n et a_d sont non nuls. Alors :

- **Au voisinage de 0 :** $P(x) \underset{x\to 0}{\sim} a_d\, x^d$ (monôme de plus bas degré)
- **Au voisinage de $\pm\infty$:** $P(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} a_n\, x^n$ (monôme dominant).

■ Développements limités d'une fonction au voisinage d'un point

Développements limités à l'ordre n de f au voisinage d'un point a

Soit I un intervalle, $a \in \overline{I}$ un point de I ou une extrémité (réelle) de I, f désigne une fonction définie dans I (éventuellement privé de a).

Définition : *f admet un **développement limité à l'ordre n au voisinage de a** s'il existe un polynôme P_n de degré inférieur ou égal à n tel que pour tout réel x voisin de a,*

$$\boxed{\begin{array}{lrcl} (DL_n(a)) & f(x) & = & P_n(x-a) + o_a\left((x-a)^n\right) \\ & & = & a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + o_a\left((x-a)^n\right) \end{array}}$$

Vocabulaire : *$P_n(x-a)$ est la **partie régulière du développement limité** de f, la différence $f(x) - P_n(x-a) = o_a\left((x-a)^n\right)$ est le **reste du développement limité** de f à l'ordre n.*

En pratique : le changement de variable $x = a + t$ permet de se ramener au voisinage de l'origine. Lorsque la partie régulière n'est pas nulle, le développement limité de f se présente sous forme normalisée $f(a+t) = a_p t^p + a_{p+1} t^{p+1} + \cdots + a_n t^n + o_{t\to 0}(t^n)$, où $a_p \neq 0$.

Développements limités au voisinage de $\pm\infty$

Définition : *Si I est non majoré, on dit que f admet un **développement limité à l'ordre n au voisinage de $+\infty$** s'il existe un polynôme P_n de degré inférieur ou égal à n tel que pour tout réel $x \in I \cap \mathbb{R}^{+\star}$,*

$$(DL_n(+\infty)) \qquad f(x) \underset{x\to+\infty}{=} P_n\left(\frac{1}{x}\right) + o\left(\frac{1}{x^n}\right) \underset{x\to+\infty}{=} a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

Développement limité d'une fonction de classe $\mathcal{C}^n$

Théorème 14.12.— Formule de Taylor-Young —. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^n$ dans I et que $a \in I$. Alors a un développement limité à l'ordre n au voisinage de a. Pour tout x voisin de a,

$$\boxed{(DL_n(a)) \quad f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o_a\left((x-a)^n\right)}$$

Propriétés des fonctions admettant un $DL_n(a)$

Théorème 14.13.— Unicité d'un développement limité —. Si f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de a, ce développement limité a une partie régulière unique.

Comme conséquences de l'unicité de la partie régulière, nous obtenons :

Corollaire 14.14.— Soit f une fonction admettant un développement limité au **voisinage de** 0. Si f est paire (*resp.* impaire), la partie régulière de ce développement est un polynôme ne possédant que des monômes de degré pair (*resp.* de degré impair).

Obtention de développements limités

Les théorèmes ci-après sont énoncés pour des **développements limités au voisinage de l'origine**. Le cas général s'en déduit grâce au changement de variable $x = a + t$, ou $x = \frac{1}{t}$.

Corollaire 14.15.— Troncature d'un développement limité —. Soit $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leqslant p \leqslant n$.
Si f admet un $DL_n(0)$ $\quad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$.
Alors f admet comme $DL_p(0)$ $\quad f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_p x^p + o(x^p)$.

Soit f, g deux fonctions définies dans un intervalle I contenant l'origine. On suppose que f et g admettent des DL d'ordre n **au voisinage de** 0 :

- $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$
- $g(x) = Q_n(x) + o(x^n)$, où P_n et Q_n sont des polynômes de degrés inférieurs à n.

Théorème 14.16.— Opérations algébriques sur les développements limités —. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

- **Combinaison linéaire** $(\lambda f + \mu g)(x) = (\lambda P_n + \mu Q_n)(x) + o(x^n)$
- **Produit** $(f \times g)(x) = R_n(x) + o(x^n)$, où R_n est le polynôme $P_n \times Q_n$ *tronqué* à l'ordre n.

Remarque : si de plus f ne s'annule pas dans un voisinage de 0, alors son inverse admet aussi un $DL_n(0)$, obtenu comme composée (voir **méthode 14.12**).

Théorème 14.17.— On suppose $g(0) = 0$. Alors

- **Composée** $(f \circ g)(x) = R_n(x) + o(x^n)$, où R_n est le polynôme $P_n \circ Q_n$ *tronqué* à l'ordre n.

Warning ! Ne pas confondre le produit $P_n \times Q_n$ et le composé $P_n \circ Q_n$!

Théorème 14.18.— On suppose f continue dans I. Soit F une primitive de f sur I, alors

- **Primitive** $F(x) = F(0) + \displaystyle\int_0^x P_n(t)\,dt + o(x^{n+1})$.

Théorème 14.19.— On suppose f dérivable dans I. S'il existe, le $DL_{n-1}(0)$ de f' est donné par :

- **Dérivée** $f'(x) = P_n'(x) + o(x^{n-1})$

■ Développements limités de quelques fonctions usuelles

Un catalogue des développements limités des fonctions les plus usuelles se trouve page 420.

■ Relations de comparaison entre suites

Une suite de nombres réels est une fonction $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. On peut appliquer les notions précédentes à une suite au voisinage de $+\infty$. En particulier, on définit les relations de comparaison entre suites.

Trois relations de comparaison

Définition : *Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels, tel que les termes v_n sont non nuls à partir d'un certain rang n_0. On dit que la* ***suite*** *u* ***est*** *:*

- ***dominée par v****, et on note $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ si la suite $(u_n/v_n)_{n\geqslant n_0}$ est bornée ;*
- ***négligeable devant v****, et on note $u_n = o(v_n)$ si la suite (u_n/v_n) est convergente vers 0 ;*
- ***équivalente à v*** *, et on note $u_n \sim v_n$ si la suite (u_n/v_n) est convergente vers 1.*

Remarque : pour une suite, il est inutile de préciser que les relations de comparaison ont lieu au voisinage de $+\infty$.

Proposition 14.20.— Caractérisation de l'équivalence à l'aide de la différence —. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels alors :

$$\boxed{u_n \sim v_n \quad \Longleftrightarrow \quad u_n - v_n = o(v_n).}$$

Propriétés des suites équivalentes

Soit (u_n) et (v_n) deux suites de réels. Dans ce paragraphe, on suppose que $u_n \sim v_n$.

Théorème 14.21.— Propriété fondamentale des suites équivalentes

$$\boxed{(\forall \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}), \quad \left(\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \iff \lim_{n\to+\infty} v_n = \ell\right).}$$

Proposition 14.22.— À partir d'un certain rang, u_n et v_n sont de même signe.

Obtention d'équivalents

Théorème 14.23.— Soit $(u_n), (u'_n), (v_n), (v'_n)$ des suites de réels.

- **Produit** Si $u_n \sim v_n$ et $u'_n \sim v'_n$, alors $u_n \times u'_n \sim v_n \times v'_n$.
- **Quotient** Si $u_n \sim v_n$ et $u'_n \sim v'_n$, alors $\dfrac{u_n}{u'_n} \sim \dfrac{v_n}{v'_n}$.
- **Puissance** Si $u_n > 0$ et $u_n \sim v_n$, alors $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.
- **Somme** Si $v_n = o(u_n)$ alors $u_n + v_n \sim u_n$.

Comparaison des suites usuelles

Proposition 14.24.— Relations de comparaison entre suites classiques —. Soit α, β, γ des réels tels que $\alpha > 0, \beta > 0$ et $\gamma > 1$. Alors :

$$\boxed{\bullet\ (\ln n)^\alpha = o\left(n^\beta\right) \quad \bullet\ n^\beta = o\left(\gamma^n\right) \quad \bullet\ \gamma^n = o\left(n!\right)}$$

Théorème 14.25.— Équivalents usuels —. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, alors

$$\boxed{\begin{array}{lll} \bullet\ \sin(u_n) \sim u_n & \bullet\ 1 - \cos(u_n) \sim \dfrac{u_n^2}{2} & \bullet\ \tan(u_n) \sim u_n \\ \bullet\ (1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n & \bullet\ \ln(1+u_n) \sim u_n & \bullet\ e^{u_n} - 1 \sim u_n. \end{array}}$$

Développements limités de quelques fonctions usuelles

Théorème 14.26.— Développements limités au voisinage de 0 de fonctions usuelles —.

$$\begin{aligned}
\exp(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^k + \cdots + x^n + o(x^n) \\
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
\operatorname{ch}(x) &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
\operatorname{sh}(x) &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \\
\operatorname{Arctan}(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) \\
\tan(x) &= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6),\ \operatorname{cotan}(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{45}x^3 + o(x^4) \\
\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{2^{2n-1}(n-1)!n!}x^n + o(x^n) \\
\frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^n + o(x^n) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n), \quad \alpha \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Méthodes

Limites de fonctions

Étudier une limite

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I} \cup \{\pm\infty\}$. Lorsque f est construite à partir de fonctions usuelles par opérations algébriques, vous pouvez appliquer le **théorème 10.6**. *S'il n'y a pas d'indétermination*, la limite de f en a est obtenue par ces mêmes opérations algébriques sur des limites. Toutefois, il est fort probable qu'apparaisse une forme indéterminée, c'est-à-dire une expression de la forme : $+\infty - \infty$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\dfrac{0}{0}$, $0 \times \infty$, 1^∞, 0^0. Dans ce cas, l'idée générale est de remplacer f par un équivalent qui apparaît dans le tableau des croissances comparées des fonctions usuelles.

> ❑ **Méthode 14.1.— Comment étudier la limite de f en a en cas d'indétermination**
>
> $\boxed{1}$ Simplifier l'expression de f à l'aide d'opérations algébriques, par exemple en multipliant une fraction par l'expression conjuguée du dénominateur ;
>
> $\boxed{2}$ Déterminer un équivalent simple de f (voir les méthodes ci-après) ;
>
> $\boxed{3}$ Conclure à l'aide des **croissances comparées des fonctions usuelles**, **théorème 14.9**.

Équivalents d'une fonction

Calculer un équivalent d'une fonction au voisinage de a

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I} \cup \{\pm\infty\}$. Le plus simple, pour déterminer un équivalent de f est d'étudier sa limite : si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$, avec $\ell \in \mathbb{R}^\star$ un **réel non nul**, alors $f(x) \underset{x \to a}{\sim} \ell$, car le quotient tend vers 1.

Warning ! Les seules fonctions équivalentes à 0 en a sont les fonctions identiquement nulles au voisinage de a ! comme il est peu probable que l'on vous demande d'étudier une telle fonction, si vous écrivez $f(x) \underset{x \to a}{\sim} 0$, il y a 99% de chances que vous vous soyez trompé !

Plus généralement, il y a quatre pistes possibles pour déterminer un équivalent simple :

- les opérations algébriques,
- le changement de variable,
- le lien avec la dérivée de f en a,
- ou encore obtenir un développement limité de f en a.

> ❑ **Méthode 14.2.— Comment se ramener au voisinage de 0**
>
> Comme les équivalents usuels sont presque tous au voisinage de 0 (**théorème 14.10**), on commence par se ramener au voisinage de 0 au moyen du changement de variable adapté :
>
> ▸ $x = a + t$, avec $t \to 0$ si $a \in \overline{I}$ (a est un point de I ou une extrémité réelle de I) ;
>
> ▸ $x = 1/t$, avec $t \to 0^\pm$, si $a = \pm\infty$ (a est une extrémité infinie de I).

❑ Méthode 14.3.— Comment obtenir un équivalent par changement de variable

Pour déterminer un équivalent de $f(x)$ en a, par changement de variable,

1. On identifie $y(x)$ et $g(y)$ de sorte que $f(x) = g\big(y(x)\big)$. On calcule $b = \lim\limits_{x\to a} y(x)$.
2. On détermine ensuite un équivalent de $g(y)$ pour y voisin de b : $g(y) \underset{y\to b}{\sim} h(y)$.
3. On conclut avec le **théorème 14.7** que $f(x) = g \circ y(x) \underset{x\to a}{\sim} h \circ y(x)$.

Exemple : déterminons un équivalent de $f(x) = \ln(1+\sin(x))$ au voisinage de 0. On effectue un changement de variable :

$$\left.\begin{array}{l}\text{On pose } y(x) = \sin(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \\ \text{or on sait que } \ln(1+y) \underset{y\to 0}{\sim} y\end{array}\right), \text{ on en déduit que } f(x) = \ln\big(1+y(x)\big) \underset{x\to 0}{\sim} y(x) = \sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x.$$

Warning ! Si $\lim\limits_{x\to a} y(x) = b$, on peut donc composer des équivalents par la droite : $g \underset{b}{\sim} h \Rightarrow g\circ y \underset{a}{\sim} h\circ y$. En revanche, on ne peut pas composer par la gauche !! En particulier, on ne compose pas des équivalents à gauche par ln ou exp !!

$$g(y) \underset{y\to b}{\sim} h(y) \not\Rightarrow \exp\circ g\ (y) \underset{y\to b}{\sim} \exp\circ h\ (y)$$

Ainsi, $1 + x \underset{x\to 0}{\sim} 1$ mais $\ln(1+x) \not\sim_0 0$, et au voisinage de $+\infty$, $x^2 + x \underset{+\infty}{\sim} x^2$ mais $e^{x^2+x} \not\sim_{+\infty} e^{x^2}$.

❑ Méthode 14.4.— Comment obtenir un équivalent par opérations algébriques

- Si f est construite comme *produit*, *puissance* ou *quotient* de fonctions usuelles, vous utilisez les propriétés de compatibilité des équivalents avec ces opérations (**théorème 14.5**).
- Si f est construite comme *somme* de fonctions, alors f est équivalente au *terme dominant* de cette somme (**théorème 14.6**). Pour le trouver, vous pouvez :
  1. déterminer un équivalent de chacun de termes $f_1(x) \underset{x\to a}{\sim} g_1(x)$, $f_2(x) \underset{x\to a}{\sim} g_2(x)$;
  2. classer ces équivalents par ordre de négligeabilité ;
  3. et conclure : si $g_2(x) \underset{x\to a}{=} o\,(g_1(x))$, alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} f_1(x) \underset{x\to a}{\sim} g_1(x)$.

Remarque : lorsqu'aucun terme d'une somme ne prédomine, on utilise la caractérisation par la différence (**théorème 14.2**) $\begin{array}{rcl} f_1(x) & = & g_1(x) + o(g_1(x)) \\ f_2(x) & = & g_2(x) + o(g_2(x)) \end{array}$. Comme il s'agit d'égalités fonctionnelles, on peut ajouter terme à terme et utiliser les règles de calcul avec les «o».

Warning ! L'addition n'est pas compatible avec les équivalents : on n'obtient pas toujours un équivalent en faisant la somme des équivalents ... **prudence !**

❑ Méthode 14.5.— Comment obtenir un équivalent d'un accroissement de f

Si f est dérivable en $a \in I$ et vérifie $f'(a) \neq 0$, alors $f(x) - f(a) \underset{x\to a}{\sim} f'(a)\cdot(x-a)$.

Remarque : tous les équivalents usuels peuvent être obtenus à l'aide de cette méthode !

Exemple : soit $f(x) = \text{Arctan}\,(1+x)$. f est dérivable en 0 et $f'(0) = \dfrac{1}{2}$. Il s'ensuit que

$$\text{Arctan}\,(1+x) - \frac{\pi}{4} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{2}$$

> ❑ **Méthode 14.6.— Comment déterminer un équivalent à l'aide d'un DL**
> Pour déterminer un équivalent de f au voisinage de a, on forme un DL de f en a (voir les méthodes ci-après) jusqu'à l'obtention d'une partie régulière non nulle :
>
> $$f(x) \underset{x\to a}{=} a_p(x-a)^p + o\left((x-a)^p\right), \quad \text{avec } a_p \neq 0$$
>
> Alors
> $$f(x) \underset{x\to a}{\sim} a_p(x-a)^p.$$

Mise en œuvre : exercice 14.1, exercice 14.17

■ Développements limités

Calculer un développement limité d'une fonction au voisinage de a

Pour déterminer un $DL_n(a)$ d'une fonction f, on peut mettre en œuvre la **formule de Taylor-Young** si f est suffisamment régulière. Mais généralement, la démarche est la suivante :

> ❑ **Méthode 14.7.— Comment établir le $DL_n(a)$ d'une fonction**
> - se ramener en 0 si le développement limité demandé n'est pas en ce point ;
> - décomposer le calcul en plusieurs étapes élémentaires en précisant à chaque étape un ordre de développement convenable ;
> - utiliser à chaque étape la méthode adéquate : composition, primitivation, ou autres opérations sur des développements limités connus.

Remarque : lorsque f n'est pas construite par opérations à partir de fonctions dont les DL sont connus, on utilise volontiers la formule de Taylor-Young

- si l'ordre demandé est petit (1 ou 2) ;
- dans des exercices théoriques où f n'est pas donnée explicitement.

Exemple : formons le $DL_2(0)$ de $f(x) = \text{Arctan}\,(1+x)$. On a $f(0) = \frac{\pi}{4}$, $f'(0) = \frac{1}{2}$, $f''(0) = -\frac{1}{2}$. Il s'ensuit que

$$\text{Arctan}\,(1+x) = \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + o_0(x^2).$$

Mise en œuvre : exercice 14.7, exercice 14.8.

Calculer un développement limité d'une fonction au voisinage de 0 par opérations

Tout développement limité est une égalité entre fonctions. Par conséquent, toute opération licite sur les fonctions est compatible avec les DL !! Les règles d'opération sont donc beaucoup plus souples que pour le calcul des équivalents.
Les développements limités des fonctions usuelles étant connus au voisinage de 0, on se ramènera de façon presque systématique au voisinage de l'origine au moyen du changement de variable adéquat :

- $x = a + t$, avec $t \to 0$ si $a \in \overline{I}$ (a est un point de I ou une extrémité réelle de I) ;
- $x = 1/t$, avec $t \to 0^{\pm}$, si $a = \pm\infty$ (a est une extrémité infinie de I).

Dans la suite de cette partie du chapitre, nous considérons deux fonctions f et g, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de 0, de sorte que f et g admettent des développements limités à tous ordres. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note respectivement P_n et Q_n les parties régulières de leurs DL d'ordre n au voisinage de 0, p et q les plus petits entiers tels que P_p et Q_q sont non nulles. Ainsi

$$\begin{array}{rcll} f(x) & = & a_p x^p + a_{p+1}x^{p+1} + \cdots + a_n x^n + o(x^n) & \text{avec } a_p \neq 0, \\ g(x) & = & b_q x^q + b_{q+1}x^{q+1} + \cdots + b_n x^n + o(x^n). & \text{avec } b_q \neq 0. \end{array}$$

Vocabulaire : *p est la **valuation** de $f(x)$ en 0. On note $p = v_f$ cet entier. On peut utiliser cette notion pour optimiser les calculs.*

❑ Méthode 14.8.— Comment calculer le $DL_n(0)$ d'une combinaison linéaire

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Pour déterminer le $DL_n(0)$ de $\lambda f + \mu g$:

[1] On forme les $DL_n(0)$ de $f(x)$ et $g(x)$:
$$\begin{array}{rrcl} \lambda\times & f(x) & = & P_n(x) + o(x^n) \\ \mu\times & g(x) & = & Q_n(x) + o(x^n) \end{array}$$

[2] On conclut
$$(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda P_n(x) + \mu Q_n(x) + o(x^n).$$

❑ Méthode 14.9.— Comment calculer le $DL_n(0)$ d'un produit

Pour déterminer le $DL_n(0)$ de $f \times g$:

[1] On développe chaque facteur à l'ordre n :
$$\begin{array}{rrcl} & f(x) & = & P_n(x) + o(x^n) \\ \times & g(x) & = & Q_n(x) + o(x^n) \end{array}$$

[2] On multiplie membre à membre les parties régulières, puis on tronque à l'ordre n
$$\begin{array}{rcl} f(x) \times g(x) & = & P_n(x) \times Q_n(x) + o(x^n) \\ & = & R_n(x) + o(x^n) \end{array}$$

Exemple : déterminons le $DL_2(0)$ de $f(x) = \sqrt{1+x} \times \cos(x)$:

$$\begin{array}{rrcl} & \sqrt{1+x} & = & 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2) \\ \times & \cos(x) & = & 1 \qquad - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{1+x} \times \cos(x) & = & \left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2\right)\left(1 - \frac{1}{2}x^2\right) + o(x^2) \\ & = & 1 + \frac{1}{2}x + (-\frac{1}{8} - \frac{1}{2})x^2 + o(x^2) \\ & = & 1 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{8}x^2 + o(x^2) \end{array}$$

Remarque : pour optimiser les calculs, on ne développe pas entièrement le produit $P_n \times Q_n$ avant de tronquer, on calcule plutôt le coefficient constant, le coefficient de x^1, le coefficient de x^2,..., jusqu'au coefficient de x^n.
On pourra aussi noter qu'il suffirait de développer f à l'ordre $n - v_g$ et g à l'ordre $n - v_f$.

❑ Méthode 14.10.— Comment calculer le $DL_n(0)$ d'une puissance

Pour déterminer le $DL_n(0)$ de $f^k(x)$:

[1] On développe $f(x)$ à l'ordre n : $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$

[2] On élève à la puissance k et on tronque $f^k(x) = P_n^k(x) + o(x^n) = R_n(x) + o(x^n)$

Remarque : pour élever à la puissance k, on peut développer les puissances successives par produit, ce qui présente l'avantage de limiter les calculs, ou bien utiliser des formules du type $(a+b+c)^n$ pour certaines valeurs de n,

$$\begin{array}{rcl}(a+b+c)^2 & = & a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc\\ (a+b+c)^3 & = & a^3+b^3+c^3+3a^2b+3ab^2+3ac^2+3a^2c+3bc^2+3b^2c+6abc\end{array}$$

Exemple : calculons par exemple le $DL_8(0)$ de $x \mapsto u^6(x)$ où $u(x)=\sin(x)$. Comme $u^5(x)$ est de valuation 5, il suffit de développer $u(x)=\sin(x)$ à l'ordre $8-5=3$. Ainsi

$$\begin{array}{rcl}u(x) & = & x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\\ u^2(x) & = & x^2-\frac{1}{3}x^4+o(x^4)\\ u^3(x) & = & x^3-\frac{1}{2}x^5+o(x^5)\\ u^5(x) & = & x^5-\frac{5}{6}x^7+o(x^7)\\ u^6(x) & = & x^6-x^8+o(x^8)\end{array}$$

❑ Méthode 14.11.— Comment déterminer le $DL_n(0)$ d'une fonction composée

On présente le calcul comme un changement de variable :

1 On pose $u=g(x)$ et on vérifie directement que $g(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

2 On forme le $DL_n(0)$ de f : $f(u)=P_n(u)+\underset{u\to 0}{o}(u^n)=a_0+a_1u+\cdots+a_nu^n+\underset{u\to 0}{o}(u^n)$

3 De proche en proche, on développe les puissances successives de $g(x)$ à l'ordre n :

$$\begin{array}{r||rcll}a_0\times & g^0(x) & = & 1 & +o(x^n)\\ a_1\times & g^1(x) & = & Q_n(x) & +o(x^n)\\ a_2\times & g^2(x) & = & Q_n^2(x) & +o(x^n)\\ & & \vdots & & \\ a_n\times & g^n(x) & = & Q_n^n(x) & +o(x^n)\end{array}$$

4 Finalement, on conclut par combinaison linéaire :

$$\begin{array}{rcl}f\circ g\ (x) & = & a_0+a_1Q_n(x)+a_2Q_n^2(x)+\cdots+a_nQ_n^n(x)+o(x^n)\\ & = & R_n(x)+o(x^n), \qquad \text{où } R_n \text{ est le polynôme } P_n\circ Q_n \text{ tronqué à l'ordre } n.\end{array}$$

Exemple : déterminons le $DL_3(0)$ de $x\mapsto\sqrt{1+\sin(x)}$.

1 On pose $u=\sin(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

2 On a $f(u)=\sqrt{1+u}=1+\frac{1}{2}u-\frac{1}{8}u^2+\frac{1}{16}u^3+o(u^3)$.

3 On développe les puissances successives de $u(x)$, en tronquant à chaque étape :

$$\begin{array}{r||rcllll}1\times & u^0(x) & = & 1 & & & +o(x^3)\\ +\frac{1}{2}\times & u^1(x) & = & & x & -\frac{1}{6}x^3 & +o(x^3)\\ -\frac{1}{8}\times & u^2(x) & = & & & x^2 & +o(x^3)\\ +\frac{1}{16}\times & u^3(x) & = & & & x^3 & +o(x^3)\end{array}$$

4 Finalement $\sqrt{1+\sin(x)}=1+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{8}x^2-\dfrac{1}{48}x^3+o(x^3)$.

Mise en œuvre : exercice 14.7.

Méthodes

❑ Méthode 14.12.— Comment déterminer le $DL_n(0)$ de l'inverse d'une fonction

Si $f(0) \neq 0$, alors $\dfrac{1}{f(x)}$ admet un $DL_n(0)$ que l'on obtient par composition :

$\boxed{1}$ On forme le $DL_n(0)$ de f : $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$, avec $a_0 \neq 0$.

$\boxed{2}$ On factorise par a_0 pour obtenir $\dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{a_0}\,\dfrac{1}{1+u(x)}$, avec $u(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

$\boxed{3}$ On forme ensuite le $DL_n(0)$: $u(x) = Q_n(x) + o(x^n)$

$\boxed{4}$ On conclut par composition avec le DL usuel de $\dfrac{1}{1+u}$ que $\dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{a_0}\,R_n(x) + o\big(x^n\big)$

où R_n est le polynôme $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k Q_n^k(x)$ *tronqué* à l'ordre n.

Exemple : formons le $DL_5(0)$ de $\dfrac{1}{\cos(x)}$.

$\boxed{1}$ On sait que $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)$.

$\boxed{2}$ Écrivons $\dfrac{1}{\cos(x)} = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)}$.

$\boxed{3}$ Posons $u(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)$, de sorte que $\dfrac{1}{\cos(x)} = \dfrac{1}{1+u(x)}$.

$\boxed{4}$

$$\begin{array}{c||rcrl}
+ & u^0(x) & = & 1 & +o(x^5) \\
- & u^1(x) & = & -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 & +o(x^5) \\
+ & u^2(x) & = & +\frac{1}{4}x^4 & +o(x^5) \\
- & u^3(x) & = & 0 & +o(x^5)
\end{array}$$

Finalement $\dfrac{1}{\cos(x)} = 1 + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{5}{24}x^4 + o(x^5)$.

Remarque : on n'a pas écrit les $DL_5(0)$ de $u^4(x)$ et $u^5(x)$ qui ont des parties régulières nulles. En fait, la valuation (égale à 2) de $u(x)$, permettait de s'économiser la peine de calculer les $DL_5(0)$ de $u^3(x)$, $u^4(x)$ et $u^5(x)$!

❑ Méthode 14.13.— Comment obtenir le $DL_n(0)$ d'un quotient de fonctions

Si $g(0) \neq 0$, pour obtenir le $DL_n(0)$ de $\frac{f(x)}{g(x)}$, on écrit $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \times \frac{1}{g(x)}$. Ce $DL_n(0)$ s'obtient alors comme produit de ceux de $f(x)$ et de $\frac{1}{g(x)}$.

Exemple : formons le $DL_5(0)$ de $\tan(x)$.

- $\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)$ et $\dfrac{1}{\cos(x)} = 1 + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{5}{24}x^4 + o(x^5)$.

- Par produit
$$\begin{aligned}
\tan(x) &= \big(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5\big)\big(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4\big) + o(x^5) \\
&= x + \big(-\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{2}\big)x^3 + \big(\tfrac{5}{24} - \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{120}\big)x^5 + o(x^5) \\
&= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)
\end{aligned}$$

❑ **Méthode 14.14.— Comment obtenir un $DL_{n+1}(0)$ d'une primitive**
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue, $F : I \to \mathbb{R}$ une primitive de f. On obtient le $DL_{n+1}(0)$ de F en intégrant le $DL_n(0)$ de f :

$$\begin{array}{llcll} \text{Si} & f(x) & = & & a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n) \\ \text{alors} & F(x) & = & F(0)+ & a_0 x + \frac{1}{2} a_1 x^2 + \cdots + \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1} + o(x^{n+1}) \end{array}$$

Remarque : cette méthode permet de retrouver aisément les développements limités de certaines fonctions usuelles, comme $\text{Arctan}\,(x)$, $\ln(1+x)$ ou encore $\tan(x)$.

Exemple : pour illustrer cette méthode, déterminons le $DL_5(0)$ de la fonction tangente.

$\boxed{1}$ On sait que $\tan(x) \sim x$ soit encore $\tan(x) = x + o(x)$.

$\boxed{2}$ Par produit, on en déduit que $\tan^2(x) = x^2 + o(x^2)$. Or $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$. D'où l'on tire $\tan'(x) = 1 + x^2 + o(x^2)$. Par primitivation, il s'ensuit que $\tan(x) = 0 + x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$.

$\boxed{3}$ Par produit, on en déduit que $\tan^2(x) = x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$. Or $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$. D'où l'on tire $\tan'(x) = 1 + x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$. Par primitivation, il s'ensuit que $\tan(x) = 0 + x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$.

❑ **Méthode 14.15.— Comment obtenir le $DL_n(0)$ d'une fonction réciproque**
Soit $f : I \to J$ une bijection de I sur J telle que $f(0) = 0$. On suppose que $f^{-1} : J \to I$ admet un $DL_n(0)$. C'est le cas notamment si f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^n$.

$\boxed{1}$ On détermine le $DL_n(0)$ de f : $f(x) = a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$.

$\boxed{2}$ On exprime celui de f^{-1} : $\quad f^{-1}(y) = b_1 y + \cdots + b_n y^n + o(y^n)$,
à l'aide de coefficients inconnus $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

$\boxed{3}$ Par composition, on exprime le $DL_n(0)$ de $f^{-1} \circ f(x)$ à l'aide des coefficients inconnus $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Par unicité de la partie régulière du $DL_n(0)$, on peut identifier avec x !

Mise en œuvre : exercice 14.10.

■ Utilisation des développements limités pour l'étude des fonctions

Les développements limités sont les outils les plus fins à notre disposition pour l'étude locale d'une fonction. Nous avons vu que pour obtenir un équivalent de f au voisinage de a, il suffit de développer f jusqu'à l'obtention d'un terme significatif (**méthode 14.6**). On peut alors utiliser cet équivalent pour étudier une limite. Par exemple, pour lever une indétermination lors de l'étude de la limite d'un quotient $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ où f et g s'annulent en 0, il suffit de développer f et g à un ordre n suffisamment élevé pour que l'une des deux parties régulières soit non nulle.

Exemple : la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sin(x) - \tan(x)}{1 - \cos(x)}$ présente une forme indéterminée en 0.
Le dénominateur admet pour DL à l'ordre 2, $1 - \cos(x) = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$. Pour lever l'indétermination, il suffit donc de développer le numérateur au même ordre. Comme $\sin(x) - \tan(x) = 0 + o(x^2)$, il vient $f(x) = \dfrac{0 + o(x^2)}{\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)} = o(1)$. Soit $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

Étude des tangentes

❑ Méthode 14.16.— Comment utiliser un DL pour étudier une tangente

[1] On effectue le $DL_n(a)$ de f, avec $n \geqslant 2$ assez grand pour la partie régulière ait un monôme non nul de degré n.

[2] On conclut alors selon la parité du degré de ce monôme.

Mise en œuvre : exercice 14.15.

Étude des extremums

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable dans I et $a \in \mathring{I}$ un point intérieur à I. Nous savons que si f présente un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$. Les extremums locaux de f sont donc à rechercher parmi les points critiques, c'est-à-dire les points en lesquels la dérivée s'annule.
Pour autant, tout point critique de f n'est pas nécessairement un extremum : ainsi 0 est un point critique de $x \mapsto x^3$ même si ce n'est pas un extremum !

❑ Méthode 14.17.— Comment étudier la nature d'un point critique

Soit $a \in \mathring{I}$ un point critique de f, c'est-à-dire tel que $f'(a) = 0$.

[1] On effectue le $DL_n(a)$ de f, avec $n \geqslant 2$ suffisamment élevé pour que la partie régulière ait un terme significatif (non nul) de degré n.

$$f(x) = f(a) + 0\ (x-a) + a_n(x-a)^n + o_{x\to a}(x-a)^n, \text{ avec } a_n \neq 0$$

[2] Ainsi $f(x) - f(a) \underset{x\to a}{\sim} a_n(x-a)^n$. Pour conclure, on discute suivant la parité de n :

- si n est impair, a n'est pas un extremum local,
- si n est pair, a est un maximum (resp. minimum) local si $a_n > 0$ (resp $a_n < 0$).

Étude des branches infinies

Le plan d'étude général pour les branches infinies d'une courbe est donnée à la **méthode 10.7**. L'utilisation d'un développement limité peut faciliter l'étude.

❑ Méthode 14.18.— Comment utiliser un DL pour étudier une asymptote oblique

On étudie une asymptote au voisinage de $+\infty$.

[1] On forme un DL au voisinage de $+\infty$ de $\dfrac{f(x)}{x}$ à l'ordre 1 de la forme :

$$\frac{f(x)}{x} = a_0 + \frac{a_1}{x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right).$$

[2] En multipliant par x, il vient $f(x) = a_0x + a_1 + o(1)$. La courbe admet alors la droite $y = a_0\ x + a_1$ pour asymptote.

[3] Pour déterminer la position de la branche infinie par rapport à l'asymptote, il suffit de développer $\dfrac{f(x)}{x}$ avec un terme significatif supplémentaire.

Exemple : étudions la nature de la branche infinie de $f(x) = (x+1)e^{1/x}$ au voisinage de $+\infty$.

$\boxed{1}$ On forme le $DL_1(+\infty)$ de $\dfrac{f(x)}{x}$. On se ramène en 0^+ au moyen du changement de variable $x = 1/t$ et on étudie la fonction $g(t) = tf(1/t)$.

$$g(t) = (1+t)e^t = (1+t)(1+t+\frac{1}{2}t^2) + o(t^2) = 1 + 2t + \frac{3}{2}t^2 + o(t^2)$$

D'où l'on tire $f(x) = x + 2 + \dfrac{3}{2x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)$.

$\boxed{2}$ La droite $\mathcal{D}$ d'équation cartésienne $y = x + 2$ est asymptote à la courbe représentative Γ de f au voisinage de $+\infty$ et Γ est située localement au-dessous de $\mathcal{D}$.

Mise en œuvre : exercice 14.15.

■ Comparaisons locales et développements asymptotiques des suites de réels

Comparaisons locales de suites définies par opérations

Une suite est une fonction définie dans $\mathbb{N}$ à valeurs réelles, $u : n \mapsto u_n$, les méthodes développées pour l'étude des fonctions s'appliquent aux suites.

> ❑ **Méthode 14.19.— Comment étudier la limite d'une suite (u_n)**
> Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par opérations à l'aide de suites de référence. Pour étudier la limite de u_n,
> $\boxed{1}$ Simplifier si possible l'expression de u_n à l'aide d'opérations algébriques.
> $\boxed{2}$ Déterminer un équivalent simple de u_n.
> $\boxed{3}$ Conclure à l'aide des **croissances comparées des suites usuelles** (**théorème 14.24**).

Mise en œuvre : exercice 14.2.

Pour une suite définie par opérations à partir de suites de référence, on pourra écrire u_n sous la forme $u_n = f(x_n)$, avec $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$ et ainsi ramener l'étude de u_n à celle de $f(x)$ au voisinage de a, pour un calcul de limite, d'équivalent ou de développement limité.

> ❑ **Méthode 14.20.— Comment obtenir un équivalent d'une suite (u_n)**
> Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par opérations sous la forme $u_n = f(x_n)$. On obtient un équivalent de u_n en composant (à droite) un équivalent de f suivant le schéma suivant :
>
> $$\text{Si} \left.\begin{array}{l} \bullet\ x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a \\ \bullet\ f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \end{array}\right) \quad \text{alors } f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} g(x_n)$$

Exemple : les équivalents usuels pour les suites (**théorème 14.25**) sont obtenus suivant ce schéma.

Ce même schéma permet aussi d'obtenir des développements asymptotiques de $u_n = f(x_n)$ lorsque $n \to +\infty$, en composant des développements limités (éventuellement généralisés) de f au voisinage de a, si $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$. Voyons par exemple :

❑ Méthode 14.21.— Comment obtenir un développement asymptotique de u_n

Si $u_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$, on obtient un développement asymptotique de u_n en composant (à droite) un $DL_p(0)$ de f.

$\boxed{1}$ On forme le $DL_p(0)$ de f : $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_p x^p + o_0(x^p)$

$\boxed{2}$ $u_n = f\left(\frac{1}{n}\right) = a_0 + \frac{a_1}{n} + \cdots + \frac{a_p}{n^p} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^p}\right)$

Déterminer un développement asymptotique d'une suite définie implicitement

Soit $f_n : I \to \mathbb{R}$, on note (E_n) l'équation $f_n(x) = 0$. On suppose que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, (E_n) admet une unique solution dans I, notée x_n. Déterminer un développement asymptotique de x_n par exemple à quatre termes significatifs revient à trouver quatre expressions assez simples a_n, b_n, c_n et d_n telles que :

- $b_n = \mathrm{o}(a_n)$, $c_n = \mathrm{o}(b_n)$, $d_n = \mathrm{o}(c_n)$;
- $x_n = a_n + b_n + c_n + d_n + \mathrm{o}(d_n)$.

Pour en trouver un, voici comment on procède :

❑ Méthode 14.22.— Comment trouver un DA d'une suite implicite

$\boxed{1}$ Déterminer un équivalent simple de x_n, par exemple : $x_n \sim a_n$.

$\boxed{2}$ Poser $y_n = x_n - a_n$ de sorte que $y_n = o(a_n)$ et $x_n = a_n + o(a_n)$. Réinjecter dans (E_n) pour en déduire un équivalent de y_n, par exemple : $y_n \sim b_n$.

$\boxed{3}$ Poser $z_n = y_n - b_n$ de sorte que $z_n = o(b_n)$ et $x_n = a_n + b_n + o(b_n)$. Réinjecter dans (E_n) et en déduire un équivalent de z_n, par exemple : $z_n \sim c_n$.

$\boxed{4}$ Recommencer le processus pour obtenir le nombre de termes asymptotiques souhaité.

Mise en œuvre : exercice 14.16

Exemple : d'après les propriétés de la fonction tan, on sait que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un seul réel $x_n \in \left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$ tel que : $\tan(x_n) = x_n$. Déterminons un développement asymptotique à trois termes significatifs de x_n.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{1}$ Comme $n\pi - \frac{\pi}{2} < x_n < n\pi + \frac{\pi}{2}$, alors $1 - \frac{1}{2n} < \frac{x_n}{n\pi} < 1 + \frac{1}{2n}$. Par encadrement, il en résulte que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_n}{n\pi} = 1$, soit encore $x_n \sim n\pi$.

$\boxed{2}$ On pose $y_n = x_n - n\pi$. D'après (E_n), $\tan(y_n) = \tan(x_n) = x_n$ et comme $y_n \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, il en résulte que $y_n = \operatorname{Arctan}(x_n)$, avec $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Comme $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{Arctan} x = \frac{\pi}{2}$, alors $y_n \sim \frac{\pi}{2}$.

$\boxed{3}$ On pose $z_n = y_n - \frac{\pi}{2}$. D'après (E_n), $\tan(z_n) = \dfrac{-1}{\tan(y_n)} = \dfrac{-1}{x_n} \sim -\dfrac{1}{n\pi}$ de sorte que $z_n \sim -\dfrac{1}{n\pi}$.

$\boxed{4}$ Ainsi, $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Vrai/Faux

	Vrai	Faux
1. $\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1+\dfrac{x^2}{2}$.	☐	☐
2. Si $\lim\limits_{x\to a}(f-g)(x)=0$ alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$.	☐	☐
3. Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, alors $\lim\limits_{x\to a}(f-g)(x)=0$.	☐	☐
4. Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} 0$ alors f est nulle au voisinage de a.	☐	☐
5. On a : $\dfrac{2^{3n+1}}{3^{2n-4}} = o\left(\dfrac{1}{n^{1000}}\right)$.	☐	☐
6. Si $u_n \sim v_n$, alors $e^{u_n} \sim e^{v_n}$ et $\sqrt{\lvert u_n\rvert} \sim \sqrt{\lvert v_n\rvert}$.	☐	☐
7. Une fonction f admet en 0 un développement limité à l'ordre 1 si et seulement si f est dérivable en 0.	☐	☐
8. Le $DL_4(0)$ de $f\times g$ est le produit des $DL_2(0)$ de f et g.	☐	☐
9. Comme $e^u = 1+u+o(u)$, on peut écrire au voisinage de $x=0$, $e^{\cos x} = 1+\cos x + o(\cos(x))$	☐	☐
10. Le $DL_1(0)$ de $(1+x^2)^{1/x}$ est $1+x+o(x)$ car on applique la formule qui donne le $DL_1(0)$ de $(1+x)^\alpha$ avec $\alpha = 1/x$.	☐	☐

Énoncé des exercices

Relations de comparaisons, équivalents

Exercice 14.1 : Déterminer un équivalent simple au point considéré des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \dfrac{\sin x + \cos x - 1}{\tan(x - x\cos x)}$ en 0

2. $x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+\tan^2 x} - 1}{\tan x}$ en 0

3. $x \mapsto \ln(\cos x)$ en 0

4. $x \mapsto \dfrac{\big(\ln(\ln x)\big) - (1/2)^x}{(1/x)^3 - (1/3)^x}$ en $+\infty$

Exercice 14.2 : Déterminer un équivalent simple des suites suivantes :

1. $u_n = \dfrac{n - \ln n + 4/n}{e^n - n^2}$.

2. $u_n = \big[\tan(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{n})\big]^n$.

3. $u_n = \left(\dfrac{2n^5}{5n + 3n^5}\right)^n$

4. $u_n = \dbinom{n}{p}$, pour $p \in \mathbb{N}$ fixé.

Exercice 14.3 : 1. Déterminer un équivalent simple de $x^{1/x} - 1$ au voisinage de $+\infty$.

2. En déduire un équivalent simple de $x^{x^{1/x}} - x$.

3. Étudier la limite en $+\infty$ de $x \mapsto \dfrac{\left[(x+1)^{\frac{1}{x}} - x^{\frac{1}{x}}\right](x\ln x)^2}{x^{x^{1/x}} - x}$.

Exercice 14.4 : Montrer que $\ln\big(\ln x\big) = \underset{x\to+\infty}{o}\big(\ln x\big)$. En déduire la valeur de $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^{1/x}$.

Exercice 14.5 : Soit u une suite décroissante de limite 0 telle que $u_{n+1} + u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$. On souhaite démontrer qu'en ce cas $u_n \sim \dfrac{1}{2n}$.

1. On note pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $a_n = n\,(u_n + u_{n+1})$.

a. Montrer que a est convergente et déterminer sa la limite.

b. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, $\quad a_n \leqslant 2n\,u_n \leqslant \dfrac{n}{n-1}a_{n-1}$. Conclure !

2. Démontrer que le résultat n'est plus vrai si la suite u n'est plus supposée décroissante.

Exercice 14.6* : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u = (1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, \ldots)$.

1. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2. Déterminer un équivalent de u_n.

Calculs de développements limités

Exercice 14.7 : Déterminer les développements limités suivants :

1. $DL_3(0)$ de $x \mapsto \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

2. $DL_3(0)$ de $x \mapsto \ln(2 + \sin x)$

3. $DL_3(0)$ de $x \mapsto e^{\sqrt{1+x}}$

4. $DL_4(0)$ de $x \mapsto \ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$

Exercice 14.8 : Déterminer les développements limités suivants :

1. $DL_4(+\infty)$ de $x \mapsto \sqrt{1+\sin(1/x)} - \cos(1/x)$
2. $DL_2\left(\frac{\pi}{6}\right)$ de $x \mapsto \text{Arcsin}\left(\sqrt{3}\sin x\right)$
3. $DL_2(\infty)$ de $x \mapsto \sqrt[3]{\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}}$.
4. $DL_4(1)$ de $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^2}$.

Exercice 14.9 : Déterminer les développements limités suivants :

1. $DL_{10}(0)$ de $F(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$.
2. $DL_5(+\infty)$ de $G(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$.

Exercice 14.10 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x\text{ch}\,(x)$.
1. Montrer que f est bijective. On note $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa bijection réciproque.
2. Justifier que g admet un $DL_5(0)$ de la forme $g(u) = a_1u + a_3u^3 + a_5u^5 + o(u^5)$.
3. Déterminer ce développement en exploitant la relation $g \circ f = id_{\mathbb{R}}$.

Exercice 14.11 : Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le $DL_{n+1}(0)$ de $x \mapsto \ln\left(1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!}\right)$.

■ Calculs de limites

Exercice 14.12 : Étudier les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\ln(\ln x)\right)^2 - \cos^5 x + \ln x}{2^x - 50x^6}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(3x) - \cos x}{x^2}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{e^{x^2+x} - e^{2x}}{\cos(\pi x/2)}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 + x^2 + \sin^3 x}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$

Exercice 14.13* : Étudier les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2+2x-3}{x^2-x+1}\right)^x$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin(x)} - e^x}{\sin(x) - \tan(x)}$

Exercice 14.14* : Étudier les limites suivantes
1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2\left(e^{\frac{1}{n}} - \sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n})\right)$
2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left[\cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right)\right]^n$

■ Application à l'étude des suites et des fonctions

Exercice 14.15 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1}$.
1. Donner le $DL_2(0)$ de f en 0. En déduire la tangente T_0 à Γ_f en 0 et leurs positions relatives.
2. Montrer que $f(x) = x + 1 + \frac{3}{2x} + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)$. En déduire la branche infinie de Γ_f en $+\infty$.

Exercice 14.16 : On définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : x \mapsto 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$.
1.
   a. Montrer que pour n dans $\mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 2$, admet une seule solution x_n dans $[0, +\infty[$. Calculer x_1 et x_2.

b. Montrer que si $n \geqslant 2$, alors $x_n \in]0,1[$.

c. En comparant les nombres $f_{n+1}(x_{n+1})$, $f_n(x_{n+1})$ et $f_n(x_n)$, montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, puis convergente. On pose $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

2.

a. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n^{n+1} = 0$.

b. Donner une formule pour $f_n(x)$ dès que $x \neq 1$.

c. En déduire $\ell = 1/2$.

3. On pose $h_n = x_n - 1/2$.

a. Montrer que $(1/2 + h_n)^{n+1} = 2h_n$. En déduire que : $h_n = \mathrm{o}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

b. Conclure que : $x_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^{n+2}} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$.

Exercice 14.17* :

1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel $x_n > 0$, tel que $x_n^n + x_n - 1 = 0$.

2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et tend vers 1.

3. On pose $y_n = 1 - x_n$. Montrer que $\ln(y_n) \sim -\ln(n)$.

4. Déterminer un développement asymptotique de x_n à deux termes.

Indications

Ex. 14.2

4. *On pourra faire apparaître des nombres factoriels.*

Ex. 14.3

2. *Factorisez par x.*

Ex. 14.5

2. *Considérer la suite définie par* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{2n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Ex. 14.6

On étudiera les termes $u_{\sum_{k=1}^{r-1} k}, \cdots, u_{(\sum_{k=1}^{r-1} k)+r-1}$ *pour tout* $r \in \mathbb{N}^*$.

Ex. 14.9

1. *Vous pourrez introduire la fonction* $H : x \mapsto \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$.

2. *Commencez par le changement de variable* $u = \dfrac{1}{t}$.

Ex. 14.14

1. *Il faudra faire un développement limité de* $\frac{\pi}{3+1/n}$ *et de* $\frac{\pi}{6+1/n}$.

Corrigé des vrai/faux

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
V	F	F	V	V	F	V	F	F	F

1. On pourrait être tenté de répondre par la négative car d'après les équivalents usuels $\cos x - 1 \sim_0 -\dfrac{x^2}{2}$. Cependant, l'équivalence proposée est vraie car chaque fonction est équivalente à 1 au voisinage de 0 !
2. Les fonctions définies par $f(t) = t$ et $g(t) = t^2$ ne sont pas équivalentes au voisinage de 0 mais ont même limite !
3. Les fonctions $f(t) = t$ et $g(t) = t + \ln(t)$ sont équivalentes au voisinage de $+\infty$, même si leur différence tend vers $+\infty$.
4. Eh oui ! les seules fonctions équivalentes à 0 en a sont les fonctions constantes égales à 0 au voisinage de a !
6. L'équivalent pour les racines carrées est vrai. On a : $n \sim (n+1)$, mais les suites $(e^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(e^{n+1} = e^n \times e)_{n\in\mathbb{N}}$ ne sont pas équivalentes.
7. Cette assertion est vraie, c'est même un résultat à connaître.
8. Lorsque qu'on multiplie les $DL_2(0)$ de f et g on aura probablement des termes de degré 4 mais on n'aura pas **tous** les termes significatifs !
9. C'est faux car $\cos x$ ne tend pas vers 0 quand x tend vers 0.
10. Certes, on a bien $(1+x^2)^{1/x} = 1+x+o(x)$ mais ce résultat s'obtient en passant en exponentielle, et non pas pour la raison invoquée car ici l'exposant $\alpha = 1/x$ n'est pas constant.

❑ **Erreurs classiques**

- On n'obtient pas un équivalent d'une somme de deux fonctions en faisant la somme des équivalents de chaque terme.
- Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, alors $h \circ f(x)$ et $h \circ g(x)$ ne sont pas équivalentes en a en général.
- L'existence d'un développement limité en a à l'ordre n (pour $n \geqslant 2$) ne garantit pas l'existence de la dérivée n-ième de la fonction en a.
- On ne compose pas un développement limité ou un équivalent classique valide au voisinage de 0, avec une nouvelle variable $y(x)$ qui ne tend pas vers 0.
- On n'obtient pas un $DL_n(0)$ de la forme $(1+u)^\alpha$ avec α dépendant de u en appliquant la formule valide lorsque α constant.

Corrigé des exercices

Exercice 14.1

D'après la **méthode 14.4**, *l'équivalent d'un quotient est obtenu en prenant le quotient des équivalents.*

1. On détermine un équivalent du numérateur. Comme $\cos x - 1 \sim_0 -\frac{x^2}{2}$ est négligeable devant $\sin x \sim x$, on a $\sin x + \cos x - 1 \sim x$. Quant au dénominateur, un changement de variable s'impose :

$$\left.\begin{array}{ll} \text{On pose} & t(x) = x - x\cos(x) \to 0 \\ \text{Or on sait que} & \tan(t) \sim_0 t \end{array}\right) \text{ on en déduit que}$$

Méthode 14.3

$$\tan(x - x\cos x) \underset{x\to 0}{\sim} x - x\cos(x) = x(1-\cos x) \sim \frac{x^3}{2}$$

Finalement $\dfrac{\sin x + \cos x - 1}{\tan(x - x\cos x)} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{2}{x^2}$.

Méthode 14.3

On utilise les équivalents usuels au voisinage de 0, **théorème 14.10**

2. À l'aide du changement de variable $t(x) = \tan(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, il vient .

$$\frac{\sqrt{1+\tan^2 x} - 1}{\tan x} \sim_0 \frac{\frac{1}{2}\tan^2 x}{\tan x} \sim_0 \frac{x}{2}$$

3. $\ln(\cos x) = \ln(1 + \cos x - 1)$. Le changement de variable $t(x) = \cos(x) - 1 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ donne $\ln(\cos x) \sim_0 \cos x - 1 \sim -\frac{x^2}{2}$.

4. Au voisinage de $+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} (1/2)^x = 0$ tandis que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(\ln x) = +\infty$. Il découle du **théorème 14.6** que le numérateur est équivalent à $\ln(\ln x)$. D'après la **proposition 14.1** $(1/3)^x = o_{+\infty}(1/x)^3$. Le dénominateur est donc équivalent à $(1/x)^3$. Finalement, par le **théorème 14.5**,

$$\frac{\big(\ln(\ln x)\big) - (1/2)^x}{(1/x)^3 - (1/3)^x} \sim_{+\infty} x^3 \ln(\ln x)$$

▲

Exercice 14.2

On applique **méthode 14.20**.

1. Numérateur et dénominateurs sont des sommes. Pour obtenir un équivalent de chacun, on classe les termes par ordre de négligeabilité. D'après les **croissances comparées** des suites de référence, il s'ensuit que $u_n \sim \dfrac{n}{e^n}$.

On adapte aux suites la **méthode 14.4**.

2. Avant toute chose, on écrit u_n sous forme exponentielle :

Proposition 14.24

$$\begin{aligned} u_n &= \exp\left(n\ln\left(\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right)\right) = \exp\left(n\ln\left(\frac{1+\tan(1/n)}{1-\tan(1/n)}\right)\right) \\ &= \exp\left(n\ln\left(1 + \frac{2\tan(1/n)}{1-\tan(1/n)}\right)\right) \end{aligned}$$

Sous cette forme, on voit mieux quel changement de variable effectuer !

Comme $t_n = \dfrac{2\tan(1/n)}{1-\tan(1/n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, il vient $\ln(1+t_n) \sim t_n$, soit

$$\ln\left(1 + \frac{2\tan(1/n)}{1-\tan(1/n)}\right) \sim \frac{2\tan(1/n)}{1-\tan(1/n)} \sim 2\tan\frac{1}{n} \sim \frac{2}{n}$$

Finalement, $n\ln\left(\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right) \sim 2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 2$ et par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e^2$, ce qui revient à dire que $u_n \sim e^2$.

3. $u_n = \left(\dfrac{2}{3+5n^{-4}}\right)^n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \left(\dfrac{1}{1+\frac{5}{3n^4}}\right)^n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \exp\left(-n\ln(1+\dfrac{5}{3n^4})\right)$.

Or le changement de variable $h_n = \frac{5}{3n^4} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ montre que $-n\ln(1+\frac{5}{3n^4}) \sim -\frac{5}{3n^3} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, ainsi $\left(\dfrac{1}{1+\frac{5}{3n^4}}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. Par définition, ceci revient à dire que $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

La **méthode 14.3** *est absolument incontournable ! !*

4. L'entier p est fixé, on a

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!}$$

Le numérateur est une expression polynomiale en n. Elle est donc équivalente à son monôme dominant. Par conséquent, $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{n^p}{p!}$. ▲

Exercice 14.3

1. $x^{1/x} - 1 = \exp\left(\frac{\ln x}{x}\right) - 1$. Posons $y(x) = \frac{\ln x}{x}$. Par croissances comparées, on a $y(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Le changement de variable $y = y(x)$ dans l'équivalent usuel $e^y - 1 \sim_0 y$ donne finalement $x^{1/x} - 1 \sim_{+\infty} \dfrac{\ln x}{x}$.

La fonction à étudier est de la forme $[u(x)]^{v(x)}$.

2. Suivant l'indication fournie, commençons par factoriser par x.

$$x^{x^{1/x}} - x = x\left(x^{x^{1/x}-1} - 1\right) = x\left(\exp\left((x^{1/x}-1)\ln x\right) - 1\right)$$

La limite sera-t-elle vraiment plus simple à étudier sous cette forme ? !

Or d'après la question précédente, $z(x) = (x^{1/x}-1)\ln(x) \sim_{+\infty} \frac{\ln^2(x)}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ par croissances comparées. Le changement de variable $z = z(x)$ dans l'équivalent usuel $e^z - 1 \sim_0 z$ donne en ce cas que

$$\begin{aligned}\exp\left((x^{1/x}-1)\ln x\right) - 1 &= e^{z(x)} - 1 \sim_{+\infty} z(x) \sim_{+\infty} (x^{1/x}-1)\ln x \\ &\sim_{+\infty} \frac{\ln^2(x)}{x}\end{aligned}$$

Par conséquent, $x^{x^{1/x}} - x \sim_{+\infty} \ln^2(x)$.

3. Cherchons un équivalent simple du numérateur de cette expression :

$$\begin{aligned}\left[(x+1)^{\frac{1}{x}} - x^{\frac{1}{x}}\right](x\ln x)^2 &= x^{\frac{1}{x}}\left[(1+\frac{1}{x})^{\frac{1}{x}} - 1\right](x\ln x)^2 \\ &\sim_{+\infty} \left\{\exp\left[\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] - 1\right\}(x\ln x)^2 \\ &\sim_{+\infty} \left[\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right](x\ln x)^2 \\ &\sim_{+\infty} \frac{1}{x^2}(x\ln x)^2 \sim_{+\infty} \ln^2 x\end{aligned}$$

$x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln x}{x}} \xrightarrow[\infty]{} 1$ *donc* $x^{\frac{1}{x}} \sim_{+\infty} 1$

Posons $w(x) = \frac{1}{x}\ln(1+\frac{1}{x})$, *alors* $w(x) \xrightarrow[\infty]{} 0$ *et donc* $e^{w(x)} - 1 \sim_\infty w(x)$.

Ainsi, numérateur et dénominateur de cette expression sont équivalents à $\ln^2 x$. Il en résulte que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\left[(x+1)^{\frac{1}{x}} - x^{\frac{1}{x}}\right](x\ln x)^2}{x^{x^{1/x}} - x} = 1$. ▲

Corrigé

Exercice 14.4

Utilisons la **caractérisation par les quotients** de la relation de prépondérance. Il s'agit de vérifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(\ln x)}{\ln x} = 0$, ce qui découle aisément de la limite usuelle $\lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{\ln y}{y} = 0$, au moyen du changement de variable $y = \ln x$.

Théorème 14.9

Passons ensuite en exponentielle,

$$\left(\frac{\ln x}{x}\right)^{1/x} = \exp\left[\frac{1}{x}\ln\left(\frac{\ln x}{x}\right)\right] = \exp\left[\frac{1}{x}\left(\ln(\ln x) - \ln x\right)\right]$$

Comme $\ln\ln x = o_{+\infty}(\ln x)$, il vient $\dfrac{\ln(\ln x) - \ln x}{x} \sim_{+\infty} -\dfrac{\ln x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Il s'ensuit que $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^{1/x} = 1$. ▲

Exercice 14.5

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, $a_n = n\,(u_n + u_{n+1})$.

a. D'après la **caractérisation de l'équivalence par les quotients**, on a directement par hypothèse $\lim\limits_{n\to+\infty} n\,(u_n + u_{n+1}) = 1$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme la suite (u_n) est décroissante, il vient

$$2nu_{n+1} \leqslant a_n = n(u_n + u_{n+1}) \leqslant 2nu_n$$

Autrement dit $2\,\dfrac{n}{n+1}\,(n+1)u_{n+1} \leqslant a_n \leqslant 2nu_n$. Ceci étant vrai pour tout entier n, on en déduit que pour tout entier n supérieur à 2,

$$a_n \leqslant 2n\,u_n \leqslant \frac{n}{n-1}a_{n-1}$$

Par encadrement, il s'ensuit que $\lim\limits_{n\to+\infty} 2nu_n = 1$, i.e. $u_n \sim \dfrac{1}{2n}$.

2. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \dfrac{1}{2n} + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$. Par croissances comparées des suites de référence, on a d'une part $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

• D'autre part,
$$\begin{aligned} u_n + u_{n+1} &= \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n} + (-1)^n\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \\ &= \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}. \end{aligned}$$

Or $\dfrac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} \sim \dfrac{1}{2n^{3/2}}$ est négligeable devant $\dfrac{1}{2n+2} + \dfrac{1}{2n} \sim \dfrac{1}{n}$, par conséquent $u_n + u_{n+1} \sim \dfrac{1}{n}$. ▲

Méthode 14.4

Exercice 14.6

1. Il est clair que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. De plus, tout entier supérieur à 1 est une valeur prise par cette suite qui est donc non bornée : d'après le **théorème de la limite monotone**, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

2. Par construction, la suite u prend toutes les valeurs entières non nulles. Une valeur $r \in \mathbb{N}^\star$ sera prise r exactement fois, précisément aux rangs N_{r-1}, $N_{r-1}+1, \ldots, N_{r-1}+r-1$, où on a noté pour alléger $N_{r-1} = \sum_{k=1}^{r-1} k$:

$$\forall r \in \mathbb{N}^\star,\ u_{N_{r-1}} = u_{N_{r-1}+1} = \cdots = u_{N_{r-1}+r-1} = r$$

Inversement, soit $n \in \mathbb{N}$. Si $u_n = r$, alors le rang n doit être compris entre N_{r-1} et $N_{r-1}+r-1$. Ainsi $\displaystyle\sum_{k=1}^{u_n-1} k \leqslant n < \sum_{k=1}^{u_n} k$, d'où l'on tire $(u_n-1)u_n \leqslant 2n < u_n(u_n+1)$. Par encadrement, il en résulte que $\dfrac{2n}{{u_n}^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, soit $2n \sim u_n^2$ et finalement $u_n \sim \sqrt{2n}$. ▲

Somme des premiers entiers.

Exercice 14.7

1. Posons $f_1(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$.

On sait que
$$\begin{array}{r|rcll} + & \ln(1+x) & = & x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 & +o(x^3) \\ - & \ln(1-x) & = & -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 & +o(x^3) \end{array}$$
. On en déduit que

$$f_1(x) = 2x + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3).$$

2. Étudions $f_2(x) = \ln(2+\sin(x)) = \ln(2) + \ln(1+\frac{\sin x}{2})$. On pose $u(x) = \frac{\sin x}{2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. On a $\ln(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 + o(u^3)$.

Or
$$\begin{array}{r|rcll} 1\times & u(x) & = & \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^3 & +o(x^3) \\ -\frac{1}{2}\times & u^2(x) & = & \frac{1}{4}x^2 & +o(x^3) \\ +\frac{1}{3}\times & u^3(x) & = & \frac{1}{8}x^3 & +o(x^3) \end{array}$$
Ainsi $\ln(1+u(x)) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{24}x^3 + o(x^4)$ et finalement

$$f_2(x) = \ln(2) + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{24}x^3 + o(x^3)$$

3. $f_3(x) = e^{\sqrt{1+x}} = e \times e^{\sqrt{1+x}-1}$. On pose $u(x) = \sqrt{1+x} - 1 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. On sait que
$$e^u = 1 + u + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{6}u^3 + o(u^3).$$

Or
$$\begin{array}{r|rcll} 1\times & u^0(x) & = & 1 & +o(x^3) \\ 1\times & u^1(x) & = & \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 & +o(x^3) \\ \frac{1}{2}\times & u^2(x) & = & \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x^3 & +o(x^3) \\ \frac{1}{6}\times & u^3(x) & = & \frac{1}{8}x^3 & +o(x^3) \end{array}$$
Finalement, $f_3(x) = e \times e^{u(x)} = e + \dfrac{e}{2}x + \dfrac{e}{48}x^3 + o(x^3)$.

4. On a tout d'abord $\frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 + o(x^4)$. Posons donc $u(x) = \frac{\sin(x)}{x} - 1 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, de sorte que $f_4(x) = \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \ln(1+u(x))$. Comme $\ln(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 + o(u^3)$, on développe les puissances successives de $u(x)$ jusqu'à la quatrième.

Il vient
$$\begin{array}{r|rcll} 1\times & u^1(x) & = & -\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 & +o(x^4) \\ -\frac{1}{2}\times & u^2(x) & = & \frac{1}{36}x^4 & +o(x^4) \\ \frac{1}{3}\times & u^3(x) & = & 0 & +o(x^4) \end{array}$$

En fait, les parties régulières des $DL_4(0)$ de $u^3(x)$ et $u^4(x)$ sont nulles.

On en déduit que $f_4(x) = -\dfrac{1}{6}x^2 - \dfrac{1}{180}x^4 + o(x^4)$. ▲

Corrigé

Exercice 14.8

1. On se ramène au voisinage de 0 en posant $t = \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0^+$.

En composant $\sqrt{1+u} = 1+\dfrac{1}{2}u-\dfrac{1}{8}u^2+\dfrac{1}{16}u^3-\dfrac{5}{128}u^4+o(u^4)$ avec le $DL_4(0)$ de $u(t)=\sin(t)$, il vient

$$\begin{array}{r|lcllll}
\frac{1}{2}\times & u^1(t) & = & t & -\frac{1}{6}t^3 & & +o(t^4)\\
-\frac{1}{8}\times & u^2(t) & = & & t^2 & -\frac{1}{3}t^4 & +o(t^4)\\
\frac{1}{16}\times & u^3(t) & = & & & t^3 & +o(t^4)\\
-\frac{5}{128}\times & u^4(t) & = & & & & t^4 \quad +o(t^4)
\end{array}$$

Finalement $\sqrt{1+\sin(t)} = 1+\dfrac{1}{2}t-\dfrac{1}{8}t^2-\dfrac{1}{48}t^3+\dfrac{1}{384}t^4+o(t^4)$. En retranchant le $DL_4(0)$ de cos, on en déduit

$$\begin{array}{lcl}
\sqrt{1+\sin(t)}-\cos(t) & = & \frac{1}{2}t+\frac{3}{8}t^2-\frac{1}{48}t^3-\frac{5}{128}t^4+o_{t\to0}(t^4)\\
\text{Soit encore } f_1(x) & = & \frac{1}{2x}+\frac{3}{8x^2}-\frac{1}{48x^3}-\frac{5}{128x^4}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^4}\right)
\end{array}$$

2. On effectue le changement $x = \dfrac{\pi}{6}+t$, $g(t) = f_2(\frac{\pi}{6}+t)$, de sorte que

$$\begin{array}{rcl}
g(t) & = & \text{Arcsin}\left(\sqrt{3}\sin(\frac{\pi}{6}+t)\right) = \text{Arcsin}\left(\frac{3}{2}\sin t+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t\right)\\
 & = & \text{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}t-\frac{\sqrt{3}}{4}t^2+o(t^2)\right).
\end{array}$$

Il est temps de faire entrer en scène les développements limités en 0 : $\sin t = t+o(t^2)$ et $\cos t = 1-\dfrac{t^2}{2}+o(t^2)$.

Pour conclure, nous allons composer un développement limité de $h : u \mapsto \text{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+u\right)$ au voisinage de 0 à l'ordre 2 avec $u(t) = \dfrac{3}{2}t-\dfrac{\sqrt{3}}{4}t^2$.

On dérive h on écrit : $h'(u) = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{3}/2+u\right)^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{1-4\sqrt{3}u-4u^2}}$, ce qui donne : $h'(u) = 2+4\sqrt{3}u+o(u)$ puis $h(u) = \dfrac{\pi}{3}+2u+2\sqrt{3}u^2+o(u^2)$.

Donc $g(t) = \dfrac{\pi}{3}+3t+4\sqrt{3}t^2+o(t^2)$ et on fait l'ultime remplacement pour obtenir $f_2(x) = \dfrac{\pi}{3}+3(x-\dfrac{\pi}{6})+4\sqrt{3}(x-\dfrac{\pi}{6})^2+\underset{x\to\frac{\pi}{6}}{o}\left((x-\dfrac{\pi}{6})^2\right)$.

3. On pose $x = \frac{1}{t}$ pour se ramener au voisinage de 0. On étudie $g(t) = f_3(\frac{1}{t}) = \sqrt[3]{\dfrac{1+t+t^2}{1+t^2}} = \left(1+\dfrac{t}{1+t^2}\right)^{\frac{1}{3}}$. Posons $u(t) = \frac{t}{1+t^2} \xrightarrow[t\to0]{} 0$. Par composition avec le $DL_2(0)$ de $(1+u)^{\frac{1}{3}}$, il vient $g(t) = 1+\frac{1}{3}t-\frac{1}{9}t^2+o(t^2)$ puis $f_3(x) \underset{x\to+\infty}{=} 1+\dfrac{1}{3x}-\dfrac{1}{9x^2}+o(\dfrac{1}{x^2})$.

On applique la **méthode 14.9**.

4. On pose $x = 1+t$, avec $t\to0$. En multipliant les développements limités $\ln(1+t) = t-\dfrac{1}{2}t^2+\dfrac{1}{3}t^3-\dfrac{1}{4}t^4+o(t^4)$ et $(1+t)^{-2} = 1-2t+3t^2-4t^3+5t^4+o(t^4)$

On revient en x en posant $t = x-1$.

Il vient $f_4(1+t) = t-\frac{5}{2}t^2+\frac{13}{3}t^3-\frac{77}{12}t^4+o(t^4)$, soit encore

$$f_4(x) \underset{x\to1}{=} (x-1)-\frac{5}{2}(x-1)^2+\frac{13}{3}(x-1)^3-\frac{77}{12}(x-1)^4+\text{o}((x-1)^4).$$

▲

Exercice 14.9

1. Notons $H : x \mapsto H(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$ de sorte que $F(x) = H(x^2)-H(x)$.

Formons le $DL_{10}(0)$ de H :

$$H'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} = (1+x^4)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{8}x^8 + o(x^9)$$

Par **primitivation**, il en résulte successivement

Clairement $H(0) = 0$.

$$\begin{array}{r|rcll} -1\times & H(x) & = & x - \frac{1}{10}x^5 + \frac{1}{24}x^9 & & +o(x^{10}) \\ +1\times & H(x^2) & = & x^2 & -\frac{1}{10}x^{10} & +o(x^{10}) \end{array}$$

Par suite,

$$F(x) = -x + x^2 + \frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{24}x^9 - \frac{1}{10}x^{10} + o(x^{10})$$

2. Soit $x > 0$, on pose $G(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$. On effectue le changement de variable $u = \frac{1}{t}$, de sorte que $du = -\frac{dt}{t^2}$, soit encore $du = -\frac{dt}{t^2}$. Ainsi

$$G(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{2x}} \frac{-du}{u^2\sqrt{1+\frac{1}{u^4}}} = \int_{\frac{1}{2x}}^{\frac{1}{x}} \frac{du}{\sqrt{1+u^4}} = H\left(\frac{1}{x}\right) - H\left(\frac{1}{2x}\right).$$

Pour obtenir le $DL_5(+\infty)$ de G, on se ramène au voisinage de 0^+ au moyen du changement de variable $t = \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0^+$. On a $G(\frac{1}{t}) = H(t) - H(\frac{1}{2}t)$. Or,

$$\begin{array}{r|rcll} +1\times & H(t) & = & t - \frac{1}{10}t^5 & +o(t^5) \\ -1\times & H(\frac{t}{2}) & = & \frac{t}{2} - \frac{1}{320}t^5 & +o(t^5) \end{array}$$

D'où l'on tire finalement ,

$$\begin{array}{rcl} G(\frac{1}{t}) & \underset{t\to 0^+}{=} & \frac{t}{2} - \frac{31}{320}t^5 + o(t^5) \\ G(x) & \underset{x\to+\infty}{=} & \frac{1}{2x} - \frac{31}{320}\frac{1}{x^5} + o\left(\frac{1}{x^5}\right) \end{array}$$

▲

Exercice 14.10

1. f est une fonction impaire de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans $\mathbb{R}$ de dérivée strictement positive puisque pour tout réel x, $f'(x) = \mathrm{ch}\,(x) + x\mathrm{sh}\,(x) \geqslant \mathrm{ch}\,(x) \geqslant 1$. En particulier, f est continue et strictement croissante, et donc injective. Comme de plus $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur lui-même.

2. Notons g la bijection réciproque de f. Comme f est $\mathcal{C}^\infty$ et que sa dérivée ne s'annule pas, g est aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$. En particulier, g possède d'après la **formule de Taylor-Young** un $DL_5(0)$:

$$g(u) = a_0 + a_1u + a_2u^2 + a_3u^3 + a_4u^4 + a_5u^5 + o(u^5)$$

Comme f est impaire, g l'est aussi et par suite, les coefficients de rang pair sont nuls. Ainsi g admet un $DL_5(0)$ de la forme $g(u) = a_1u + a_3u^3 + a_5u^5 + o(u^5)$. **Corollaire 14.14**

3. Pour déterminer ce DL, nous allons le composer avec celui de $f(x)$. Posons $u(x) = f(x)$. On a

$$\begin{array}{rl||rcl} a_1\times & & u(x) & = & x + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{24}x^5 + o(x^5) \\ & & u^2(x) & = & x^2 + x^4 + o(x^5) \\ a_3\times & & u^3(x) & = & x^3 + \frac{3}{2}x^5 + o(x^5) \\ a_5\times & & u^5(x) & = & x^5 + o(x^5) \end{array}$$

Ainsi $x = g \circ f(x) = a_1 x + (\frac{1}{2}a_1 + a_3)x^3 + (\frac{1}{24}a_1 + \frac{3}{2}a_3 + a_5)x^5 + o(x^5)$. Par unicité de la partie régulière du développement limité, on peut identifier les coefficients, il s'ensuit que $a_1 = 1, a_3 = -\frac{1}{2}$, et $a_5 = \frac{17}{24}$ de sorte que $g(u) = u - \dfrac{u^3}{2} + \dfrac{17u^5}{24} + o(u^5)$. ▲

Exercice 14.11

On peut noter que la dérivée de f est simple à calculer.

Posons $f(x) = \ln\left(1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!}\right)$. f est $\mathcal{C}^1$ au voisinage de 0 et

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}}{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}} = 1 - \frac{x^n}{n!}\,\frac{1}{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}} \\ &= 1 - \frac{x^n}{n!}\left(1 + o(1)\right) = 1 - \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \end{aligned}$$

La constante d'intégration est nulle car $f(0) = 0$.

Par primitivation, il en résulte que $f(x) = x - \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} + o(x^{n+1})$. ▲

Exercice 14.12

1. $\dfrac{\left(\ln(\ln x)\right)^2 - \cos^5 x + \ln x}{2^x - 50x^6} \sim_{+\infty} \dfrac{\ln(x)}{2^x}$, d'où par croissances comparées (**proposition 14.9**), il vient $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\ln(\ln x)\right)^2 - \cos^5 x + \ln x}{2^x - 50x^6} = 0$.

L'utilisation des développements limités serait parfaitement adaptée ici !

2. Il s'agit d'une forme indéterminée $\frac{0}{0}$. Pour la lever, nous pouvons essayer de déterminer un équivalent simple du numérateur. On introduit 1 : $\cos(3x) - \cos(x) = \left[\cos(3x) - 1\right] + \left[1 - \cos(x)\right]$. Cependant, chacun des termes de cette somme est de l'ordre de x^2. Le **théorème 14.6** ne permet donc pas de conclure en ce cas. On peut alors avoir recours à la trigonométrie :

Une formule de factorisation pour entretenir sa mémoire !

$$\cos(3x) - \cos(x) = -2\sin(2x)\,\sin(x) \sim_0 -4x^2$$

D'où $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(3x) - \cos x}{x^2} = -4$.

3. Posons $x = 1 + t$, pour nous ramener l'étude au voisinage de 0 de

$$e^{2+2t}\,\frac{e^{t(t+1)} - 1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi t}{2}\right)} = -e^2\,e^{2t}\,\frac{e^{t(t+1)} - 1}{\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)}$$

Or, $e^{2t} \sim_0 1$, $e^{t(t+1)} - 1 \sim_0 t + t^2 \sim_0 t$ et $\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) \sim_0 \frac{\pi t}{2}$. Ainsi, par opérations algébriques,

$$e^{2+2t}\,\frac{e^{t(t+1)} - 1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi t}{2}\right)} \sim_0 -\frac{2e^2}{\pi},$$

et nous pouvons conclure que $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{e^{x^2+x} - e^{2x}}{\cos(\pi x/2)} = -\frac{2e^2}{\pi}$.

4. Il s'agit d'une forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$. Pour la lever, déterminons des équivalents du numérateur et du dénominateur.
Les équivalents usuels (**théorème 14.10**) donnent $e^x - 1 \sim x$, $\sin^3 x \sim x^3$. Ainsi, des trois termes du numérateur, le premier $e^x - 1$ prédomine. D'après le **théorème 14.6** il vient $e^x - 1 + x^2 + \sin^3 x \sim_0 e^x - 1 \sim_0 x$.
D'autre part, d'après le **théorème 14.10**, on a $\sqrt[3]{1+x} - 1 \sim_0 \frac{x}{3}$. Par opérations algébriques sur les limites, il s'ensuit que $\frac{e^x - 1 + x^2 + \sin^3 x}{\sqrt[3]{1+x} - 1} \sim_0 3$, ce qui revient précisément à dire que $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 + x^2 + \sin^3 x}{\sqrt[3]{1+x} - 1} = 3$.

Cf. **théorème 14.5**

Exercice 14.13

1. À l'aide du changement de variable $t = \frac{1}{x}$, on se ramène à étudier au voisinage de 0 la fonction : $g(t) = \left(\frac{1+2t-3t^2}{1-t+t^2}\right)^{\frac{1}{t}} = \exp\left(\frac{1}{t}\ln\left(\frac{1+2t-3t^2}{1-t+t^2}\right)\right)$. On développe le logarithme à l'ordre 1 :

$$\ln\left(\frac{1+2t-3t^2}{1-t+t^2}\right) = \ln(1+2t-3t^2) - \ln(1-t+t^2) = 3t + o(t)$$

Ainsi $\frac{1}{t}\ln\left(\frac{1+2t-3t^2}{1-t+t^2}\right) = 3 + o(1) \xrightarrow[t \to 0]{} 3$, par continuité de exp, il s'ensuit que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2+2x-3}{x^2-x+1}\right)^x = e^3$.

Nous sommes en présence d'une forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$ à l'exposant. Comme le dénominateur est t, il suffit de développer le numérateur à l'ordre 1 pour lever l'indétermination.

2. Il s'agit encore d'une forme indéterminée $\frac{0}{0}$. On obtient facilement un équivalent du dénominateur : $\sin(x) - \tan(x) = -\frac{1}{2}x^3 + o(x^3)$. Comme il est de l'ordre de x^3, il suffit de développer le numérateur à l'ordre 3 pour lever l'indétermination. Posons $u(x) = \sin(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$. On a

$$\begin{array}{r||lcllll}
1\times & u^0(x) & = & 1 & & & +o(x^3) \\
1\times & u^1(x) & = & & x & -\frac{1}{6}x^3 & +o(x^3) \\
+\frac{1}{2}\times & u^2(x) & = & & & x^2 & +o(x^3) \\
+\frac{1}{16}\times & u^3(x) & = & & & x^3 & +o(x^3)
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcll}
\text{Ainsi,}\quad e^{\sin(x)}) & = & 1 + x + \frac{1}{2}x^2 & +o(x^3) \\
e^x & = & 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 & +o(x^3),
\end{array}$$

Il s'ensuit que $e^{\sin(x)} - e^x \underset{x \to 0}{\sim} -\frac{x^3}{6}$ et donc $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin(x)} - e^x}{\sin(x) - \tan(x)} = \frac{1}{3}$. ▲

Exercice 14.14

1. Il s'agit d'une forme indéterminée $0 \times \infty$. Pour lever cette indétermination, nous développons $v_n = \left(e^{\frac{1}{n}} - \sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n})\right)$ à l'ordre 2 au voisinage de $+\infty$. Posons $t_n = \frac{1}{n}$.

On met en œuvre la **méthode 14.21**.

$$\begin{array}{r||rcll}
-1\times & \sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4} + t_n) & = & \cos(t_n) + \sin(t_n) & +o(t_n^2) \\
 & & = & 1 + t_n - \frac{1}{2}t_n^2 & +o(t_n^2) \\
+1\times & e^{t_n} & = & 1 + t_n + \frac{1}{2}t_n^2 & +o(t_n^2)
\end{array}$$

Il en résulte que $v_n = t_n^2 + o(t_n^2) \sim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2}$ et par suite $u_n = n^2 v_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$.

2. On écrit d'abord : $\begin{array}{rcl} \frac{n\pi}{3n+1} & = & \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{9n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\ \frac{n\pi}{6n+1} & = & \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{36n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \end{array}$ On en déduit alors que

$$\cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right)+\sin\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right)=1+\frac{\sqrt{3}\pi}{24n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Et enfin, $\lim\limits_{n\to+\infty}\exp\left(n\ln\left(1+\frac{\sqrt{3}\pi}{24n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)=\exp\left(\frac{\sqrt{3}\pi}{24}\right)$. ▲

Exercice 14.15

1. Au voisinage de 0, f admet un $DL_2(0)$ obtenu comme produit de DL usuels $f(x)=x\,(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{x-1}=-x-x^2+o(x^2)$. Ainsi, la courbe représentative Γ_f possède pour droite tangente au point d'abscisse 0, la droite Δ d'équation cartésienne $y=-x$. En outre, Γ_f reste en dessous de cette droite.
2. Effectuons un développement limité généralisé à l'ordre 1 de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$. Posons $g(t)=f(1/t)$. On a

$$g(t)=\frac{1}{t}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}{\frac{1}{t}-1}=\frac{1}{t}\frac{\sqrt{1+t^2}}{1-t}\underset{t\to 0}{\sim}\frac{1}{t}.$$

Nous allons former le $DL_2(0)$ de $tg(t)$. On a

$$\begin{aligned} tg(t) &= \frac{\sqrt{1+t^2}}{1-t}=(1+t+t^2)(1+\frac{1}{2}t^2)+o(t^2)\\ &= 1+t+\frac{3}{2}t^2+o(t^2)\end{aligned}$$

En divisant par t, puis en remplaçant t par $\frac{1}{x}$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{t}+1+\frac{3}{2}t+o(t)\\ f(x) &= x+1+\frac{3}{2x}+\underset{\infty}{o}(\frac{1}{x})\end{aligned}$$

La droite d'équation cartésienne $y=x+1$ est asymptote à Γ_f au voisinage de $+\infty$. De plus, on observe que Γ_f est située au-dessus de son asymptote. ▲

Exercice 14.16

1.

a. Si $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction f_n est dérivable et $\forall x\geqslant 0$, $f_n'(x)=1+2x+3x^3+\cdots+nx^{n-1}>0$. Ainsi :

x	0		$+\infty$
$f_n'(x)$	1	$+$	
$f_n(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction f_n réalise une bijection de $[1,+\infty[$ vers $[1,+\infty[$ et l'équation $f_n(x)=2$ n'admet qu'une seule solution dans $[0,+\infty[$: le nombre $x_n=f_n^{-1}(2)$.
Comme $f_1(x)=1+x$, alors $x_1=1$. De même, on a : $f_2(x)=1+x+x^2$, donc $f_2(x)=2\iff x^2+x-1=0\iff x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Par conséquent, $x_2=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, car x_2 est positif.

b. Soit $n \geqslant 2$ un entier. Comme $f_n(0) = 1 < 2 < 1 + n = f_n(1)$, le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction continue f_n sur l'intervalle $[0, 1]$ montre que le nombre x_n appartient en fait à $]0, 1[$.

c. Soit n dans $\mathbb{N}^\star$. Alors, $f_{n+1} - f_n : x \mapsto x^{n+1}$, donc $f_{n+1}(x_{n+1}) - f_n(x_{n+1}) \geqslant 0$. Or, $f_{n+1}(x_{n+1}) = 2 = f_n(x_n)$, donc $f_n(x_{n+1}) \leqslant 2$, puis : $f_n(x_{n+1}) - f_n(x_n) \leqslant 0$.
La stricte croissance de f_n montre que : $x_n \geqslant x_{n+1}$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est décroissante et minorée par 0, donc convergente.

2.

a. Comme $\forall n \geqslant 2$, $0 \leqslant x_n \leqslant x_2 < 1$, alors : $0 \leqslant x_n^{n+1} \leqslant x_2^{n+2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_2^{n+1} = 0$. Le théorème des gendarmes impose $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n^{n+1} = 0$.

b. Si $x \neq 1$, alors $f_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$.

c. On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad f_n(x_n) = \frac{1 - x_n^{n+1}}{1 - x_n} = 2 \quad \text{, donc} \quad x_n^{n+1} - 2x_n + 1 = 0.$$

Le passage à la limite dans cette dernière égalité conduit à $2\ell = 1$, d'où le résultat escompté.

3.

a. La formule provient directement de $x_n^{n+1} = 2x_n - 1$. Comme les h_n sont positifs et tendent vers 0, vient un moment où les h_n sont compris entre 0 et $\dfrac{1}{7}$, donc $0 < \dfrac{1}{2} + h_n \leqslant \dfrac{9}{14}$. Ainsi, pour n assez grand :

$$0 \leqslant h_n \leqslant \frac{1}{2} \times \left(\frac{9}{14}\right)^{n+1} \quad \text{, d'où} \quad 0 \leqslant \frac{h_n}{(2/3)^n} \leqslant \frac{9}{28} \times \left(\frac{27}{28}\right)^n.$$

Comme $\gamma = \dfrac{27}{28} < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \gamma^n = 0$ et le quotient $\dfrac{h_n}{(2/3)^n}$ est encadré par deux suites tendant vers 0. La suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est négligeable par rapport à la suite $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n_{n\in\mathbb{N}^\star}$.

b. On en déduit : $2^{n+2}h_n = (1 + 2h_n)^{n+1} = e^{(n+1)\ln(1+2h_n)}$, avec l'exposant équivalent à $(n + 1) \cdot 2h_n$, négligeable devant $\dfrac{n \cdot 2^n}{3^n}$, donc tendant vers 0 : $2^{n+2}h_n \sim 1$ et $h_n = \dfrac{1}{2^{n+2}} = \dfrac{1}{2^{n+2}} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{2^{n+2}}\right)$, ce qui justifie le développement asymptotique de x_n. ▲

Exercice 14.17

1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Notons $f_n : x \mapsto x^n + x - 1$, la fonction f_n est strictement croissante et continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
De plus, $f_n(0) = -1 < 0 < 1 = f_n(1)$. Par le **théorème des valeurs intermédiaires**, la fonction f_n s'annule une seule fois sur $]0, +\infty[$ et le point d'annulation x_n est dans $]0, 1[$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On remarque que $\forall x \in]0, 1[$, $\quad f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^n(x - 1) < 0$. En particulier, $f_{n+1}(x_{n+1}) - f_n(x_{n+1}) < 0$, puis $f_n(x_n) = 0 < f_n(x_{n+1})$. Par stricte croissance de f_n, il s'ensuit que $x_n < x_{n+1}$.

✐ **Théorème de la limite monotone**

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ croissante et majorée par 1 converge vers $\ell \in]0,1]$.
Montrons par l'absurde que $\ell = 1$. Imaginons un instant que $\ell < 1$. En ce cas, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $0 \leqslant x_n \leqslant \ell$, donc $0 \leqslant x_n^n \leqslant \ell^n$. Par encadrement, il en résulte que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n^n = 0$. Le passage à la limite dans l'égalité $x_n^n + x_n - 1 = 0$, conduit à $\ell = 1$. Ceci est contradictoire avec $\ell < 1$ et finalement $\ell \geqslant 1$ puis $\ell = 1$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a : $y_n \in]0,1[$ et $(1-y_n)^n = y_n$, donc $n\ln(1-y_n) = \ln y_n$ et comme $\ln(1-y_n) \sim -y_n$, on en déduit : $\ln y_n = -n \cdot y_n(1+\mathrm{o}(1))$, puis en reprenant le logarithme :

$$\ln(-\ln y_n) = \ln n + \ln y_n + \ln(1+\mathrm{o}(1)).$$

La croissance comparée en $+\infty$ des fonctions $x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto x$ montre que : $\ln(-\ln y_n) = \mathrm{o}(-\ln y_n)$, car $\lim\limits_{n\to+\infty} -\ln y_n = +\infty$.
Ainsi, $-\ln n = \ln y_n + \ln(-\ln y_n) + \ln(1+\mathrm{o}(1)) \sim \ln y_n$.

4. En définitive, $-y_n = x_n - 1 \sim \ln(1-y_n) \sim -\frac{\ln n}{n}$, soit

$$x_n = 1 - \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

▲

Chapitre 15

Espaces vectoriels et applications linéaires

UN MATHÉMATICIEN

Le mathématicien allemand **Hermann Grassmann** mène des études de théologie à Berlin, puis il enseigne les mathématiques dans un lycée de la ville, ensuite à Stettin. Il publie en 1844 un ouvrage qui contient en germe les notions fondamentales de l'algèbre linéaire : combinaisons linéaires, dépendance et indépendance linéaire, bases et dimension.
Les théories de Grassmann, trop précoces pour l'époque, mais aussi très opaques, ne sont pas comprises.

Un peu d'histoire

Depuis que Descartes a introduit en 1637 les coordonnées pour repérer les points, de nombreux raisonnements géométriques se sont effectués par des additions de coordonnées ou par multiplication de ces coordonnées par un nombre.

Jusqu'à la fin du XVIIIe siècle, les calculs se faisaient sans se préoccuper de structurer les différents ensembles utilisés. Par la suite, un grand souci de rendre les raisonnements mathématiques plus rigoureux s'est fait jour. Le mathématicien anglais Arthur Cayley a considéré des opérations sur les n-uplets de nombres ; c'était certes pratique et c'est ce que nous faisons dès qu'un repère est fixé mais ce n'était pas satisfaisant pour les changements de bases. Hermann Grassmann a proposé une méthode plus subtile, ne faisant pas appel à une base particulière mais sa formalisation, bien que très intéressante, était trop confuse.

Objectifs

les incontournables

- Montrer qu'une partie de l'espace est un sous-espace vectoriel.
- Effectuer des décompositions de vecteurs selon certains sous-espaces.
- Montrer qu'une application est linéaire.
- Déterminer le noyau et l'image d'une application linéaire.

et plus si affinités

- Résoudre beaucoup de problèmes sur les polynômes, les suites récurrentes, les fonctions ... grâce à la notion de linéarité.

Résumé de cours

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Espaces vectoriels

Définition : *Soit E un ensemble non vide, muni de deux lois – l'une de composition interne notée $+ : E \times E \to E$ et l'autre de composition externe noté $\cdot : \mathbb{K} \times E \to E$. On dit que le triplet $(E, +, \cdot)$ est un* ***espace vectoriel sur le corps*** $\mathbb{K}$ *(on dit aussi un* $\mathbb{K}$***-espace vectoriel****), si les conditions suivantes sont réalisées :*

- $(E, +)$ *est un groupe abélien, dont on note 0_E l'élément neutre ;*
- $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\forall x \in E$, $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \times \mu) \cdot x$;
- $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\forall x \in E$, $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$;
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall (x, y) \in E^2$, $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$;
- $\forall x \in E$, $1_{\mathbb{K}} \cdot x = x$.

Lorsqu'on a affaire à un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, les éléments x de l'espace vectoriel E sont appelés des ***vecteurs*** *et les éléments λ du corps $\mathbb{K}$ sont appelés des* ***scalaires****.*

Proposition 15.1.— Règles de calculs dans un espace vectoriel —. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Pour tout vecteur x de E et tout scalaire λ de $\mathbb{K}$, on a :

- $\lambda \cdot x = 0_E \iff \lambda = 0_{\mathbb{K}}$ ou $x = 0_E$;
- $(-1_{\mathbb{K}}) \cdot x = -x$.

Proposition 15.2.— Construction d'espaces vectoriels

- Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. L'ensemble $\mathcal{F}(X, F)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
- Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Le produit $E \times F$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Sous-espaces vectoriels

Définition : *Étant donné un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ et F une partie de E, on dit que F est un* ***sous-espace vectoriel*** *de E si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

- *F est non vide (ou de manière équivalente, le vecteur nul 0_E appartient à F) ;*
- *F est stable par combinaison linéaire :* $\forall(x, y) \in F^2$, $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda \cdot x + \mu \cdot y \in F$.

Proposition 15.3.— Un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exemples :

- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K}$-ev) $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{A}_n(K)$ en sont des sous-espaces ;
- $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-ev et les solutions d'un système linéaire homogène forment un sous-espace ;
- $\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}$-ev et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ en est un sous-espace ;
- $\mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-ev et par exemple, l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène en est un sous-espace.

Proposition 15.4.— Intersection de sous-espaces vectoriels —. Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Alors $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

Sous-espaces vectoriels engendrés

Définition : *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

- *Étant donné une famille finie $x_1, \dots, x_n$ de vecteurs de E, on appelle* ***combinaison linéaire des vecteurs*** *$x_1, x_2, \dots, x_n$, toute somme vectorielle de la forme :*

$$\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 + \cdots + \lambda_n \cdot x_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot x_k, \text{ où } (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n.$$

- *Si $\mathcal{A}$ une partie de E, on appelle* ***combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{A}$****, toute combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs de $\mathcal{A}$.*

Remarque : une combinaison linéaire d'une famille de vecteurs est toujours une somme finie.

Proposition-Définition 15.5.— Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathcal{A}$ une partie de E. On appelle **sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{A}$**, et on note $\mathsf{Vect}(\mathcal{A})$ l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de vecteurs de $\mathcal{A}$. $\mathsf{Vect}(\mathcal{A})$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $\mathcal{A}$.

Sous-espaces supplémentaires

Proposition-Définition 15.6.— Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un même $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, on note $F+G$ l'ensemble de tous les vecteurs de E somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G :

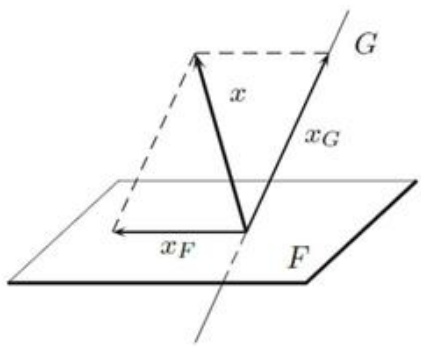
$$F+G = \{x+y \,;\, x \in F, y \in G\} = \{v \in E \mid \exists (x,y) \in F \times G, \quad v = x+y\}.$$

$F+G$ est un sous-espace vectoriel de E, appelé **somme de F et G**.

Définition : *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

On dit que deux ***sous-espaces*** *F et G de E sont* ***supplémentaires*** *dans E, et on note $E = F \oplus G$ si :*

- *$F+G = E$: tous les vecteurs de E peuvent s'exprimer comme une somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G ;*
- *$F \cap G = \{0_E\}$: le seul vecteur commun à F et G est le vecteur nul.*



Proposition 15.7.— Caractérisation des sous-espaces supplémentaires —. Soit F et G, deux sous-espaces vectoriels dans un espace vectoriel E.

$F \oplus G = E$ ssi pour tout $v \in E$, il existe $(x,y) \in E^2$, unique tel que
- $v = x+y$
- $x \in F$
- $y \in G$

■ Familles finies de vecteurs de E

Familles libres et génératrices de E

Définition : *Soit E un espace vectoriel, $\mathcal{F} = (x_1, \ldots, x_p)$ une famille de vecteurs de E. On dit que :*

- *$\mathcal{F}$ est une **famille génératrice** de E si* $\mathsf{Vect}\,(x_1, \ldots, x_p) = E$, *c'est-à-dire si :*

$$\forall x \in E,\ \exists(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p,\ \textit{tel que}\ x = \lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 + \cdots + \lambda_p \cdot x_p$$

- *$\mathcal{F}$ est une **famille libre** si :*

$$\forall(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \quad \lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 + \cdots + \lambda_p \cdot x_p = 0_E \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$$

*Lorsqu'une famille n'est pas libre, on dit qu'elle est **liée**.*

Commentaires : une famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ est génératrice dans E si tout vecteur de E peut s'écrire comme combinaison linéaire des x_i. Une famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ est libre si la seule combinaison linéaire des x_i qui donne 0_E est la combinaison linéaire obtenue en prenant tous les λ_i nuls.

Proposition 15.8.— Propriétés des familles libres et génératrices —. Soit E un espace vectoriel, $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E.

- Si $0 \in \mathcal{F}$, alors $\mathcal{F}$ est liée.
- Si $\mathcal{F} = (u)$, alors $\mathcal{F}$ est libre si et seulement si $u \neq 0$.
- Si $\mathcal{F} = (u; v)$, alors $\mathcal{F}$ est libre si et seulement si u et v ne sont pas colinéaires.
- Si $\mathcal{F}$ est libre et $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{F}$ est une sous-famille de $\mathcal{F}$, alors $\mathcal{L}$ est libre.
- Si $\mathcal{F}$ est liée, et $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{L}$ est une sur-famille de $\mathcal{F}$, alors $\mathcal{L}$ est liée.
- Si $\mathcal{F}$ est génératrice et $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ est une sur-famille de $\mathcal{F}$, alors $\mathcal{G}$ est génératrice.

Proposition 15.9.— Soit $\mathcal{F} = (x_i)_{i \in I}$ une famille **libre** de vecteurs de E, y un vecteur de E.

Si $\mathcal{F} \cup \{y\}$ est liée, **alors** y est combinaison linéaire des $(x_i)_{i \in I}$.

Bases de l'espace vectoriel E

Définition : *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

- *On dit que **la famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de** E si elle est libre et génératrice de E.*

Théorème 15.10.— Caractérisation des bases —. Soit E un espace vectoriel, $\mathcal{B} = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de vecteurs de E.

$\mathcal{B}$ est un base de E si et seulement si
tout vecteur x de E s'écrit, de manière unique, comme combinaison linéaire des $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$

Vocabulaire : *Soit $\mathcal{B} = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de E. Les scalaires $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ tels que $x = \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \lambda_i \cdot x_i$ s'appellent **les coordonnées du vecteur** x dans la base $\mathcal{B}$.*

■ Applications linéaires

Généralités sur les applications linéaires et les endomorphismes

Définition : *Soit E, F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une application $f : E \to F$ est dite* **linéaire** *si*

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \quad f(\lambda \cdot x + \mu \cdot y) = \lambda \cdot f(x) + \mu \cdot f(y).$$

Lorsque $E = F$, on dit qu'une application linéaire $f : E \to E$ est un **endomorphisme**.

Notation : *$\mathcal{L}(E,F)$ désigne l'ensemble des applications linéaires de E vers F, $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E,E)$ est l'ensemble des endomorphismes de E.*

Théorème 15.11.— Opérations algébriques sur les applications linéaires

- Toute combinaison linéaire d'applications linéaires de E vers F est elle-même linéaire.
- Toute composée d'applications linéaires est linéaire.

Isomorphismes d'espaces vectoriels

Définition : *Soit E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On appelle* **isomorphisme** *de E sur F toute application linéaire et bijective f de E sur F.*
Lorsque $E = F$, on dit qu'un endomorphisme bijectif $f : E \to E$ est appelé un **automorphisme**.

Proposition 15.12.— Isomorphisme réciproque —. Soit f un isomorphisme de E sur F. Alors

f^{-1} est un isomorphisme de F sur E, appelé **isomorphisme réciproque** de f.

Définition : *Soit E un espace vectoriel. L'ensemble des automorphismes de E est appelé le* **groupe linéaire** *de E. On le note* GL(E).

Image et noyau d'une application linéaire

Définition : *Soit $f : E \to F$ une application linéaire. On appelle*

- ***image*** *de f le sous-ensemble de F,* $\operatorname{Im} f = \{f(x)\,;\ x \in E\} = \{y \in F \mid \exists x \in E\,;\ f(x) = y\}$;
- ***noyau*** *de f le sous-ensemble de E,* $\operatorname{Ker} f = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$.

Proposition 15.13.— Soit E, F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors

- $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de F
- $\operatorname{Ker} f$ est un sous-espace vectoriel de E

Remarque : plus généralement, étant donné $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

- L'image directe par f d'un sous-espace de E est un sous-espace vectoriel de F.
- L'image réciproque par f d'un sous-espace de F est un sous-espace vectoriel de E.

Théorème 15.14.— Caractérisation des applications linéaires injectives/surjectives
Soit E, F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E,F)$ une application linéaire de E vers F, alors

- $f : E \to F$ est surjective *si et seulement si* $\operatorname{Im} f = F$.
- $f : E \to F$ est injective *si et seulement si* $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.

Projecteurs, symétries, homothéties

Parmi les endomorphismes de E certains sont de nature plus géométrique.

Proposition-Définition 15.15.— Soit E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire.
L'**homothétie** de rapport λ est l'application $h : E \to E$ définie par :

$$\text{Pour tout vecteur } x \text{ de } E,\ h(x) = \lambda \cdot x.$$

Si $\lambda \neq 0$, l'homothétie h est un automorphisme de E. Son automorphisme réciproque est l'homothétie de rapport $\frac{1}{\lambda}$.

Proposition-Définition 15.16.— Soit E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, de sorte que tout vecteur $x \in E$ se décompose, de manière unique, sous la forme $x = x_F + x_G$, avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$.

- La **projection** (ou projecteur) de E sur F parallèlement à G est l'application, notée $p : E \to E$ définie par :

  $$\text{Pour tout } x \in E \text{ tel que } x = x_F + x_G, \quad p(x) = x_F.$$

  La projection p est un endomorphisme de E qui vérifie

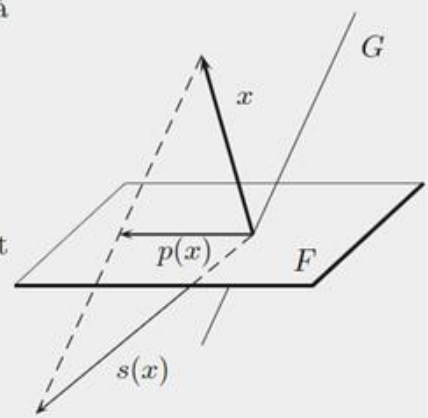
  $$p \circ p = p.$$

- La **symétrie** de E par rapport à F parallèlement à G est l'application, notée $s : E \to E$ définie par :

  $$\text{Pour tout } x \in E \text{ tel que } x = x_F + x_G, \quad s(x) = x_F - x_G.$$

  La symétrie s est un automorphisme de E qui vérifie

  $$s \circ s = id_E.$$



Proposition 15.17.— Caractérisation des projections —. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme. Alors

$$\boxed{f \text{ est un projecteur si et seulement si } f^2 = f}$$

L'application f est alors le projecteur de E sur $F = \operatorname{Im} f = \operatorname{Ker}(f - id_E)$, parallèlement à $G = \operatorname{Ker} f$.

Proposition 15.18.— Caractérisation des symétries —. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme. Alors

$$\boxed{f \text{ est une symétrie si et seulement si } f^2 = id_E}$$

L'application f est alors la symétrie de E par rapport à $F = \operatorname{Ker}(f - id_E)$ et parallèlement à $G = \operatorname{Ker}(f + id_E)$.

Méthodes

Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

Espaces vectoriels de référence

Les structures d'espaces vectoriels classiques doivent être parfaitement connues.

Méthode 15.1.— Comment reconnaître un espace vectoriel de référence
Munis de leurs additions internes et de leurs multiplications externes, les ensembles suivants sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$:

- $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$, l'ensemble des n-uplets de nombres ;
- $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$, l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$;
- $(\mathcal{F}(I, \mathbb{K}), +, \cdot)$, l'ensemble des fonctions de I vers $\mathbb{K}$;
- $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$, l'ensemble des suites de nombres réels ou complexes ;
- $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$, l'ensemble des matrices de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$.

En vertu de la **proposition 15.3**, un sous-espace vectoriel est un espace vectoriel à part entière, les sous-espaces vectoriels classiques sont autant d'exemples d'espaces vectoriels à connaître :

Méthode 15.2.— Comment reconnaître un sous-espace vectoriel de référence
Munis de leurs additions internes et de leurs multiplications externes, les ensembles suivant sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$:

- $(\mathbb{K}_n[X], +, \cdot)$, l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n ;
- $(\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K}), +, \cdot)$, l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Sous-espaces vectoriels

Méthode 15.3.— Comment montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel
La plupart du temps, pour montrer qu'une partie F d'un espace vectoriel E est une sous-espace vectoriel de E, on met en œuvre la définition des sous-espaces vectoriels :

$\boxed{1}$ On montre que F est non vide : il suffit de vérifier que $0_E \in F$.

$\boxed{2}$ On montre que F est stable par combinaisons linéaires : on considère $(x, y) \in F^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, arbitraires, on vérifie que $\lambda \cdot x + \mu \cdot y$ appartient à F.

Remarque : pour vérifier la stablilité par combinaison linéaire, on peut vérifier aussi que pour tout couple $(x, x') \in F^2$ et pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\lambda x + x'$ appartient à F.

Mise en œuvre : exercice 15.1

Outre la définition, signalons qu'il existe d'autres méthodes pour montrer que F est un sous-espace vectoriel de E :

- vérifier que F est le sous-espace vectoriel engendré par une partie $\mathcal{A}$ de E, c'est-à-dire l'en-

semble de toutes les combinaisons linéaires d'une famille de vecteurs de E. Cette méthode est très efficace lorsqu'on connaît un *paramétrage* de F ;

- vérifier que F est l'intersection d'autres sous-espaces vectoriels ;
- vérifier que F est la somme de sous-espaces vectoriels ;
- vérifier que F est l'image ou le noyau d'une application linéaire.

Mise en œuvre : exercice 15.2

Méthode 15.4.— Comment montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel

Pour démontrer qu'un ensemble F, muni de deux lois est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on a rarement recours à la définition axiomatique en 8 points ! Il est beaucoup plus facile de montrer que F est un sous-espace vectoriel.

1 Trouver un espace vectoriel de référence E contenant F ;

2 Montrer, à l'aide de la **méthode 15.3** que F est un sous-espace vectoriel de E.

En dernier recours, on peut utiliser la définition :

- démontrer les 4 propriétés de l'addition : associativité, commutativité, existence d'un élément neutre et existence d'opposés ;
- démontrer les 4 propriétés de la multiplication : associativité mixte, distributivité à droite et à gauche et le fait que $1\cdot$ agit comme l'identité.

Mise en œuvre : exercice 15.5.

Exemple : soit (S) le système d'équations linéaires (S) $\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 + 2x_5 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 - 4x_5 = 0 \end{cases}$.

Montrons que l'ensemble $F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \textit{ est solution de } (S)\}$ est un espace vectoriel.

Voici une démonstration adéquate :

On montre à l'aide de la définition que l'ensemble F est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathbb{R}^5$:

1 Le vecteur nul $0_{\mathbb{R}^5} = (0, 0, 0, 0, 0)$ vérifie le système des trois équations, donc appartient à F.

2 Soit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ et $x' = (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, x'_5)$ deux éléments de F, puis λ un scalaire réel. Alors :

$$\lambda \cdot (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) + (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, x'_5) = (\lambda \cdot x_1 + x'_1, \ldots, \lambda \cdot x_5 + x'_5).$$

À partir des équations vérifiées par les nombres x_i et x'_i, pour $1 \leqslant i \leqslant 5$, on vérifie que :

$$\begin{aligned} 0 &= (\lambda \cdot x_1 + x'_1) + (\lambda \cdot x_3 + x'_3) \\ 0 &= (\lambda \cdot x_2 + x'_2) + (\lambda \cdot x_4 + x'_4) + 2(\lambda \cdot x_5 + x'_5) \\ 0 &= -(\lambda \cdot x_1 + x'_1) + 3(\lambda \cdot x_2 + x'_2) + (\lambda \cdot x_3 + x'_3) + (\lambda \cdot x_4 + x'_4) - 4(\lambda \cdot x_5 + x'_5) \end{aligned}$$

Ainsi, le vecteur $\lambda \cdot x + x'$ appartient à F.

Ceci étant vrai pour tout couple $(x, x') \in F^2$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on peut conclure que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$. C'est donc en particulier un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

■ Sous-espaces supplémentaires

❑ **Méthode 15.5.— Comment montrer que des sous-espaces sont supplémentaires**
Soit F et G, deux sous-espaces d'un espace vectoriel E. Pour montrer que F et G sont deux supplémentaires de E, deux pistes sont envisageables.

- À l'aide de la définition de sous-espaces supplémentaires :

  $\boxed{1}$ Montrer que $F \cap G = \{0_E\}$, pour cela prendre un vecteur arbitraire $x \in F \cap G$, puis montrer que $x = 0_E$.

  $\boxed{2}$ Montrer que $F + G = E$, pour cela prendre un vecteur arbitraire $x \in E$ et «deviner » une décomposition $x = x_F + x_G$, avec x_F dans F et x_G dans G.

- À l'aide de la caractérisation des sous-espaces supplémentaires :
  Soit $x \in E$ un vecteur arbitraire. Il s'agit de montrer, par **analyse-synthèse**, qu'il existe un couple $(x_F, x_G) \in E^2$, unique, tel que

  - $x = x_F + x_G$
  - $x_F \in F$
  - $x_G \in G$

Mise en œuvre : exercice 15.6.

Exemple : en notant respectivement $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{I}$ l'ensemble des fonctions paires et impaires définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, montrer que les deux ensembles $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{I}$ sont deux sous-espaces supplémentaires dans l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Attention à ne rien oublier et également à adapter les notations au problème considéré : il serait malvenu de noter les vecteurs de l'espace $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par les lettres x ou x' car il s'agit en fait de fonctions. On prendra plutôt les lettres f ou g.
• On montre que les ensembles $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{I}$ sont deux sous-espaces de l'espace vectoriel de référence $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Détaillons la rédaction pour $\mathfrak{P}$.
La fonction nulle $f : x \to 0$ est une fonction paire car : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = 0 = f(x)$.
Ensuite, soit f et g dans $\mathfrak{P}$ puis λ dans $\mathbb{R}$. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\lambda \cdot f + g)(-x) = \lambda \cdot f(-x) + g(-x) = \lambda \cdot f(x) + g(x) = (\lambda \cdot f + g)(x).$$

La fonction $(\lambda \cdot f + g)$ est encore dans l'ensemble $\mathfrak{P}$.
• On montre ensuite que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathfrak{P} \oplus \mathfrak{I}$ à l'aide de la définition.
$\boxed{1}$ Soit f une fonction dans $\mathfrak{P} \cap \mathfrak{I}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme la fonction f est paire, alors $f(x) = f(-x)$ et comme la fonction f est également impaire, alors $f(x) = -f(-x)$, d'où $f(x) = -f(x)$ et $f(x) = 0$. La fonction f est la fonction nulle.
$\boxed{2}$ Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
En posant $g : x \mapsto \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $h : x \mapsto \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$, alors les fonctions g et h sont respectivement paires et impaires et $f = g + h$.
En guise d'illustration, on sait que la fonction exponentielle se décompose donc d'une seule façon en une fonction paire plus une fonction impaire. Voici cette décomposition : $\exp = \mathrm{ch} + \mathrm{sh}$.

■ Applications linéaires

Reconnaître une application linéaire

Pour montrer qu'une application $f : E \to F$ entre $\mathbb{K}$-espaces vectoriels est linéaire, on peut parfois utiliser les théorèmes d'opérations :

- f est-elle construite comme combinaisons linéaires d'applications linéaires ?
- f est-elle composée d'applications linéaires ?
- f est-elle la fonction réciproque d'un isomorphisme ?

En ces cas, un théorème du cours permet de conclure, mais en règle générale, on montre que f est linéaire directement à partir de la définition. Elle est souvent très simple à mettre en œuvre :

> ❑ **Méthode 15.6.— Comment montrer qu'une application est linéaire**
> Soit $f : E \to F$ une application entre $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Pour démontrer que f est linéaire, on montre que f préserve les combinaisons linéaires :
> $\boxed{1}$ Soit $(x, y) \in E^2$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.
> $\boxed{2}$ On montre que $f(\lambda \cdot x + \mu \cdot y) = \lambda \cdot f(x) + \mu \cdot f(y)$.

Remarque : pour vérifier que f préserve les combinaisons linéaires, on peut également montrer que pour tout couple (x, x') d'éléments de E et pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$, $f(\lambda \cdot x + x') = \lambda f(x) + f(x')$.

Mise en œuvre : exercice 15.8, exercice 15.9.

Exemple : soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par :

$$\forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x_1, x_2, x_3) = \big(3x_1 + x_2 - x_3; x_1 + x_2 + x_3\big)$$

Montrons que f est linéaire.
Soit $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ un couple de scalaires.
Notons tout d'abord que $\lambda \cdot x + \mu \cdot y = \big(\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \lambda x_3 + \mu y_3\big)$. Par suite,

$$\begin{aligned} f(\lambda \cdot x + \mu \cdot y) &= (3(\lambda x_1 + \mu y_1) + (\lambda x_2 + \mu y_2) - (\lambda x_3 + \mu y_3), (\lambda x_1 + \mu y_1) + (\lambda x_2 + \mu y_2) + (\lambda x_3 + \mu y_3)) \\ &= (3\lambda x_1 + \lambda x_2 - \lambda x_3) + (3\mu y_1 + \mu y_2 - \mu y_3) \\ &= \lambda \cdot \big(3x_1 + x_2 - x_3; x_1 + x_2 + x_3\big) + \mu\big(3y_1 + y_2 - y_3; y_1 + y_2 + y_3\big) \\ &= \lambda \cdot f(x) + \mu \cdot f(y). \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ et tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, on a bien établi que $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ est linéaire.

Remarque : très souvent, on demande de démontrer qu'une application $f : E \to E$ est un endomorphisme de E. Il s'agit alors de

$\boxed{1}$ Vérifier que f est bien définie de E dans lui-même, c'est-à-dire que pour tout vecteur x de E, $f(x)$ appartient aussi à E.

$\boxed{2}$ Vérifier que $f : E \to E$ est linéaire comme ci-dessus.

Image et noyau d'une application linéaire

Avec l'introduction au prochain chapitre des concepts de base d'un espace vectoriel et de dimension d'un espace vectoriel, nous aurons d'autres méthodes qui permettent de déterminer l'image et le noyau d'une application linéaire. Ici encore, nous appliquons simplement les définitions.

❑ Méthode 15.7.— Comment déterminer le noyau d'une application linéaire
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire. Un vecteur $x \in E$ appartient à $\operatorname{Ker} f$ si et seulement si x est solution de l'équation vectorielle :

$$f(x) = 0_F \qquad (E_0)$$

Ainsi, $\operatorname{Ker} f$ est simplement l'ensemble des solutions de l'équation vectorielle (E_0).

$\boxed{1}$ En traduisant cette équation, on obtient souvent un système d'équations linéaires homogène.

$\boxed{2}$ On résout ce système grâce à la méthode du pivot de Gauss (**méthode 5.3**) : on obtient ainsi une famille génératrice de $\operatorname{Ker} f$.

Exemple : reprenons l'application $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ définie à l'exemple précédent.

• **Déterminons le noyau de** f : il s'agit de résoudre dans $\mathbb{R}^3$ l'équation vectorielle

$$f(x) = 0_F \iff (3x_1 + x_2 - x_3; x_1 + x_2 + x_3) = (0, 0) \qquad (E_0)$$

$\boxed{1}$ Cette équation vectorielle se traduit par un système d'équations linéaires homogène :

$$(E_0) \iff \left\{ \begin{array}{rrrl} 3x_1 & +x_2 & -x_3 & = 0 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rrrl} \mathbf{3}x_1 & +x_2 & -x_3 & = 0 \\ & \mathbf{2}x_2 & +4x_3 & = 0 \end{array} \right.$$

Ce système est échelonné, de rang 2. Il admet une variable libre. On résout par remontée : il en résulte $x_1 = x_3;\ x_2 = -2x_3$.

$\boxed{2}$ Ainsi,

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Ker} f & = & \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_3;\ x_2 = -2x_3\} \\ & = & \{(x_3, -2x_3, x_3)\ ;\ x_3 \in \mathbb{R}\} = \mathsf{Vect}\,\{(1, -2, 1)\} \end{array}$$

En conclusion, $\operatorname{Ker} f$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $u = (1, -2, 1)$.

❑ Méthode 15.8.— Comment déterminer l'image d'une application linéaire
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire. Un vecteur $y \in F$ appartient à $\operatorname{Im} f$ si et seulement si *il existe* $x \in E$ solution de l'équation vectorielle :

$$f(x) = y \qquad (E)$$

$\boxed{1}$ En traduisant cette équation, on obtient souvent un système d'équations linéaires. On l'échelonne à l'aide de la méthode du pivot de Gauss.

$\boxed{2}$ Le vecteur y appartient à $\operatorname{Im} f$ si le système obtenu est **compatible**. C'est le cas lorsque toutes les équations auxiliaires sont vérifiées !

Mise en œuvre : exercice 15.8, exercice 15.9

Exemple : reprenons l'application $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ définie à l'exemple précédent.

• **Déterminons l'image de** f : soit $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. y appartient à $\operatorname{Im} f$ si et seulement si l'équation vectorielle (E) est compatible, où

$$f(x) = y \iff (3x_1 + x_2 - x_3; x_1 + x_2 + x_3) = (y_1, y_2) \qquad (E)$$

1 Cette équation vectorielle se traduit par le système :

$$(E_0) \iff \begin{cases} 3x_1 & +x_2 & -x_3 & = y_1 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & = y_2 \end{cases} \iff \begin{cases} \mathbf{3}x_1 & +x_2 & -x_3 & = y_1 \\ & \mathbf{2}x_2 & +4x_3 & = 3y_2 - y_1 \end{cases}$$

2 Ce système est échelonné, de rang 2. Il n'admet aucune équation de compatibilité ! il est donc compatible quel que soit le second membre $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Ainsi, $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$.

Applications linéaires injectives, surjectives, isomorphismes

Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Comme pour toute fonction, on peut s'intéresser à savoir si f est injective, surjective, voire bijective. Toutes les méthodes présentées au **chapitre Ensembles et applications** sont utilisées pour le cas particulier des applications linéaires. Nous présentons ici des méthodes spécifiques aux applications linéaires.

> ❑ **Méthode 15.9.— Comment montrer que f est injective ou surjective**
>
> Soit $f : E \to F$ une application linéaire.
>
> - Pour montrer que f est injective, on utilise systématiquement le **théorème 15.14** : f est injective si et seulement si $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$. Pour cela,
>
> 1 Soit $x \in E$. On suppose que $x \in \operatorname{Ker} f$, c'est-à-dire que $f(x) = 0_F$.
>
> 2 On montre que $x = 0_E$.
>
> - Pour montrer que f est surjective, on peut utiliser le **théorème 15.14** : f est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} f = F$.

Mise en œuvre : exercice 15.9.

Exemple : nous avons déjà calculé image et noyau de l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par : $\forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x_1, x_2, x_3) = \big(3x_1 + x_2 - x_3; x_1 + x_2 + x_3\big)$.

- $\operatorname{Ker} f = \mathsf{Vect}\,(u) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. Donc f n'est pas injective.
- $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$, donc f est surjective.

> ❑ **Méthode 15.10.— Comment montrer que f est un isomorphisme**
>
> Soit $f : E \to F$ une application. Pour montrer que f est un isomorphime, vous devez :
>
> 1 Montrer que $f : E \to F$ est linéaire.
>
> 2 Montrer que $f : E \to F$ est bijective. Pour cela, vous pouvez :
>
> ▸ Utiliser la **méthode 15.9** pour montrer que f est injective et surjective.
>
> ▸ Adopter le point de vue équations : il s'agit d'établir que pour tout vecteur $y \in F$, l'équation vectorielle $f(x) = y$ admet une unique solution dans E.
>
> ▸ Adopter le point de vue application réciproque et montrer qu'il existe une application $g : F \to E$ telle que $g \circ f = id_E$ et $f \circ g = id_F$.

Exemples d'applications linéaires

Montrer qu'un endomorphisme $f : E \to E$ est une homothétie et simple. Il s'agit de démontrer l'existence d'un sclaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\forall x \in E, f(x) = \lambda \cdot x$. On peut même se contenter de prouver que pour chaque vecteur x de E, $f(x)$ est colinéaire à x.

En revanche, démontrer qu'un endomorphisme est une symétrie ou une projection et déterminer le cas échéant ses éléments caractéristiques (base et direction) nécessite plus de travail.

❑ Méthode 15.11.— Comment caractériser une symétrie

Soit f dans $\mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E.

$\boxed{1}$ Pour montrer que f est une symétrie, il s'agit de vérifier que $f \circ f = id_E$. Pour cela, on prend un vecteur x arbitraire dans E et on montre que $f(f(x)) = x$.

$\boxed{2}$ Pour déterminer les éléments caractéristique de cette symétrie :

- déterminer l'ensemble F des vecteurs x de E tels que $f(x) = x$.
- déterminer l'ensemble G des vecteurs x de E tels que $f(x) = -x$.

$\boxed{3}$ On peut conclure que f est la symétrie de E par rapport à F parallèlement à G (avec $F \oplus G = E$).

❑ Méthode 15.12.— Comment caractériser un projecteur

Soit f dans $\mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E.

$\boxed{1}$ Pour montrer que f est un projecteur, il s'agit de vérifier que $f \circ f = f$. Pour cela, on prend un vecteur x arbitraire dans E et on montre que $f(f(x)) = f(x)$.

$\boxed{2}$ Pour déterminer les éléments caractéristiques de f :

- déterminer le noyau $\operatorname{Ker} f$;
- déterminer l'image $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker}(f - id_E)$.

$\boxed{3}$ On peut alors conclure que f est le projection de E sur $\operatorname{Im} f$ parallèlement à $\operatorname{Ker} f$ (avec $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = E$).

Mise en œuvre : exercice 15.13

Exemple : soit $Q(X) \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul. On définit l'application f qui à tout polynôme $P(X)$ associe le polynôme $f(P(X))$ égal au reste dans la division euclidienne de $P(X)$ par le polynôme $Q(X)$. Montrer que l'application f est un endomorphisme dans $\mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$ et le caractériser.

$\boxed{0}$ L'application f est bien définie de $\mathbb{K}[X]$ dans lui-même. Montrons qu'elle est linéaire.
Soit $P_1(X)$ et $P_2(X)$ deux polynômes dans $\mathbb{K}[X]$, λ un scalaire.
On peut écrire les divisions euclidiennes suivantes : $P_1(X) = R_1(X) \cdot Q(X) + f(P_1(X))$ et $P_2(X) = R_2(X) \cdot Q(X) + f(P_2(X))$, avec deux polynômes $R_1(X)$ et $R_2(X)$. On en déduit :
$(P_1 + \lambda \cdot P_2) = (R_1 + \lambda \cdot R_2) \cdot Q(X) + (f(P_1(X)) + \lambda \cdot f(P_2(X)))$. Le polynôme $(f(P_1(X)) + \lambda \cdot f(P_2(X)))$ est de degré strictement inférieur à celui de $Q(X)$. L'écriture précédente est exactement la division euclidienne du polynôme $(P_1 + \lambda \cdot P_2)$ par le polynôme $Q(X)$. Le reste est censé être égal par définition à : $f(P_1 + \lambda \cdot P_2)$, d'où : $f(P_1 + \lambda \cdot P_2) = f(P_1(X)) + \lambda \cdot f(P_2(X))$ et l'application f est linéaire.

$\boxed{1}$ Il est évident que pour tout polynôme $P(X)$ dans $\mathbb{K}[X]$, alors $\deg(f(P)) < \deg Q$ et donc : $f(f(P)) = f(P)$ car le quotient de $f(P)$ par $Q(X)$ est nul. L'application f est un projecteur !

$\boxed{2}$ On va déterminer le noyau et l'image du projecteur f :

• Soit $P(X)$ dans $\operatorname{Ker} f$. Alors, $f(P(X)) = 0$, ce qui signifie que le reste dans la division euclidienne

de $P(X)$ par $Q(X)$) est nul : le polynôme $P(X)$ est multiple de $Q(X)$.
Réciproquement, si $Q(X)$ divise $P(X)$, alors $f(P(X)) = 0$ et $P(X)$ appartient à $\operatorname{Ker} f$.
Finalement, le noyau de f est formé exclusivement des multiples de $Q(X)$: $\operatorname{Ker} f = Q(X) \cdot \mathbb{K}[X]$.
• L'image $\operatorname{Im} f$ est formé des polynômes de degrés strictement inférieurs à $\deg(Q)$: cet espace est noté $\mathbb{K}_{\deg(Q)-1}[X]$
$\boxed{3}$ En conclusion, l'application f est le projecteur de $\mathbb{K}[X]$ sur $\mathbb{K}_{\deg(Q)-1}[X]$ parallèlement à $Q(X) \cdot \mathbb{K}[X]$.

Vrai/Faux

	Vrai	Faux
1. L'ensemble des suites réelles monotones est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites réelles.	☐	☐
2. L'image de tout sous-espace F de E par un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est encore un sous-espace de E.	☐	☐
3. Pour toutes parties $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ de l'espace E, on a : $\mathsf{Vect}\,(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = \mathsf{Vect}\,(\mathcal{A}) \cap \mathsf{Vect}\,(\mathcal{B})$	☐	☐
4. Si $f \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme de E tel que $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$, alors f est un automorphisme de E	☐	☐
5. La composée de deux projections de E dans E est encore une projection si les deux projections commutent.	☐	☐
6. L'ensemble des suites arithmétiques réelles de raison 2 est un espace vectoriel.	☐	☐
7. Si E, F et G sont trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, alors $(E+F) \cap G = (E \cap G) + (F \cap G)$.	☐	☐
8. Si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ vérifie $f^3 = f^2$, alors f est une projection.	☐	☐
9. Deux endomorphismes de E égaux sur une partie $\mathcal{A}$ de E seront égaux sur $\mathsf{Vect}\,(\mathcal{A})$.	☐	☐
10. L'ensemble des homothéties sur E est un sous-espace de $\mathcal{L}(E)$.	☐	☐

Énoncé des exercices

Espaces et sous-espaces vectoriels

Exercice 15.1 : On pose $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$ et $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\}$.

1. Montrer que les ensembles F et G sont deux espaces vectoriels.
2. L'ensemble $F \cup G$ est-il un sous-espace de $\mathbb{R}^2$?

Exercice 15.2 : Les ensembles suivants sont-ils des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels ?

- $F_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z - 2x = y\right\}$
- $F_2 = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t \leqslant 1\right\}$
- $F_3 = \left\{P(X) \in \mathbb{R}[X] \mid P(X + 1) = 2P(X) \text{ et } P(3) = 0\right\}$
- $F_4 = \left\{f : x \mapsto a \cdot \cos(x - \varphi) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \ ; \ (a, \varphi) \in \mathbb{R}^2\right\}$
- F_5 l'ensemble des fonctions dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ différence de deux fonctions croissantes.

Exercice 15.3 : Soit E, F et G trois espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$ vérifiant : $E+F = E+G$ et $E \cap F = E \cap G$, puis $F \subset G$.

1. Montrer que $F = G$.
2. L'hypothèse $F \subset G$ est-elle vraiment nécessaire ?

Exercice 15.4 : Soit $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux parties d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Montrer la formule :

$$\mathsf{Vect}\,(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = \mathsf{Vect}\,(\mathcal{A}) + \mathsf{Vect}\,(\mathcal{B}).$$

Exercice 15.5 : On considère l'équation différentielle :

$$y' + 2e^x \cdot y = 0, \quad \text{d'inconnue } y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ dérivable.}$$

1. Montrer que les solutions de cette équation forment un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Trouver une fonction $y_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que l'ensemble des solutions soit exactement $\mathsf{Vect}\,(y_0)$.

Exercice 15.6* : Démontrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E supplémentaires, dans les cas suivants :

1. $E = \mathbb{R}[X]$, $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) = 0\}$ et $G = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) \leqslant 0\}$.
2. $E = \mathbb{K}^n$, $F = \{(x_1, \ldots, x_n) \in E \mid x_1 + \cdots + x_n = 0\}$ et $G = \mathsf{Vect}\,(u)$, où $u = (1, \ldots, 1)$.

Applications linéaires

Exercice 15.7 : Les applications suivantes sont-elles des applications linéaires ?

- $f_1(x, y, z) = (z, x, \lambda)$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ avec λ une constante.
- $f_2(P(X)) = 1 + P'(X)$ de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$.
- $f_3((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (3^n \cdot u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ dans lui-même.
- $f_4(x, y) = 2y - 5x$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
- $f_5(x, y) = (3x + y, 2x - y)$ de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même.

Exercice 15.8 : Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application telle que :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (2y + z, x + z, -x + y + z).$$

1. Montrer que l'application f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que l'application f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 15.9 : Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\varphi : E \to E$ l'application définie par $\forall y \in E$,

$$\varphi(y) = y'' - 4y' + 3y$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de E.
2. Déterminer son noyau. φ est-il injectif ?

Exercice 15.10 : Soit E, F et G, trois espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{K}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Établir l'équivalence : $g \circ f = 0 \iff \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$.

Exercice 15.11 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, puis f un endomorphisme sur E.
1. Montrer l'équivalence : $f^2 = 0 \iff \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$.
2. Montrer l'équivalence : $\operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f \iff \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.
3. Soit$g$ un autre endomorphime de E. Montrer l'égalité : $f\Big(\operatorname{Ker}(g \circ f)\Big) = \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f$.

Exercice 15.12 : Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, E)$ deux applications linéaires telles que $u \circ v = Id_F$.
1. Montrer que $v \circ u$ est un projecteur.
2. Donner l'image et le noyau du projecteur $v \circ u$.

Exercice 15.13 : Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$, puis p et q deux projecteurs dans $\mathcal{L}(E)$.
1. On suppose que $p \circ q = q \circ p = 0$. Montrer que l'endomorphisme $p + q$ est encore un projecteur.
2. On suppose que l'endomorphisme $p + q$ est un projecteur.
   a. Montrer que $p \circ q = -q \circ p$.
   b. En déduire que $p \circ q \circ p = 0$.
   c. Montrer que $p \circ q = q \circ p = 0$.
3. On suppose que $p + q$ est un projecteur.
   a. Montrer que $\operatorname{Im}(p + q) = \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$.
   b. Montrer que $\operatorname{Ker}(p + q) = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$.

Exercice 15.14 : Soit a et b deux nombres complexes.
1. Montrer que l'ensemble F des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = a \cdot u_{n+1} + b \cdot u_n,$$

est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
2. Montrer que l'application $f : (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (u_0, u_1)$ appartient à $\mathcal{L}(F, \mathbb{C}^2)$.
3. Montrer que l'application f est un isomorphisme.
4. En déduire l'existence de deux suites $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans l'espace F telles que : $F = \mathsf{Vect}(u, v)$.

Indications

Ex. 15.2

Pour l'ensemble F_4, on développera la formule en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.

Ex. 15.6

1. *On n'oubliera pas de montrer que les ensembles considérés sont des espaces vectoriels.*

Ex. 15.13

2.

b. *On effectuera des compositions à droite ou à gauche avec p ou q.*

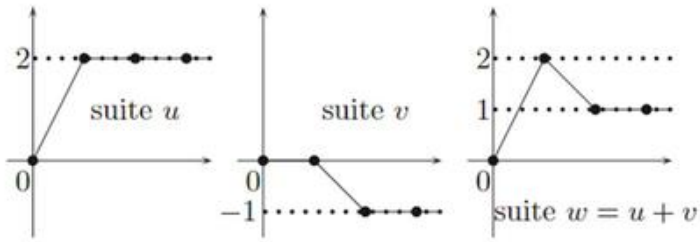
Ex. 15.14

3. *On commencera par considérer le noyau* $\operatorname{Ker} f$.

Corrigé des vrai/faux

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F	V	F	F	V	F	F	F	V	V

1. L'ensemble n'est pas stable par addition :



3. En prenant $E = \mathbb{R}^2$, puis $\mathcal{A} = \{(1,0),(0,1)\}$ et $\mathcal{B} = \{(1,1)\}$, l'ensemble $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ est vide, $\mathsf{Vect}\,(\mathcal{A}) = \mathbb{R}^2$, $\mathsf{Vect}\,(\mathcal{B}) = \mathsf{Vect}\,(1,1) = \{(x,x); x \in \mathbb{R}\}$, donc $\mathsf{Vect}\,(\mathcal{A}) \cap \mathsf{Vect}\,(\mathcal{B}) = \mathsf{Vect}\,(1,1)$ mais $\mathsf{Vect}\,(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = \mathsf{Vect}\,(\emptyset) = \{(0,0)\}$.
4. L'application $f : P(X) \mapsto X \cdot P(X)$ est un endomorphisme dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$. De plus, si $P(X)$ est dans le noyau $\operatorname{Ker} f$, alors $X \cdot P(X) = 0$ puis par intégrité de l'anneau $\mathbb{R}[X]$: $P(X) = 0$ et l'application f est injective. Cependant, l'application f n'est pas surjective car le polynôme constant égal à 1 n'admet pas d'antécédent par f : l'application f n'est pas une bijection.
5. Si deux projecteurs p et q commutent, alors : $(p \circ q)^2 = (p \circ q) \circ (p \circ q) = p^2 \circ q^2 = p \circ q$ et la composée est alors un projecteur.
7. On a un contre-exemple en prenant $E = \mathsf{Vect}\,(1,0)$, $F = \mathsf{Vect}\,(0,1)$ et $G = \mathsf{Vect}\,(1,1)$, ce qui donne : $(E+F) \cap G = \mathbb{R}^2 \cap G = G$, mais $(E \cap G) + (F \cap G) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$.
8. L'application $f : (x,y,z) \mapsto (z,0,0)$ est un contre-exemple.

Erreurs classiques

- Ne pas se lancer dans des calculs compliqués dans le premier point de la définition d'un sous-espace vectoriel F de E. Celui-ci contiendra le vecteur nul 0_E.
- Ne pas confondre les définitions d'un sous-espace et d'une application linéaire.
- Ne pas confondre $E + F$ avec $E \cup F$.
- Ne pas perdre de vue les définitions premières des projections ou des symétries. Les caractérisations $p^2 = p$ ou $s^2 = id_E$ donnent parfois des renseignements partiels.

Corrigé des exercices

Exercice 15.1

1. Montrons par exemple que F est un sous-espace de l'espace de référence $\mathbb{R}^2$. Le couple $(0,0)$ appartient à F car $0+0=0$.
Soit maintenant (x,y) et (x',y') dans F, puis λ dans $\mathbb{R}$. Alors, on peut écrire : $\lambda\cdot(x,y)+(x',y')=(\lambda\cdot x+x',\lambda\cdot y+y')$ et ainsi :

$$(\lambda\cdot x+x')+(\lambda\cdot y+y')=\lambda\cdot(x+y)+(x'+y')=0.$$

Le vecteur $\lambda\cdot(x,y)+(x',y')$ appartient à F.
2. La réponse est non. En effet, les vecteurs $(1,1)$ et $(1,-1)$ appartiennent tous les deux à $F\cup G$, mais leur somme $(2,0)$ n'appartient ni à F, ni à G : l'ensemble $F\cup G$ n'est pas stable par addition. ▲

Exercice 15.2

• L'ensemble F_1 est un $\mathbb{R}$-sous-espace de $\mathbb{R}^3$ car le calcul montre que $F=\mathsf{Vect}\Big((1,-2,0),(0,1,1)\Big)$.
• Le quadruplet $(1,0,0,0)$ appartient à F_2 mais pas $2\cdot(1,0,0,0)$: l'ensemble F_2 n'est pas un espace vectoriel.
• On vérifierait assez facilement que F_3 est un $\mathbb{R}$-sous-espace de $\mathbb{R}[X]$. En fait, F_3 n'est constitué que du polynôme nul car si $P(X)$ est non nul dans $\mathbb{R}[X]$ de degré p, le terme en X^p dans $P(X+1)$ vaut $xi\cdot X^p$ mais le terme en X^p dans $2P(X)$ vaut $2xi\cdot X^p$ et les polynômes $P(X+1)$ et $2P(X)$ sont différents.
• L'ensemble F_4 est en fait formé de toutes les fonctions de la forme $x\mapsto\lambda\cdot\cos x+\mu\cdot\sin x$ car en développant $a\cdot\cos(x-\varphi)$, on obtient une formule de ce type et si on a une formule de ce type, soit $\lambda=\mu=0$ et on prend $a=0=\varphi$, par exemple, soit λ ou μ est non nul et le nombre complexe $\dfrac{\lambda+i\mu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}$ est de module 1, donc égal à un certain $e^{i\varphi}$ puis :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \lambda\cdot\cos x+\mu\cdot\sin x=a\cdot\cos(x-\varphi)\quad,\text{ avec}\quad a=\sqrt{\lambda^2+\mu^2}.$$

En définitive, $F_4=\mathsf{Vect}\,(\cos,\sin)$ et c'est un sous-espace de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
• La fonction nulle appartient à F_5, car c'est la différence de id et de id, toutes deux croissantes. Si (f_1-g_1) et (f_2-g_2) (f_i et g_i croissantes) sont dans F_5, la somme également car elle vaut $(f_1+f_2)-(g_1+g_2)$, avec f_1+f_2 et g_1+g_2 croissantes. Si $(f-g)$ est dans F_5 (avec f et g croissantes) puis λ dans $\mathbb{R}$, si $\lambda\geqslant 0$, alors $\lambda\cdot(f-g)=(\lambda f-\lambda g)$ appartient à F_5 et si $\lambda<0$, alors $\lambda\cdot(f-g)=\Big((-\lambda g)-(-\lambda f)\Big)$, avec les fonctions $(-\lambda g)$ et $(-\lambda f)$ croissantes. L'ensemble F_5 est non vide, stable par addition et multiplication par un scalaire : c'est un sous-espace de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. ▲

Exercice 15.3

1. Il suffit de montrer l'inclusion $G\subset F$.
Soit x dans G. Alors, $x=0_E+x$ appartient à l'espace $E+G$, donc à l'espace $E+F$. On peut trouver deux vecteurs x_E et x_F respectivement dans E et F tels que : $x=x_E+x_F$. Or, F est inclus dans G, ce qui conduit au fait que le

vecteur $x_E = x - x_F$ appartient à l'espace G, mais aussi à l'espace E, bref : à l'espace $E \cap G = E \cap F$.
En particulier, le vecteur $x - x_F$ appartient à F, ainsi que le vecteur x.
2. La réponse est oui, comme en témoigne le contre-exemple : $E = \mathsf{Vect}\,(1,0)$, $F = \mathsf{Vect}\,(1,0)$ et $G = \mathsf{Vect}\,(1,1)$, de sorte que $E \cap F = E \cap G = \{O\}$, puis $E + F = E + G = \mathbb{R}^2$. ▲

Exercice 15.4

Entraînons-nous à démontrer cette formule en ayant recours à nos réflexes habituels : on doit montrer l'égalité entre ensembles, donc on montre les deux inclusions.

• Montrons que $\mathsf{Vect}\,(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \subset \mathsf{Vect}\,(\mathcal{A}) + \mathsf{Vect}\,(\mathcal{B})$.
Soit x dans $\mathsf{Vect}\,(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$. Par définition, le vecteur x peut s'exprimer comme combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. On dispose ainsi d'une expression de la forme : $x = \displaystyle\sum_{\alpha \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}} \lambda_\alpha \cdot \alpha$, où la somme ne comporte toujours qu'un nombre fini de termes non nuls, et où les scalaires λ_α sont dans le corps $\mathbb{K}$. On peut découper cette somme en deux par :

$$x = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_\alpha \cdot \alpha + \sum_{\alpha \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{A}} \lambda_\alpha \cdot \alpha.$$

La première somme est une combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{A}$, donc elle appartient à $\mathsf{Vect}\,(\mathcal{A})$ et la seconde appartient à $\mathsf{Vect}\,(\mathcal{B})$. Ainsi, x appartient à la somme $\mathsf{Vect}\,(\mathcal{A}) + \mathsf{Vect}\,(\mathcal{B})$.

• Réciproquement, montrons que $\mathsf{Vect}\,(\mathcal{A}) + \mathsf{Vect}\,(\mathcal{B}) \subset \mathsf{Vect}\,(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$.
Soit x dans $\mathsf{Vect}\,(\mathcal{A}) + \mathsf{Vect}\,(\mathcal{B})$. Il existe deux vecteurs $x_\mathcal{A}$ et $x_\mathcal{B}$ respectivement dans $\mathsf{Vect}\,(\mathcal{A})$ et $\mathsf{Vect}\,(\mathcal{B})$ tels que : $x = x_\mathcal{A} + x_\mathcal{B}$. Par définition de l'espace vectoriel engendré par une partie, on peut écrire :

$$x_\mathcal{A} = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_\alpha \cdot \alpha \quad \text{et} \quad x_\mathcal{B} = \sum_{\beta \in \mathcal{B}} \mu_\beta \cdot \beta,$$

avec les λ_α et μ_β dans $\mathbb{K}$ et seulement un nombre fini sont non nuls.
Par conséquent, en regroupant les deux sommes : $x = \displaystyle\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_\alpha \cdot \alpha + \sum_{\beta \in \mathcal{B}} \mu_\beta \cdot \beta$, on obtient une combinaison linéaire de vecteurs dans $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, d'où l'inclusion réciproque. ▲

Exercice 15.5

1. L'application nulle est une solution à l'équation différentielle. Soit maintenant y_1 et y_2 deux solutions, puis λ dans $\mathbb{R}$. Alors :

$$(\lambda \cdot y_1 + y_2)' + 2e^x \cdot (\lambda \cdot y_1 + y_2) = \lambda \cdot (y_1' + 2e^x \cdot y_1) + (y_2' + 2e^x \cdot y_2) = 0.$$

2. La résolution de l'équation homogène montre que les solutions sont de la forme : $y : x \mapsto \kappa \cdot e^{-2e^x}$, où κ est une constante réelle. En posant la fonction $y_0 : x \mapsto e^{-2e^x}$, les solutions forment exactement l'espace $\mathsf{Vect}\,(y_0)$. ▲

Exercice 15.6

1. On vérifie aisément que les deux ensembles F et G sont effectivement deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$, l'ensemble G comportant en fait tous les polynômes constants. Pour prouver que F et G sont supplémentaires dans $E = \mathbb{R}[X]$, nous mettons en oeuvre la **méthode 15.5**.

Ne pas oublier de vérifier que ce sont des sous-espaces vectoriels !

$\boxed{1}$ Soit un polynôme $P(X)$ dans $F \cap G$. Alors, $P(X)$ est constant et $P(0) = 0$, donc la constante est nulle et $P(X)$ est le polynôme nul.

$\boxed{2}$ Soit $P(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$. En posant $Q(X) = P(X) - P(0)$ et $R(X) = P(0)$, alors évidemment $P(X) = Q(X) + R(X)$, avec de plus : $Q(0) = 0$, donc $Q(X) \in F$ et $R(X) \in G$.

Par définition, on a bien établi que $E = F \oplus G$.

2. F est un sous-espace vectoriel car il s'agit de l'ensemble des solutions d'une équation linéaire homogène ! G est le sous-espace vectoriel (droite vectorielle) engendré par le vecteur u. Pour démontrer que F et G sont supplémentaires, utilisons la caractérisation : il s'agit de prouver que tout vecteur $x \in E$ se décompose de façon unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

Soit $x = x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ fixé.

• **Analyse** : Supposons que $x = v + w$, où $v \in F$ et $w \in G$. Comme $w \in G$, il existe $\sigma \in \mathbb{K}$ tel que $w = \sigma \cdot u = (\sigma, \cdot, \sigma)$. Comme $v \in F$, nous avons :

$$x_1 + \cdots + x_n = \underbrace{v_1 + \cdots + v_n}_{=0} + \underbrace{\sigma + \cdots + \sigma}_{=n\sigma}$$

D'où on tire que $\sigma = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$, puis $w = \sigma \cdot u$ et $v = (x_1 - \sigma, \ldots, x_n - \sigma)$.

• **Synthèse** : Posons $\sigma = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$ et définissons v et w comme ci-dessus. Il est clair que $w = \sigma \cdot u \in G$ et que $v + w = (x_1 - \sigma, \ldots, x_n - \sigma) + (\sigma, \ldots, \sigma) = (x_1, \ldots, x_n) = x$. Enfin, montrons que $v = (x_1 - \sigma, \ldots, x_n - \sigma)$ appartient à F :

$$x_1 - \sigma + \cdots + x_n - \sigma = x_1 + \cdots + x_n - n\sigma = 0$$

• **Conclusion :** Par analyse-synthèse, on a bien établi que x se décompose de façon unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G. Ceci étant vrai pour tout vecteur x de E, ceci démontre que $E = F \oplus G$. ▲

Exercice 15.7

• Lorsque $\lambda \neq 0$, l'application f_1 n'a aucune chance d'être linéaire car alors : $f(0,0,0) = (0,0,\lambda)$ différent du vecteur nul de $\mathbb{R}^3$.

Lorsque $\lambda = 0$, alors l'application f_1 est linéaire, en vérifiant que pour tous triplets (x,y,z) et (x',y',z') puis tout scalaire α dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f\Big(\alpha \cdot (x,y,z) + (x',y',z')\Big) &= f(\alpha \cdot x + x', \alpha \cdot y + y', \alpha \cdot z + z') \\ &= (\alpha \cdot z + z', \alpha \cdot x + x', 0) \\ &= \alpha \cdot (z, x, 0) + (z', x', 0) \\ &= \alpha \cdot f(x,y,z) + f(x',y',z') \end{aligned}$$

- L'application f_2 n'est pas linéaire car $f(0) = 1 \neq 0$.
- Les applications f_3, f_4 et f_5 sont linéaires. ▲

Exercice 15.8

1. Soit (x, y, z) (x', y', z') des vecteurs de $\mathbb{R}^3$, λ un réel. Alors :

$$\begin{aligned} f(\lambda \cdot (x, y, z) + (x', y', z')) &= f(\lambda \cdot x + x', \lambda \cdot y + y', \lambda \cdot z + z') \\ &= \lambda \cdot f(x, y, z) + f(x', y', z'). \end{aligned}$$

On met en œuvre la **méthode 15.9**.

2. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Supposons que $(x, y, z) \in \operatorname{Ker} f$. Ainsi $f(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Cette équation vectorielle se traduit par le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2y + z = 0 \\ x + z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right. .$$

Ainsi, $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$: l'application f est injective.
L'ensemble $\operatorname{Im} f = f(\mathbb{R}^3)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ qui contient les vecteurs $f(1, 0, 0) = (0, 1, -1)$, $f(0, 1, 0) = (2, 0, 1)$ et $f(0, 0, 1) = (1, 1, 1)$. L'ensemble $\operatorname{Im} f$ contient donc également les vecteurs $2 \cdot f(1, 0, 0) + f(0, 1, 0) - 2 \cdot f(0, 0, 1) = (0, 0, -3)$, donc le vecteur $(0, 0, 1)$, puis le vecteur $(0, 1, 0)$ et enfin le vecteur $(1, 0, 0)$.
Finalement, le sous-espace $\operatorname{Im} f$ contient $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ et il est facile de voir que l'espace engendré $\mathsf{Vect}\Big((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\Big)$ est l'espace $\mathbb{R}^3$ tout entier : l'espace $\operatorname{Im} f$ est égal à $\mathbb{R}^3$ et l'application f est surjective. ▲

Exercice 15.9

1. Vérifions tout d'abord que φ définit bien une application de E dans lui-même. Soit $y \in E$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Par définition, y' et y'' sont donc également indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$, de sorte que $y'' - 4y' + 3y$ appartient également à E. Montrons que $\varphi : E \to E$ est linéaire à l'aide de la **méthode 15.6**.
Soit (y_1, y_2) un couple de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ un couple de scalaires. Alors

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda_1 \cdot y_1 + \lambda_2 \cdot y_2) &= (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)'' - 4\,(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)' + 3\,(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) \\ &= (\lambda_1 y_1'' + \lambda_2 y_2'') - 4\,(\lambda_1 y_1' + \lambda_2 y_2') + 3\,(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) \\ &= \lambda_1 \cdot (y_1'' - 4y_1' + 3y_1) + \lambda_2 \cdot (y_2'' - 4y_2' + 3y_2) \\ &= \lambda_1 \cdot \varphi(y_1) + \lambda_2 \cdot \varphi(y_2) \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $(y_1, y_2) \in E^2$ et tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, on a bien établi que φ est linéaire.

Remarque : on aurait aussi pu démontrer que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ par opérations sur des endomorphismes de E. En effet $D : E \to E$ l'application définie par $D(f) = f'$. D est un endomorphisme de E, et $\varphi = D^2 - 4D + 3id_E$ est un polynôme de D.

Méthode 15.7

2. Pour déterminer $\operatorname{Ker} \varphi$, nous allons résoudre dans E l'équation vectorielle

$$\varphi(f) = 0. \qquad (V)$$

$$(V) \iff y'' - 4y' + 3y = 0$$

On reconnaît une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. Pour la résoudre, nous mettons en œuvre la **méthode 8.17**. Après résolution, on obtient que les solutions de (V) sont toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{3x} \text{ pour } x \in \mathbb{R}, \text{ où } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Autrement dit, en notant $f_1 : x \mapsto e^x$ et $f_2 : x \mapsto e^{3x}$, il vient

$$\operatorname{Ker} \varphi = \left\{C_1 \cdot f_1 + C_2 \cdot f_2 \ ; \ (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2\right\} = \mathsf{Vect}\left\{f_1, f_2\right\}$$

En particulier $\operatorname{Ker} \varphi$ n'est pas réduit à $\{\vec{0}_E\}$, le **théorème 15.14** permet d'en déduire que φ n'est pas injectif. ▲

Exercice 15.10

On suppose $g \circ f = 0$. Soit x dans $\operatorname{Im} f$. Il existe un vecteur α dans E tel que $x = f(\alpha)$. Ainsi,

$$g(x) = g(f(\alpha)) = g \circ f(\alpha) = 0 \quad : \text{le vecteur } x \text{ est dans le noyau } \operatorname{Ker} g.$$

On suppose que $\operatorname{Im} f$ est inclus dans $\operatorname{Ker} g$. Soit x un vecteur de E. Alors, le vecteur $f(x)$ appartient à $\operatorname{Im} f$, puis à $\operatorname{Ker} g$ et donc :

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = 0 \quad : \text{l'application } g \circ f \text{ est l'application nulle.}$$

▲

Exercice 15.11

1. On suppose f^2. Soit x dans $\operatorname{Im} f$. Il existe α un vecteur de E tel que : $x = f(\alpha)$. Ainsi :

$$f(x) = f(f(\alpha)) = f^2(\alpha) = 0_E, \quad \text{donc} \quad x \in \operatorname{Ker} f.$$

On suppose $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$. Soit x dans E. Alors, le vecteur $f(x)$ appartient évidemment à l'image de f, donc au noyau de f, c'est-à-dire :

$$f(f(x)) = 0_E \quad \text{ou encore} \quad f^2(x) = 0_E.$$

Ceci vaut pour n'importe quel vecteur x de E : l'application f^2 est tout bonnement nulle !

2. On suppose $\operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f$. Soit alors x dans l'intersection $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f$. Il existe un vecteur α de E tel que : $x = f(\alpha)$. Comme $x \in \operatorname{Ker} f$, alors $0_E = f(x) = f^2(\alpha)$, puis $\alpha \in \operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f$ et enfin :

Il est inutile de prouver l'autre inclusion.

$$x = f(\alpha) = 0_E.$$

On suppose $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$. Soit x dans $\operatorname{Ker} f^2$. Alors, $f(f(x)) = 0_E$, donc le vecteur $f(x)$ est à la fois un vecteur de l'image de f et dans le noyau de f : $f(x) \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f$, ce qui implique : $f(x) = 0$, puis $x \in \operatorname{Ker} f$.
On termine par le plus facile. Soit x dans $\operatorname{Ker} f$. Alors, $f(x) = 0_E$, puis $f(f(x)) = 0_E$, donc $x \in \operatorname{Ker} f^2$.

L'inclusion $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f$ est toujours vraie !

3. Soit x dans $f\big(\operatorname{Ker}(g \circ f)\big)$. Alors, il existe un vecteur $\alpha \in \operatorname{Ker}(g \circ f)$ tel que : $x = f(\alpha)$. Le vecteur α vérifie : $g(f(\alpha)) = 0_E$, donc $g(x) = 0_E$ et $x \in \operatorname{Ker} g$. De plus, on a : $x = f(\alpha) \in \operatorname{Im} f$.

Soit x un vecteur dans l'intersection $\operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f$. Il existe un vecteur β de E tel que : $x = f(\beta)$. De plus, $g(x) = 0_E$, donc $g(f(\beta)) = 0_E$ et $\beta \in \operatorname{Ker}(g \circ f)$, puis : $x = f(\beta) \in f\big(\operatorname{Ker}(g \circ f)\big)$. ▲

Exercice 15.12

1. On calcule tranquillement $(v \circ u)^2$:

$$(v \circ u)^2 = (v \circ u) \circ (v \circ u) = v \circ (u \circ v) \circ u = v \circ Id_F \circ u = v \circ u.$$

C'est réglé !

2. Soit x dans le noyau de $(v \circ u)$. Alors :

$$v(u(x)) = 0_E, \quad \text{donc} \quad u(v(u(x))) = 0_F, \quad \text{puis} \quad u(x) = 0_F.$$

Réciproquement, il est clair que si $x \in \operatorname{Ker} u$, alors $x \in \operatorname{Ker} v \circ u$: le noyau vaut $\operatorname{Ker} u$.

Soit x dans l'image de $(v \circ u)$. Alors : $v(u(x)) = x$, donc x appartient à l'image de v car $x = v(y)$, avec $y = u(x)$.

Réciproquement, si x est dans l'image de v, il existe y dans F tel que $x = v(y)$, puis $u(x) = u(v(y)) = y$ et finalement :

$$v \circ u(x) = v(y) = x.$$

Le vecteur x appartient à l'image du projecteur $(v \circ u)$ qui n'est autre que $\operatorname{Im} v$. ▲

Exercice 15.13

1. On calcule $(p+q) \circ (p+q)$, en prenant garde que la composition entre endomorphismes n'est pas commutative...

$$(p+q) \circ (p+q) = p^2 + p \circ q + q \circ p + q^2 = p + p \circ q + q \circ p + q.$$

Compte tenu des hypothèses, on obtient : $(p+q)^2 = (p+q)$. C'est réglé !

2.

a. Comme $(p+q)$ est un projecteur, on sait que $(p+q)^2 = p+q$ et $p^2 = p$, puis $q^2 = q$. En reprenant les calculs ci-dessus, on aboutit à :

$$p \circ q + q \circ p = 0.$$

b. En composant à droite par p dans l'égalité $p \circ q = -q \circ p$, on obtient :

$$p \circ q \circ p = -q \circ p^2 = -q \circ p.$$

En composant maintenant à gauche par p, on obtient :

$$p^2 \circ q \circ p = -p \circ q \circ p, \quad \text{donc} \quad p \circ q \circ p = -p \circ q \circ p \quad \text{et} \quad p \circ q \circ p = 0.$$

c. En reprenant l'égalité : $p \circ q \circ p = -q \circ p^2 = -q \circ p$, alors $q \circ p = 0$, puis $p \circ q = -q \circ p = 0$.

3. Les questions précédentes ont montré l'équivalence :

$$(p+q) \quad \text{est un projecteur} \quad \Longleftrightarrow \quad p \circ q = q \circ p = 0.$$

a. On doit procéder par double inclusion :

• soit x dans $\operatorname{Im}(p+q)$. Alors, il existe y dans E tel que $x = (p+q)(y)$. Ainsi, $x = p(y) + q(y)$ et $p(y)$ appartient à $\operatorname{Im} p$, puis $q(y)$ appartient à $\operatorname{Im} q$: le vecteur x appartient donc à $\operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$.

• soit x dans $\operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$. Il existe x_1 et x_2 dans $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Im} q$ tels que $x = x_1 + x_2$. Comme p est un projecteur et x appartient à l'image de p, alors $x_1 = p(x_1)$. De même, $x_2 = q(x_2)$. On en déduit :

$$\begin{aligned}(p+q)(x) &= (p+q)(p(x_1)+q(x_2)) \\ &= p^2(x_1) + q\circ p(x_1) + p\circ q(x_2) + q^2(x_2) = p(x_1) + q(x_2) = x.\end{aligned}$$

Par conséquent, le vecteur x appartient à l'image du projecteur $(p+q)$.

b. On montre encore les deux inclusions.

• Soit x appartenant à $\operatorname{Ker}(p+q)$. Alors, $p(x)+q(x) = 0$, donc $p(x) = -q(x)$. En appliquant le projecteur p, on obtient : $p^2(x) = p\circ q(x)$, donc $p(x) = 0$. Il vient que $q(x)$ est aussi le vecteur nul et donc x appartient à la fois au noyau de p et de q.

• Soit x dans $\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$. Alors, directement, $p(x) = q(x) = 0$, donc $(p+q)(x) = 0$: le vecteur x appartient à $\operatorname{Ker}(p+q)$. ▲

Exercice 15.14

1. La suite nulle vérifie évidemment cette relation pour tout entier n. Soit maintenant deux suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans l'ensemble F, puis λ un nombre complexe. Alors pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned}(\lambda\cdot u_{n+2} + v_{n+2}) &= \lambda\cdot(a\cdot u_{n+1} + b\cdot u_n) + (a\cdot v_{n+1} + b\cdot v_n) \\ &= a\cdot(\lambda\cdot u_{n+1} + v_{n+1}) + b\cdot(\lambda\cdot u_n + v_n).\end{aligned}$$

La suite $\lambda\cdot u + v$ appartient encore à F, qui est donc un sous-espace vectoriel de l'espace des suites complexes.

2. On vérifie facilement que $f(\lambda\cdot u + v) = \lambda\cdot f(u) + f(v)$.

3. Montrons que f est un isomorphisme à l'aide de la **méthode 15.10**.

$\boxed{1}$ Soit u dans $\operatorname{Ker} f$. Alors $u_0 = u_1 = 0$. Supposons que pour un rang n, on ait : $u_n = u_{n+1} = 0$. Alors, comme $u_{n+2} = a\cdot u_{n+1} + b\cdot u_n$, on a immédiatement : $u_{n+1} = u_{n+2} = 0$ et par récurrence, la suite u est nulle : l'application f est injective.

$\boxed{2}$ Soit (α,β) dans $\mathbb{C}^2$. On pose $u_0 = \alpha$, puis $u_1 = \beta$ et ensuite $u_2 = a\cdot\alpha + b\cdot\beta$. Si les nombres $u_0, u_1, \cdots, u_k$ sont construits de telle sorte que pour tout j entre 2 et k : $u_j = a\cdot u_{j-1} + b\cdot u_{j-2}$, en posant $u_{k+1} = a\cdot u_{k+1} + b\cdot u_k$, on construit par récurrence une suite u dans F telle que $f(u) = (\alpha,\beta)$: l'application f est surjective.

4. On sait alors que la bijection réciproque f^{-1} est encore un isomorphisme dans $\mathcal{L}(\mathbb{C}^2, F)$. On pose $e_1 = (1,0)$, puis $e_2 = (0,1)$ de sorte que : $\mathsf{Vect}(e_1,e_2) = \mathbb{C}^2$. Or, l'ensemble $\mathsf{Vect}(f^{-1}(e_1), f^{-1}(e_2))$ est l'ensemble des suites de la forme : $\lambda\cdot f^{-1}(e_1) + \mu\cdot f^{-1}(e_2)$, avec des scalaires complexes λ et μ. Par conséquent, l'ensemble $\mathsf{Vect}(f^{-1}(e_1), f^{-1}(e_2))$ est formé des vecteurs $f^{-1}(\lambda\cdot e_1 + \mu\cdot e_2)$, qui décrivent en fait l'ensemble $f^{-1}(\mathbb{C}^2)$, c'est-à-dire F, lorsque les scalaires λ et μ décrivent $\mathbb{C}$ tout entier. En définitive $F = \mathsf{Vect}(f^{-1}(e_1), f^{-1}(e_2))$. ▲

Proposition 15.12

Chapitre 16

Espaces vectoriels de dimension finie

UN MATHÉMATICIEN

Isaac Newton étudie à Cambridge en 1664 quand une épidémie de peste l'oblige à retourner chez lui à la campagne. C'est là qu'il conçoit les théories qui ont fait sa gloire. Son œuvre est colossale tant en physique qu'en mathématiques. Il énonce la théorie de la gravitation qui donne la loi de la chute des corps comme celle du mouvement des planètes. Il introduit le calcul différentiel et intégral qui permettra de résoudre d'innombrables problèmes.

Un peu d'histoire

La théorie de la gravitation découverte par Isaac Newton fait appel à la notion de force. La concomitance de deux d'entre elles ne se compose pas comme l'addition des nombres puisque leurs directions et leurs sens entrent alors en ligne de compte. Elles s'ajoutent selon la règle du parallélogramme. C'est ainsi qu'est né le concept de vecteur.

Au début du XIXe siècle, on n'a plus considéré le support de l'intuition comme justification suffisante du raisonnement mathématique. La notion de structure algébrique s'est imposée peu à peu et c'est cette approche qui a conduit des mathématiciens comme Arthur Cayley, William Hamilton et Hermann Grassmann à définir le concept d'espace vectoriel ; l'axiomatique que nous utilisons apparaît un tiers de siècle plus tard dans un ouvrage du mathématicien italien Giuseppe Peano en 1888.

Objectifs

les incontournables

- Familles de vecteurs en dimension finie :
  - déterminer si une famille de vecteurs est libre, génératrice ou une base ;
  - décomposer des vecteurs selon des bases.
- Espaces vectoriels de dimension finie :
  - calculer la dimension d'un espace ;
  - construire un supplémentaire d'un sous-espace.
- Application linéaires entre espaces de dimensions finies :
  - connaître et savoir utiliser la formule du rang ;
  - reconnaître un isomorphisme entre espaces vectoriels de même dimension finie.

et plus si affinités

- Calculer la dimension d'espaces vectoriels biscornus.
- Construire des applications linéaires répondant à certaines conditions.

Résumé de cours

Familles libres, génératrices, bases

Définition : *Soit $\mathcal{F} = (x_1, \ldots, x_p)$ une famille de p vecteurs d'un espace vectoriel E. On dit que :*

- *$\mathcal{F}$ est une* ***famille génératrice*** *de E si* $\mathsf{Vect}\,(x_1, \ldots, x_p) = E$*, c'est-à-dire si :*

$$\forall x \in E,\ \exists(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p,\ \textit{tels que } x = \lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 + \cdots + \lambda_p \cdot x_p$$

- *$\mathcal{F}$ est une* ***famille libre*** *si la seule façon d'avoir une combinaison linéaire nulle des vecteurs $x_1, x_2, \cdots, x_p$ est de prendre tous les coefficients nuls, c'est-à-dire si :*

$$\forall(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \quad \lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 + \cdots + \lambda_p \cdot x_p = 0_E \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$$

- *$\mathcal{F}$ est une* ***base*** *de E si elle est à la fois libre et génératrice.*

Théorème 16.1.— Caractérisation des bases —. Soit E un espace vectoriel, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une famille de vecteurs de E.

$\mathcal{B}$ est un base de E si et seulement si

Pour tout $x \in E$, il existe un p-uplet $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p$, unique tel que $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} x_i \cdot e_i$

Vocabulaire : *Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E. Les scalaires $(x_1, \ldots, x_p)$ tels que $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} x_i \cdot e_i$ s'appellent* ***les coordonnées du vecteur*** *x dans la base $\mathcal{B}$.*

Espaces vectoriels de dimension finie

Définition : *Un espace vectoriel est dit de* ***dimension finie*** *s'il a une famille génératrice finie.*

Théorème 16.2.— Théorèmes de la base incomplète et de la base extraite —. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

- Si $\mathcal{L}$ est libre dans E, alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{L} \subset \mathcal{B}$.
- Si $\mathcal{G}$ est génératrice dans E, alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{B} \subset \mathcal{G}$.

Remarque : autrement dit, dans un espace de dimension finie, toute famille libre peut-être complétée en une base et de toute famille génératrice on peut extraire une base.

Corollaire 16.3.— Tout espace de dimension finie possède des bases.

Théorème-Définition 16.4.— Théorème de la dimension —. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Toutes les bases de E comportent exactement le même nombre fini d'éléments.

On appelle **dimension** de l'espace vectoriel E, le nombre commun de vecteurs à toutes les bases de E. Cet entier naturel est noté $\dim E$.

Vocabulaire : *Si $\dim E = 1$ (resp. 2) E est appelé* ***droite vectorielle*** *(resp. un* ***plan vectoriel****).*

■ Familles de vecteurs en dimension finie

Proposition 16.5.— Familles libres et génératrices en dimension finie —. Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{F} = (x_1, \ldots, x_p)$ une famille de p vecteurs de E.

- si $\mathcal{F}$ est libre, alors $p \leqslant n$;
- si $\mathcal{F}$ est génératrice, alors $p \geqslant n$;
- si $p > n$, alors $\mathcal{F}$ est liée ;
- si $p < n$, alors $\mathcal{F}$ n'est pas génératrice.

Définition : *Soit $\mathcal{F}$ une famille de p vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension finie n.*

- *$\mathcal{F}$ est dite* ***libre maximale****, si $\mathcal{F}$ est libre et de* ***cardinal*** *n ;*
- *$\mathcal{F}$ est dite* ***génératrice minimale****, si $\mathcal{F}$ est génératrice et de* ***cardinal*** *n.*

Remarque : Si $\mathcal{F}$ est une base de E, alors Card $\mathcal{F} = \dim E$.

Théorème 16.6.— Caractérisation des bases en dimension finie —. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

$$\Updownarrow \begin{cases} \bullet\ \mathcal{F} \text{ est une base} \\ \bullet\ \mathcal{F} \text{ est génératrice minimale} \\ \bullet\ \mathcal{F} \text{ est libre maximale} \end{cases}$$

■ Sous-espaces vectoriels en dimension finie

Proposition 16.7.— Dimension des sous-espaces —. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $F \subset E$ un sous-espace de E. Alors

$$\boxed{\dim F \leqslant \dim E, \text{ avec égalité si et seulement si } F = E}$$

Proposition 16.8.— Formule de Grassmann —. Soit F et G deux sous-espaces d'un espace E de dimension finie. Alors F, G, $F \cap G$ et $F + G$ sont de dimensions finies et :

$$\boxed{\dim (F + G) = \dim F + \dim G - \dim (F \cap G)}$$

Théorème 16.9.— Caractérisation des supplémentaires en dimension finie —. Soit F et G deux sous-espaces d'un espace E de dimension finie. Alors

$$\boxed{F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires si et seulement si } \begin{cases} \bullet\ F \cap G = \{0_E\} \\ \bullet\ \dim F + \dim G = \dim E \end{cases}}$$

Proposition 16.10.— Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies.

- L'espace produit $E \times F$ est de dimension finie et $\dim (E \times F) = \dim E + \dim F$.
- L'espace $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel de dimension finie et $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim (E) \times \dim (F)$. En particulier : $\dim \mathcal{L}(E) = (\dim (E))^2$.

■ Applications linéaires en dimension finie

Construction d'applications linéaires

Théorème 16.11.— Soit E et F deux espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{K}$. On suppose que E est de dimension finie. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une base de E.
Alors, pour tous vecteurs $y_1, \ldots, y_p$ de F, il existe une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ unique telle que :

$$\forall i \in [\![1, p]\!],\ f(e_i) = y_i.$$

Commentaires : ainsi, f est entièrement déterminée par la famille $\mathcal{F} = (f(e_1), f(e_2) \ldots, f(e_p))$ des images par f des vecteurs de la base $\mathcal{B}$.

Image d'une base par une application linéaire

Proposition 16.12.— Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, avec E de dimension finie, une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ de E et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire. On note $f(\mathcal{B}) = (f(e_1), \ldots, f(e_p))$ l'image de la base $\mathcal{B}$ par f. Alors :

- f est injective si et seulement si la famille $f(\mathcal{B})$ est libre ;
- f est surjective si et seulement si la famille $f(\mathcal{B})$ est génératrice dans F ;
- f est un isomorphisme si et seulement si la famille $f(\mathcal{B})$ est une base de F.

Rang d'une application linéaire

Proposition-Définition 16.13.— Soit $f : E \to F$ une application linéaire. On suppose que E est de dimension finie. Alors, $\operatorname{Im} f$ de F est un espace vectoriel de dimension finie (même si F n'est pas de dimension finie). On appelle **rang** de f, la dimension de $\operatorname{Im} f$. On note $\operatorname{Rg} f = \dim \operatorname{Im} f$.

Proposition 16.14.— Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire, avec E un espace de dimension finie. Alors, pour toute famille génératrice $(e_i)_{i \in I}$ de E, la famille $(f(e_i))_{i \in I}$ est une famille génératrice de l'espace $\operatorname{Im} f$.

Théorème 16.15.— Théorème du rang —. Soit E et F deux espaces vectoriels, avec E de dimension finie. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Alors :

$$\boxed{\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f}$$

Corollaire 16.16.— Soit E et F deux espaces vectoriels, avec E de dimension finie. Si $f : E \to F$ est un isomorphisme, alors F est de dimension finie et $\dim F = \dim E$.

Théorème 16.17.— Caractérisation des isomorphismes en dimension finie —.
Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de même dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire. Les assertions suivantes sont équivalentes :

$$\boxed{f \text{ est bijective} \iff f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective}}$$

■ Formes linéaires et hyperplans en dimension finie

Définition : *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle* **forme linéaire** *sur E, toute application linéaire $\varphi : E \to \mathbb{K}$, à valeurs dans le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}$.*

Proposition-Définition 16.18.— Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^\star$ et H un sous-espace vectoriel de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

$\Updownarrow$
- H est le noyau d'une forme linéaire non nulle $\varphi : E \to \mathbb{K}$;
- H est le supplémentaire d'une droite vectorielle non contenue dans H ;
- H est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$.

Lorsque l'une de ces propriétés est vérifiée, on dit que H est un **hyperplan de** E.

Proposition 16.19.— Soit E un espace rapporté à une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ un n-uplet de scalaires non tous nuls.
L'ensemble des vecteurs de E dont les coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ dans la base $\mathcal{B}$ vérifient l'équation $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ est un hyperplan de E et tout hyperplan a une équation de ce type.

■ Équations linéaires

Définition : *On appelle* **équation linéaire**, *une équation de la forme $f(x) = y_0$, où $f : E \to F$ est une application linéaire entre deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, y_0 est un vecteur de F et $x \in E$ est l'inconnue de l'équation.*
Si p et n sont deux entiers naturels, on appelle **système d'équations linéaires** *de n équations à p inconnues $x_1, \cdots, x_p$, toute équation de la forme :*

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{1,1} \cdot x_1 + a_{1,2} \cdot x_2 + \cdots + a_{1,p} \cdot x_p & = & y_1 \\ a_{2,1} \cdot x_1 + a_{1,2} \cdot x_2 + \cdots + a_{1,p} \cdot x_p & = & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} \cdot x_1 + a_{n,2} \cdot x_2 + \cdots + a_{n,p} \cdot x_p & = & y_n \end{array}\right.$$

avec les coefficients $a_{i,j} \in \mathbb{K}$ et y_j connus.

Exemples :

- Les droites du plan sont caractérisées par la donnée d'un système d'une équation à deux inconnues de la forme $a \cdot x + b \cdot y = c$, où le vecteur (a, b) est non nul.
- Les plans de l'espace sont caractérisé par un système d'une seule équation à trois inconnues de la forme $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d$ où le vecteur (a, b, c) est non nul. Les droites de l'espace $\mathbb{R}^3$ sont caractérisées par un système de deux équations linéaires à trois inconnues, de la forme $\left\{\begin{array}{l} a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d \\ a' \cdot x + b' \cdot y + c' \cdot z = d' \end{array}\right.$, avec les vecteurs (a, b, c) et (a', b', c') non colinéaires.
- Toute équation différentielle linéaire d'ordre 1 de la forme $a(x) \cdot y' + b(x) \cdot y = f(x)$ définie sur un intervalle I où la fonction continue $a(\cdot)$ ne s'annule pas (les deux autres fonctions $b(\cdot)$ et $f(\cdot)$ étant également continues) peut être interprétée comme une équation linéaire dont les solutions de l'équation homogène associée forment un espace vectoriel de dimension 1.
- De même, toute équation différentielle d'ordre 2 de la forme $a \cdot y'' + b \cdot y' + c \cdot y = f(x)$, avec $a \neq 0$ correspond à une équation linéaire. L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée forment un espace de dimension 2.

Méthodes

Familles de vecteurs en dimension finie

Familles finies de vecteurs libres, génératrices

Soit $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ une famille finie de vecteurs d'un espace vectoriel E.
Il est facile de vérifier si $\mathcal{F}$ est libre lorsqu'elle ne contient que peu de vecteurs. Ainsi :

- Si $\mathcal{F} = (u_1)$, $\mathcal{F}$ est libre si et seulement si $u_1 \neq 0_E$.
- Si $\mathcal{F} = (u_1, u_2)$, $\mathcal{F}$ est libre si et seulement si u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires.

En revanche, la situation se complique dès que $p \geqslant 3$. On a alors recours à la définition.

Méthode 16.1.— Comment montrer que $\mathcal{F}$ est une famille est libre

Pour montrer que $\mathcal{F}$ est libre, on applique la définition à la lettre :

1 Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ un p-uplet de scalaires tels que

$$\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \cdots + \lambda_p \cdot u_p = 0_E.$$

2 On traduit cette égalité vectorielle (on obtient souvent un système linéaire homogène).

3 On montre que la seule solution est $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$.

On conclut que la seule combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_p$ qui donne le vecteur nul de E est la combinaison linéaire triviale $0 \cdot u_1 + \cdots + 0 \cdot u_p = 0_E$. La famille $\mathcal{F}$ est libre.

Remarque : si la dimension de E est connue, une condition nécessaire pour que $\mathcal{F}$ soit libre est que Card $\mathcal{F}$ soit inférieur à $\dim E$. Ainsi, si $p = \text{Card } F > \dim E$, alors $\mathcal{F}$ est forcément liée !

Méthode 16.2.— Comment montrer que $\mathcal{F}$ est une famille est génératrice de E

$\mathcal{F}$ engendre E lorsque tout vecteur de E peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $u_1, \ldots, u_p$. Pour le vérifier :

1 Soit $x \in E$ arbitraire. On cherche $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ des scalaires tels que

$$\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \cdots + \lambda_p \cdot u_p = x.$$

2 On traduit cette égalité vectorielle, vous obtenez (souvent) un système linéaire.

3 On montre que ce système est compatible, c'est-à-dire qu'il possède (au moins) une solution (que l'on ne cherche pas à calculer). Pour cela, on peut échelonner ce système et montrer qu'il est compatible.

Ainsi, tout vecteur x de E peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{F}$: cette famille est génératrice de E.

Remarque : si la dimension de E est connue, une condition nécessaire pour que $\mathcal{F}$ soit génératrice est que Card $\mathcal{F}$ soit supérieur à $\dim E$. Ainsi, si $p = \text{Card } F < \dim E$, alors $\mathcal{F}$ ne peut être génératrice !

Bases d'un espace vectoriel de dimension finie

La notion de base est essentielle en algèbre linéaire de dimension finie. En effet, si E est un espace vectoriel de dimension finie, rapporté à une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ tout vecteur x de E s'écrit de façon unique sous la forme

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i$$

Ainsi, un vecteur est entièrement et uniquement déterminé par ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ et plus généralement, *toute égalité vectorielle (dans E) se traduit par l'égalité des coordonnées des vecteurs sous la forme d'un système d'équations linéaires* :

$$x = y \iff \begin{cases} x_1 = y_1 \\ \cdot \\ x_n = y_n \end{cases}, \text{ où } (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \text{ et } (y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \text{ désignent les coordonnées de } x \text{ et } y.$$

❑ Méthode 16.3.— Comment montrer que $\mathcal{B}$ est une famille est une base de E

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une famille finie de vecteurs de E. Pour montrer que $\mathcal{B}$ est une base, tout dépend si la dimension de E est connue.

- **Si** $\dim E$ **n'est pas connue**, vous pouvez montrer que $\mathcal{B}$ est libre et génératrice, ou bien utiliser la **caractérisation des bases** (**théorème 16.1**) :

  [1] Soit $x \in E$ arbitraire. On cherche $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ des scalaires tels que

  $$\lambda_1 \cdot e_1 + \lambda_2 \cdot e_2 + \cdots + \lambda_p \cdot e_p = x.$$

  [2] On traduit cette égalité vectorielle sous la forme d'un système linéaire.

  [3] On montre qu'il admet une unique solution.

  Ainsi, tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de $e_1, \ldots, e_p$. Par conséquent $\mathcal{B}$ est une base de E et $\dim E = p$.

- **Si** $\dim E$ **est connue**, vous utilisez la **caractérisation des bases** (**théorème 16.6**) :

  [1] On vérifie que $\mathcal{B}$ a exactement n vecteurs (si $n \neq p$, $\mathcal{B}$ n'est pas une base de E).

  [2] On montre, **au choix**, que $\mathcal{B}$ est libre **ou** que $\mathcal{B}$ est génératrice.

  Ainsi, $\mathcal{B}$ est libre maximale **ou** génératrice minimale, c'est donc une base de E.

Mise en œuvre : exercice 16.4.

❑ Méthode 16.4.— Comment trouver une base d'un espace vectoriel

Lorsqu'un espace vectoriel E est donné par des équations :

[1] Considérer un vecteur x.

[2] Résoudre les équations relativement au vecteur x : il s'agit d'un système linéaire que l'on résout à l'aide du pivot de Gauss : les variables principales s'expriment en fonction des variables libres (paramètres).

[3] Exprimer le vecteur x comme combinaison linéaire d'une famille $\mathcal{B}$ de vecteurs en faisant intervenir les paramètres.

Ainsi tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{B}$, c'est une base de E.

Mise en œuvre : exercice 16.2.

Exemple : déterminer une base de l'espace vectoriel :

$$E = \left\{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ \mid \ x_1 - 2x_2 + x_4 = x_1 - 4x_2 - x_3 + 3x_4 = 0\right\}.$$

$\boxed{1}$ Soit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$.

$\boxed{2}$ Appliquons l'algorithme de Gauss, il vient :

$$x \in E \iff \left\{\begin{array}{lllll} x_1 & -2x_2 & & +x_4 & = 0 \\ x_1 & -4x_2 & -x_3 & +3x_4 & = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lllll} \mathbf{1}x_1 & -2x_2 & & +x_4 & = 0 \\ & \mathbf{-2}x_2 & -x_3 & +2x_4 & = 0 \end{array}\right.$$

Ce système est de rang 2, il y a 2 variables principales, x_1 et x_2 et 2 variables libres, x_3 et x_4. On les passe au second membre et on résout par remontée pour obtenir :

$$x \in E \iff \left\{\begin{array}{lllll} x_1 & -2x_2 & = & -x_4 \\ & -2x_2 & = x_3 & -2x_4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lll} x_1 & = -x_3 & +x_4 \\ x_2 & = -\frac{1}{2}x_3 & +x_4 \end{array}\right.$$

$\boxed{3}$ Ainsi $x = \left(-x_3 + x_4, -\frac{1}{2}x_3 + x_4, x_3, x_4\right) = x_3 \cdot (-1, -\frac{1}{2}, 1, 0) + x_4 \cdot (1, 1, 0, 1) = x_3 \cdot u_1 + x_4 \cdot u_2$, où on a noté $u_1 = (-1, -\frac{1}{2}, 1, 0)$ et $u_2 = (1, 1, 0, 1)$.

La famille à deux vecteurs (u_1, u_2) est donc génératrice dans E. Comme ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, la famille est libre. C'est une base de E.

Remarque : lorsque E est donné comme une somme directe de sous-espaces vectoriels, on obtient une base de E en *regroupant* des bases de chacun des sous-espaces (**méthode 16.7**).

■ Espaces et sous-espaces vectoriels en dimension finie

Dimension

Comme nous allons le voir, il existe plusieurs méthodes pour calculer de la dimension d'un espace vectoriel E, la plus directe est d'utiliser le **théorème de la dimension**. Cela revient à compter le nombre de vecteurs d'une de ses bases. C'est ainsi que l'on démontre que les espaces suivants sont de dimension finie :

- $E = \mathbb{K}^n$ est de dimension finie n. Une base de E est donnée par $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ où

$$\begin{array}{rcl} e_1 & = & (1, 0, 0, \ldots, 0, 0) \\ e_2 & = & (0, 1, 0, \ldots, 0, 0) \\ & \vdots & \ddots \\ e_n & = & (0, 0, 0, \ldots, 0, 1) \end{array}$$

$\mathcal{B}$ est appelée la **base canonique** de $E = \mathbb{K}^n$.

- $E = \mathbb{K}_n[X]$ est de dimension finie $n + 1$. Une base de E est donnée par $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \ldots, X^n)$. $\mathcal{B}$ est appelée la **base canonique** de $\mathbb{K}_n[X]$.

Remarque : dans $\mathbb{K}[X]$, la famille $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ forme également une base. Comme cette famille est infinie, $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie.

- $E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de dimension finie $n \times p$. En effet, les np matrices élémentaires $(E_{i,j})$ forment une base de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ appelée **base canonique** de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

❑ **Méthode 16.5.— Comment calculer la dimension d'un espace vectoriel E**

Pour montrer que E est de dimension finie et calculer sa dimension, on peut parfois utiliser des opérations. C'est notamment le cas lorsque :

- E est un produit cartésien : $\dim(E_1 \times E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2)$;
- E est une somme directe : $\dim(E_1 \oplus E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2)$;
- E est une intersection $\dim(E_1 \cap E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2) - \dim(E_1 \cap E_2)$.

Mais on utilise le plus souvent l'une des méthodes suivantes :

- Déterminer une base $\mathcal{B}$ de E. Alors $\dim E$ est égal au nombre de vecteurs de $\mathcal{B}$;
- Construire un isomorphisme entre E et un espace vectoriel de référence F et conclure que E est de dimension finie et $\dim E = \dim F$.

Mise en œuvre : exercice 16.4, exercice 16.5.

Exemple : pour illustrer la dernière méthode considérons l'ensemble $\mathcal{F}$ des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ et montrons que $\mathcal{F}$ est un plan vectoriel.

• On vérifie d'abord que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles (on ne détaille pas cette étape).

• Il est par ailleurs clair qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l'ensemble $\mathcal{F}$ est uniquement déterminée par ses deux premiers termes u_0 et u_1 (pour s'en convaincre, faire une récurrence faisant intervenir les rangs n et $(n+1)$).

• L'application $f : (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_0, u_1)$ est linéaire de $\mathcal{F}$ vers $\mathbb{R}^2$ et la remarque ci-dessus nous apprend que c'est un isomorphisme, car pour tout (x, y) dans $\mathbb{R}^2$, l'équation $f(u) = (x, y)$ d'inconnue $u \in \mathcal{F}$ a une seule solution. Les espaces $\mathcal{F}$ et $\mathbb{R}^2$ ont la même dimension : $\dim \mathcal{F} = 2$.

• On vérifie facilement que si λ est une racine réelle du polynôme $P(X) = X^2 - X - 1$, alors la suite géométrique $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément de $\mathcal{F}$. Les deux suites $u = \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = \left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc dans $\mathcal{F}$.

• Enfin, si $\alpha \cdot u + \beta \cdot v = 0$ est une combinaison linéaire nulle entre les vecteurs de la famille (u, v), alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha \cdot \left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta \cdot \left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = 0.$$

En particulier, en prenant $n = 0$ et $n = 1$, on obtient $\alpha + \beta = 0$ et $\alpha - \beta = 0$, d'où il découle que $\alpha = \beta = 0$. Ainsi, la famille (u, v) est libre à deux vecteurs dans un espace de dimension 2 : c'est une base !

• Résultat des courses : tout élément $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{F}$ est de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \alpha \cdot \left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta \cdot \left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

avec deux constantes réelles α et β déterminées par w_0 et w_1.

❑ Méthode 16.6.— Comment montrer que $E = F \oplus G$

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces. Pour montrer que F et G sont supplémentaires, on peut :

- Utiliser la **caractérisation des sous-espaces supplémentaires** (**théorème 16.9**). On montre que :
  - $\boxed{1}$ F et G s'intersectent transversalement : $F \cap G = \{0_E\}$.
  - $\boxed{2}$ $\dim F$ et $\dim G$ se complètent : $\dim F + \dim G = \dim E$.
- Utiliser une **caractérisation par les bases** :
  - $\boxed{1}$ On construit une base $\mathcal{F}$ de F et une base $\mathcal{G}$ de G.
  - $\boxed{2}$ On montre que la réunion des deux bases $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ est une base de E.

Notation : *$\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ désigne –abusivement– la famille composée des vecteurs de $\mathcal{F}$ et de $\mathcal{G}$.*

❑ Méthode 16.7.— Comment construire un sous-espace supplémentaire de F

Dans un espace vectoriel de dimension finie, tout sous-espace F possède des supplémentaires. Pour construire un tel sous-espace, on met en œuvre le **théorème 16.2** :

$\boxed{1}$ On construit une base $\mathcal{F}$ de F. Alors $\mathcal{F}$ est une famille libre de vecteurs de E.

$\boxed{2}$ D'après le **théorème de la base incomplète**, $\mathcal{F}$ peut se compléter en une base de E : il existe une famille $\mathcal{G}$ de vecteurs de E telle que

$$\mathcal{B} = \mathcal{F} \cup \mathcal{G} \text{ est une base de } E$$

$\boxed{3}$ On pose $G = \mathsf{Vect}\,(\mathcal{G})$. Alors G est un supplémentaire de F dans E : $E = F \oplus G$.

En pratique : lorsque E est rapporté à une base $\mathcal{B}$, on peut toujours compléter $\mathcal{F}$ en une base de E en lui ajoutant des vecteurs de $\mathcal{B}$ (conséquence du **théorème de la base incomplète**).

Exemple : plaçons-nous dans $E = \mathbb{R}^3$ et considérons $H = \mathsf{Vect}\,(u_1, u_2)$, où $u_1 = (1, -2, 2), u_2 = (1, 1, 2)$. Construisons un supplémentaire D de H dans E.

$\boxed{1}$ $\mathcal{F} = (u_1, u_2)$ est une famille génératrice de F par construction. De plus comme u_1 et u_2 sont deux vecteurs non colinéaires, ils sont linéairement indépendants : $\mathcal{F}$ est donc une base de F.

$\boxed{2}$ Pour compléter $\mathcal{F}$ en une base de E, on va lui rajouter un vecteur de la base canonique de E. Posons $u_3 = (1, 0, 0)$. On vérifie que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \lambda_3 \cdot u_3 = 0_E. \qquad (V)$$

Cette équation vectorielle se traduit par le système aux coordonnées suivant :

$$(V) \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \\ -2\lambda_1 + \lambda_2 & = & 0 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbf{1}\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \\ \mathbf{3}\lambda_2 + 2\lambda_3 & = & 0 \\ \mathbf{2}\lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

Ce système est triangulaire de rang 3, donc de Cramer : la seule solution est $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. La famille (u_1, u_2, u_3) est donc libre maximale dans E, c'est une base.

$\boxed{3}$ On peut donc poser $D = \mathsf{Vect}\,(u_3)$. Cette droite vectorielle est un supplémentaire de H :

$$\mathbb{R}^3 = H \oplus D.$$

■ Applications linéaires en dimension finie

Avant toute étude d'une application linéaire $f : E \to F$ entre espaces vectoriels de dimensions finies, vous devez penser à la **formule du rang**, absolument incontournable dans ce contexte. Grâce à ce théorème, on obtient ainsi de nouvelles méthodes pour des problèmes déjà abordés au chapitre précédent.

Image et noyau d'une application linéaire

❑ **Méthode 16.8.— Comment déterminer image et noyau de f**

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire définie sur un espace vectoriel de dimension finie n rapporté à une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$.

- Pour déterminer $\operatorname{Ker} f$

  $\boxed{1}$ Soit $x \in E$, décomposé dans la base $\mathcal{B}$ sous la forme $x = x_1 \cdot e_1 + \cdots + x_n \cdot e_n$. On traduit l'équation vectorielle $f(x) = 0_F$ sous la forme d'un système d'équations linéaires.

  $\boxed{2}$ On résout ce système par la méthode de Gauss pour en déduire une base $\mathcal{L} = (u_1, \ldots, u_p)$ de $\operatorname{Ker} f$ (**méthode 16.4**) . En particulier, on obtient également $\dim \operatorname{Ker} f = p$

- Pour déterminer $\operatorname{Im} f$. On sait d'une part, qu'elle est engendrée par les images des vecteurs de $\mathcal{B}$:

$$\operatorname{Im} f = \mathsf{Vect}\,(f(e_1), \ldots, f(e_n))$$

  D'autre part, d'après la **formule du rang** que $\operatorname{Im} f$ est de dimension $n - p$. On obtient une base de $\operatorname{Im} f$ en choisissant $n - p$ vecteurs linéairement indépendants parmi $f(e_1), \ldots, f(e_n)$.

Mise en œuvre : exercice 16.8.

Exemple : déterminons l'image et le noyau de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$, défini pour tout $x = (x_1, x_2, x_3)$ par

$$f(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 + x_2 + x_3, 3x_1 - 2x_2 - 4x_3, -2x_1 + x_2 + 3x_3).$$

- Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{array}{rcl} x \in \operatorname{Ker} f & \iff & f(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0) \\ & \iff & \left\{ \begin{array}{rcl} -x_1 + x_2 + x_3 & = & 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 & = & 0 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} -1x_1 + x_2 + x_3 & = & 0 \\ 1x_2 - x_3 & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Ce système est de rang 2, il y a une variable libre, x_3. On la passe au second membre et on résout par remontée. Il vient $x = (x_1, x_2, x_3) \in \operatorname{Ker} f$ si et seulement si $x_1 = 2x_3$ et $x_2 = x_3$, soit $(x_1, x_2, x_3) = (2x_3, x_3, x_3) = x_3 \cdot (2, 1, 1)$. Le noyau de f est donc la droite vectorielle engendrée par $(2, 1, 1)$ donc $\dim \operatorname{Ker} f = 1$, donc $\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{Rg} f = 2$.

- L'image de f est le plan vectoriel engendré par $f(1, 0, 0) = (-1, 3, -2)$, $f(0, 1, 0) = (1, -2, 1)$ et $f(0, 0, 1) = (1, -4, 3)$. Une base de $\operatorname{Im} f$ est donc donnée par $\big((-1, 3, -2), (1, -2, 1)\big)$ car c'est une famille libre maximale de $\operatorname{Im} f$.

❑ **Méthode 16.9.— Comment montrer que $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est un isomorphisme**
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimensions finies. La **caractérisation des isomorphismes en dimension finie** est incontournable. Pour prouver que f est un isomorphisme de E sur F.

$\boxed{1}$ On vérifie que $\dim E = \dim F$ (sinon, il ne peut exister d'isomorphisme de E sur F !)

$\boxed{2}$ On montre que $f : E \to F$ est injective (en vérifiant que son noyau est réduit à $\{0_E\}$).

$\boxed{3}$ On peut conclure à l'aide du **théorème 16.17**.

Mise en œuvre : exercice 16.13.

Exemple : soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ Φ l'application qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe le polynôme $\Phi(P)$ défini par $\Phi(P)(X) = P(X+1) + P(X)$. Montrons que Φ est un automorphisme de E.

$\boxed{0}$ Montrons que Φ est un endomorphisme de E.

• On vérifie tout d'abord que Φ est une application linéaire :
Spot $(P, Q) \in E^2$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned}
\Phi(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)(X) &= (\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)(X+1) + (\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)(X) \\
&= \lambda \cdot P(X+1) + \mu \cdot Q(X+1) + \lambda \cdot P(X) + \mu \cdot Q(X) \\
&= \lambda\big[P(X+1) + P(X)\big] + \mu\big[Q(X+1) + Q(X)\big]
\end{aligned}$$

Ainsi $\Phi(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q) = \lambda\Phi(P) + \mu\Phi(Q)$. Φ est bien linéaire.

• De plus, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\Phi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. Plus précisément, on vérifie aisément que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\Phi(P)$ a le même degré que P.

$\boxed{1}$ Déterminons le noyau de Φ. Soit $P \in E$, tel que $\Phi(P) = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$. Comme P et $\Phi(P)$ ont même degré, une solution de cette équation a pour degré $-\infty$ (le degré du polynôme nul). Ainsi, P est nécessairement le polynôme nul. Par conséquent $\operatorname{Ker}\Phi = \{0_{\mathbb{R}_n[X]}\}$. Φ est donc injectif.

$\boxed{2}$ On peut conclure à l'aide du **théorème 16.17** que $\Phi : E \to E$ est un automorphisme de E.

■ Équations linéaires

❑ **Méthode 16.10.— Comment résoudre une équation linéaire**
Étant donné une équation de la forme $f(x) = a$, avec $f : E \to F$ une application linéaire et $a \in F$, le principe de résolution est toujours le même :

$\boxed{1}$ Trouver une solution particulière x_0 à l'équation ; lorsque ceci est impossible, l'équation n'admet aucune solution.

$\boxed{2}$ Résoudre alors l'équation $f(x) = a \iff f(x) = f(x_0) \iff f(x - x_0) = 0 \iff x - x_0 \in \operatorname{Ker} f$ en détaillant le noyau $\operatorname{Ker} f$.

$\boxed{3}$ Les solutions sont la somme d'une solution particulière x_0 avec les solutions à l'équation $f(u) = 0$.

Mise en œuvre : exercice 16.14.

Exemple : résolvons dans $\mathbb{R}[X]$ l'équation $P(X+1) = X \cdot P'(X) + 1$.
Posons l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P(X) & \mapsto & P(X+1) - X \cdot P'(X) \end{array}$. Il est clair que cette application est linéaire. L'équation à résoudre se transforme donc en l'équation :

$$f(P) = 1 \text{ , d'inconnue } P(X) \in \mathbb{R}[X].$$

On est en présence d'une équation affine.

$\boxed{1}$ **Recherche d'une solution particulière :** une solution évidente est le polynôme $P(X) = 1$

$\boxed{2}$ **Calcul de** $\operatorname{Ker} f$ **:**
Soit $P_0(X)$ dans $\operatorname{Ker} f$. On désigne par d un entier strictement positif et supérieur ou égal à $\deg(P_0)$ de sorte que l'application :

$$\begin{array}{rcl} f_d : \mathbb{R}_d[X] & \to & \mathbb{R}_d[X] \\ P(X) & \mapsto & P(X+1) - X \cdot P'(X) \end{array}$$

est bien définie puisque si $P(X)$ est de degré inférieur ou égal à d, il en est de même de $f_d(P)$. De plus, le polynôme $P_0(X) \in \mathbb{R}_d[X]$ appartient au noyau de f_d. On vient ainsi de transposer le problème en dimension finie égale à $\dim(\mathbb{R}_d[X]) = d+1$.
Étudions l'endomorphisme f_d en examinant par exemple l'image par f_d de la base canonique $(1, X, \cdots, X^d)$.
Si l'entier k est fixé entre 0 et d, alors on peut appliquer la formule du binôme de Newton dans $\mathbb{R}[X]$, ce qui donne :

$$f_d(X^k) = (X+1)^k - k \cdot X^k = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} \cdot X^j + (1-k) \cdot X^k.$$

On en déduit que la famille des polynômes $(f_d(1), f_d(X^2), \cdots, f_d(X^d))$ est à degrés deux à deux distincts, ce qui implique que cette famille est libre. De plus, il s'agit d'une famille de vecteurs dans l'image $\operatorname{Im}(f_d)$. Le rang de l'endomorphisme f_d est supérieur ou égal à d et par le **théorème du rang** :

$$\dim(\operatorname{Ker}(f_d)) \leqslant 1.$$

Enfin, les polynômes $f_d(1) = 1$ et $f_d(X) = 1$ sont égaux, ou encore $f_d(X-1) = 0$. On en déduit que le noyau $\operatorname{Ker} f_d$ n'est pas réduit à $\{0\}$ et donc $\dim(\operatorname{Ker}(f_d)) = 1$. En outre, l'inclusion $\mathsf{Vect}(X-1) \subset \operatorname{Ker}(f_d)$ se transforme en égalité d'ensembles par les dimensions.
On conclut que $P_0(X) \in \mathsf{Vect}(X-1)$ et donc :

$$\operatorname{Ker}(f) = \mathsf{Vect}(X-1).$$

$\boxed{3}$ **Conclusion :**
La structure affine de l'équation envisagée implique que les solutions forment un sous-espace affine de $\mathbb{R}[X]$. Plus précisément, il s'agit du sous-espace affine passant par le polynôme constant égal à 1 et dirigé par $\mathsf{Vect}(X-1)$. Les solutions sont exactement les polynômes $1 + \lambda \cdot (X-1)$, lorsque λ décrit $\mathbb{R}$.

Vrai/Faux

	Vrai	Faux
1. Si F et G sont deux sous-espaces de $\mathbb{R}^6$, alors : $\dim F + \dim G = 6 \iff F \oplus G = \mathbb{R}^6$.	☐	☐
2. Pour construire un endomorphisme f dans $\mathcal{L}(\mathbb{C})$ considéré comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel, il suffit de construire $f(i)$ et $f(1-i)$.	☐	☐
3. Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est de dimension égale à 4 si et seulement si il existe un isomorphisme f entre E et $\mathbb{R}_3[X]$.	☐	☐
4. Si E est de dimension finie, alors tout sous-espace F de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$ a pour dimension un entier qui est un carré parfait.	☐	☐
5. L'ensemble des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace de dimension finie.	☐	☐
6. Dans l'espace $\mathbb{R}^n$, toute famille $\mathcal{F}$ composée de vecteurs tels qu'aucun des vecteurs de $\mathcal{F}$ n'est colinéaire à un autre vecteur de $\mathcal{F}$ est une famille libre.	☐	☐
7. Dans l'espace $\mathbb{R}_n[X]$, toute famille comportant $(n+1)$ vecteurs est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.	☐	☐
8. Si E est de dimension finie, les isomorphismes de E sont les applications linéaires transformant n'importe quelle base de E en une autre base de E.	☐	☐
9. Si u et v sont deux endomorphismes dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, alors $\mathrm{Rg}\,(u) + \mathrm{Rg}\,(v) = \mathrm{Rg}\,(u+v)$.	☐	☐
10. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ avec E de dimension finie. Si $\mathrm{Rg}\,(f) = \dim E$, alors l'application f est injective mais la réciproque n'est pas vraie.	☐	☐
11. Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux sous-espaces affines de même dimension, il existe une translation t_u telle que $t_u(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$	☐	☐

Énoncé des exercices

Espaces vectoriels de dimension finie, bases et dimensions

Exercice 16.1 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On considère $E = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$.
Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et déterminer sa dimension.

Exercice 16.2 : On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$.
On pose les deux ensembles $F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 - x_2 + 3x_3 = 0\}$, puis
$G = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_3 = 0 \end{array}\right\}$.

1. Montrer que F et G sont deux supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$ et déterminer une base $\mathcal{B}_F$ de F puis une base $\mathcal{B}_G$ de G.

2. Soit f le projecteur sur F parallèlement à G. Calculer $f(1, 2, 0)$.

Exercice 16.3 :

1. Montrer que la famille $(1, \cos, \sin)$ est libre dans l'espace $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2. La fonction $x \mapsto x$ appartient-elle à $\mathsf{Vect}\,(1, \cos, \sin)$?

Exercice 16.4 : Soit n un entier naturel.

1. Soit $(P_0(X), P_1(X), \cdots, P_n(X))$ une famille de polynômes non nuls dans l'espace $\mathbb{R}_n[X]$ tels que les degrés des polynômes $P_0(X), P_1(X), \cdots, P_n(X)$ soient tous différents (famille à degrés échelonnés). Montrer qu'il s'agit d'une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Montrer que la famille $\left(X^k \cdot (X-1)^{n-k}\right)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 16.5* : Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces de dimension finie, puis G un sous-espace de E.

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{G} = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid G \subset \operatorname{Ker} u\}$ est un sous-espace de $\mathcal{L}(E, F)$.

2. Calculer la dimension de $\mathcal{G}$ en fonction de $\dim E$, $\dim F$ et $\dim G$.

Exercice 16.6* : Soit E un espace vectoriel de dimension n et $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ une famille de formes linéaires de E. On suppose qu'il existe un vecteur $x \in E$, non nul, tel que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $f_i(x) = 0_E$.
Montrer que la famille $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ est liée dans $E^\star$.

Applications linéaires

Exercice 16.7 : Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer qu'il existe un seul endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que :

$$f(e_1) = 13e_1 + 12e_2 + 6e_3, \quad f(e_2) = -8e_1 - 7e_2 - 4e_3 \quad \text{et} \quad f(e_3) = -12e_1 - 12e_2 - 5e_3.$$

2.

a. Montrer que les ensembles $F = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) = x\}$ et $G = F = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) = -x\}$ sont deux sous-espaces de $\mathbb{R}^3$.

b. Déterminer une base de F et une base de G.

3. Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

Exercice 16.8 : Soit n un entier naturel. On pose Δ, l'application suivante :

$$\begin{array}{rcl} \Delta : \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \mapsto & P(X+1) - P(X). \end{array}$$

1. Montrer que l'application Δ est linéaire.
2. Déterminer une base du noyau $\operatorname{Ker} \Delta$.
3. En déduire l'image $\operatorname{Im} \Delta$.

Exercice 16.9 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel puis f un endomorphisme dans $\mathcal{L}(E)$ tel que :

$$\forall x \in E, \quad \exists n_x \in \mathbb{N}, \quad f^{n_x}(x) = 0 \quad \text{(composée } n_x \text{ fois de la fonction } f)$$

1. On suppose que E est de dimension finie. Montrer qu'il existe un entier n tel que : $f^n = 0$.
2. Cela marche-t-il encore lorsque E n'est plus de dimension finie ?

Exercice 16.10 : Soit f et g deux endomorphismes de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tels que $f \circ g = 0$. Montrer que $\operatorname{Rg} f + \operatorname{Rg} g \leqslant n$.

Exercice 16.11 : Soit E un espace vectoriel, puis f et g deux endomorphismes dans $\mathcal{L}(E)$ tels que :

$$E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g.$$

1. On suppose que l'espace E est de dimension finie. Montrer que les deux sommes précédentes sont directes.
2. On considère l'exemple : $E = \mathbb{R}[X]$, puis $f : P \mapsto P'(X)$ et $g : P \mapsto P(0)$.
a. Montrer que les applications f et g sont deux endomorphismes de E.
b. Déterminer les ensembles $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Im} f$, $\operatorname{Ker} g$ et $\operatorname{Im} g$.
c. Le résultat de la première question subsiste-t-il encore si E n'est plus supposé de dimension finie ?

Exercice 16.12* : Soit E un espace vectoriel de dimension finie, puis f un endomorphisme de E. Montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :
- $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$
- $f \circ f = 0$ et il existe un endomorphisme h dans $\mathcal{L}(E)$ tel que $h \circ f + f \circ h = Id_E$.

Exercice 16.13* : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On pose $p = \dim E$. On appelle forme linéaire sur E, toute application linéaire $\varphi : E \to \mathbb{K}$ dans $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. On appelle hyperplan de E, tout sous-espace de E de dimension $(p-1)$.
1. Montrer que les hyperplans de E sont exactement les noyaux des formes linéaires non nulles sur E.
2. Soit $(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$ une famille de p formes linéraires dans $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. Montrer que cette famille est une base de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ si et seulement si l'application $\Phi : x \mapsto (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_p(x))$ est un isomorphisme de E vers $\mathbb{K}^p$.

■ Équations linéaires

Exercice 16.14 : 1. Soit a et b dans $\mathbb{C}$, avec $a \neq 1$. Montrer que l'ensemble des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs complexes telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} = a \cdot u_n + b$ est un sous-espace affine de

l'ensemble des suites complexes. On précisera un point Ω de ce sous-espace et sa direction, puis sa dimension.

2. Reprendre la question précédente avec l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n - 8.$$

Indications

Ex. 16.6

$E^\star = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est de dimension n.

Ex. 16.7

On commencera par trouver la formule $f(x, y, z)$ en fonction de x, y et z.

Ex. 16.12

Pour construire un bon endomorphisme h, on considèrera une base $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p)$ de $\operatorname{Im} f$, puis pour tout i entre 1 et p, un antécédent e_i du vecteur ε_i par f, et on montrera que la famille $(e_1, \cdots, e_p, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p)$ est une base de E.

Ex. 16.13

1. *Si H est un hyperplan de E, on déterminera un vecteur x de E tel que $H \oplus \mathsf{Vect}\,(x) = E$, puis à l'aide de la famille libre (x), complétée en une base de E bien choisie, on construira une forme linéaire $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ telle que $\operatorname{Ker} \varphi = H$.*

2. *On commencera par montrer que si $x \neq 0$, alors $\Phi(x) \neq (0, 0, \ldots, 0)$. On pourra ensuite supposer que la famille $(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$ est liée pour montrer la réciproque par contraposée.*

Corrigé des vrai/faux

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
F	V	V	F	F	F	F	V	F	F	F

1. En prenant $F = G$ l'espace des 6-uplets de $\mathbb{R}^6$ dont les trois premières composantes sont nulles, alors $\dim F = \dim G = 3$, donc $\dim F + \dim G = 6$, mais la somme $F + G$ ne vaut pas $\mathbb{R}^6$ (et n'est pas directe). Remarquons que dans un espace E de dimension n, pour montrer que deux espaces F et G sont supplémentaires, il suffit de montrer que $F \cap G \subset \{0_E\}$ puis $\dim F + \dim G = n$.
2. Définir un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C})$ revient à le définir sur n'importe quelle base.
4. On peut trouver des sous-espaces de n'importe quelle dimension entre 0 et $\dim(E)^2$, par exemple 2 qui n'est pas un carré parfait.
6. Dans l'espace $\mathbb{R}^2$ par exemple, dans la famille à trois vecteurs $\mathcal{F} = (e_1, e_2, e_3)$ avec $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ et $e_3 = (1, 1)$, aucun des vecteurs e_i n'est colinéaire à aucun des autres vecteurs e_j $(j \neq i)$ et pourtant la famille $\mathcal{F}$ comportant strictement plus de vecteurs que $\dim(\mathbb{R}^2)$ est liée.
7. Le bon résultat est que toute famille libre comportant $(n+1)$ vecteurs dans $\mathbb{R}_n[X]$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. La famille comportant $(n+1)$ fois le polynôme nul n'est certainement pas une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
9. En prenant par exemple $u = v = Id_{\mathbb{R}^n}$, alors $\mathrm{Rg}(u) + \mathrm{Rg}(v) = 2n$ et $\mathrm{Rg}(u + v) = n$.
10. Dire que $\mathrm{Rg}(f) = \dim(E)$ revient à dire d'après le **théorème du rang** que : $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 0$, ce qui est strictement équivalent au fait que f est injective.
11. On peut avoir affaire à des sous-espaces non parallèles, comme pour les plans affines dans $\mathbb{R}^3$.

Erreurs classiques

- Ne pas penser qu'une famille contenant des vecteurs deux à deux non colinéaires est libre. Cela ne marche pas en général dès que la famille contient au moins trois vecteurs.
- Ne pas croire qu'une famille à p vecteurs dans un espace vectoriel de dimension p est une base. Il faut qu'elle soit libre (ou génératrice).
- Ne pas confondre dimensions et cardinaux.
- Ne pas parler de $\dim f$, en particulier dans le **théorème du rang** : la dimension d'une application linéaire est tout bonnement incompréhensible !
- Ne pas oublier de faire appel à un calcul de dimension pour transformer une inclusion en égalité (plutôt que de se lancer dans l'inclusion réciproque) ou pour transformer une injectivité en une bijectivité (plutôt que de s'attaquer à la surjectivité d'une application linéaire).
- Ne pas confondre sous-espace vectoriel avec sous-espace affine. Le second est un translaté du premier.
- Dans les équations de type affine, il faut penser à vérifier qu'il y a au moins une solution pour conclure que l'ensemble des solutions est un sous-espace affine.
- Les noyaux des formes linéaires sont presque toujours des hyperplans, sauf pour la forme linéaire nulle.

Corrigé des exercices

Exercice 16.1

On peut montrer « à la main » que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, ou bien procéder comme ci-dessous.

Soit $M = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix}$. Alors

$$AM = \begin{pmatrix} x_1 - x_7 & x_2 - x_8 & x_3 - x_9 \\ x_4 + 2x_7 & x_5 + 2x_8 & x_6 + 2x_9 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix}$$

$$MA = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & -x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_4 & x_5 & -x_4 + 2x_5 + x_6 \\ x_7 & x_8 & -x_7 + 2x_8 + x_9 \end{pmatrix}$$

Par conséquent, M appartient à E si et seulement si

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{r} x_1 - x_7 = x_1 \\ x_2 - x_8 = x_2 \\ x_3 - x_9 = -x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_4 + 2x_7 = x_4 \\ x_5 + 2x_8 = x_5 \\ x_6 + 2x_9 = -x_4 + 2x_5 + x_6 \\ x_7 = x_7 \\ x_8 = x_8 \\ x_9 = -x_7 + 2x_8 + x_9 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & 2x_2 + x_9 \\ x_4 & = & 2x_5 - 2x_9 \\ x_7 & = & 0 \\ x_8 & = & 0 \end{array} \right.$$

Ce système est échelonné, de rang 4. Il y a donc 5 variables libres x_2, x_3, x_5, x_6, x_9. Avec les notations usuelles pour la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on obtient que M appartient à E si et seulement si il existe $(x_2, x_3, x_5, x_6, x_9) \in \mathbb{R}^5$ tel que

$$\begin{aligned} M &= (2x_2+x_9)E_{11}+x_2E_{12}+x_3E_{13}+(2x_5-2x_9)E_{21}+x_5E_{22}+x_6E_{23}+x_9E_{33} \\ &= x_2(2E_{11}+E_{12})+x_3E_{13}+x_5(2E_{21}+E_{22})+x_6E_{23}+x_9(2E_{11}-2E_{21}+E_{33}) \end{aligned}$$

Ainsi, E apparaît comme l'ensemble des combinaisons linéaires des 5 matrices $B_1 = 2E_{11} + E_{12}$, $B_2 = E_{13}$, $B_3 = 2E_{21} + E_{22}$, $B_4 = E_{23}$ et $B_5 = 2E_{11} - 2E_{21} + E_{33}$. En particulier,

$$E = \mathsf{Vect}\,(B_1, B_2, B_3, B_4, B_5)$$

Il s'agit donc bien d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrons que la famille $(B_1, B_2, B_3, B_4, B_5)$ est une base de E. Comme elle est génératrice par construction, il suffit de vérifier qu'elle est libre.

Soit donc $(x_2, x_3, x_5, x_6, x_9) \in \mathbb{R}^5$ tel que

$$(2) \quad (2x_2+x_9)E_{11}+x_2E_{12}+x_3E_{13}+(2x_5-2x_9)E_{21}+x_5E_{22}+x_6E_{23}+x_9E_{33} = 0$$

Comme les (E_{ij}) forment la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, en particulier la sous-famille $(E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{21}, E_{22}, E_{23}, E_{33}$ est libre. Il en résulte aisément que $x_2 = x_3 = x_5 = x_6 = x_9 = 0$.
Ainsi, $(B_1, B_2, B_3, B_4, B_5)$ est une base de E. Par conséquent E est de dimension 5. ▲

Exercice 16.2

1. Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in E$. Alors :

$$x \in F \iff x_1 = x_2 - 3x_3 \iff x \in \mathsf{Vect}\Big((1,1,0),(-3,0,1)\Big).$$

L'ensemble F est donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et la famille $\Big((1,1,0),(-3,0,1)\Big)$ est une base $\mathcal{B}_F$: $\dim F = 2$.
De la même façon, soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in E$. Alors :

$$x \in G \iff \iff \begin{cases} x_2 = -2x_1 \\ x_3 = -2x_1 \end{cases} \iff x \in \mathsf{Vect}\,(1,-2,-2)$$

L'ensemble G est un espace vectoriel et la famille $(1,-2,-2)$ est une base $\mathcal{B}_G$ de G : $\dim G = 1$.
Soit x dans $F \cap G$. Comme le vecteur x appartient à l'espace F, on pose : $x = \lambda_1 \cdot (1,1,0) + \lambda_2 \cdot (-3,0,1)$, où λ_1 et λ_2 appartiennent à $\mathbb{R}$. Comme x appartient à G, on pose également : $x = \mu \cdot (1,-2,-2)$, avec μ dans $\mathbb{R}$. La résolution du système conduit à $\lambda_1 = \lambda_2 = \mu = 0$, donc x est le vecteur nul de E. La somme $F+G$ est directe. Par la formule de Grassmann, $\dim(F+G) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ et l'inclusion $F+G \subset \mathbb{R}^3$ se transforme en égalité ! On a finalement : $F \oplus G = E$.
2. En regroupant les deux bases $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$ des deux supplémentaires F et G, on forme une base de l'espace E. Ensuite, on pose : $(1,2,0) = \alpha(1,1,0) + \beta(-3,0,1) + \gamma(1,-2,-2)$, avec α, β et γ dans $\mathbb{R}$. La résolution conduit à $\alpha = \dfrac{8}{3}$, $\beta = \dfrac{2}{3}$ et $\gamma = \dfrac{1}{3}$.
En posant : $x_F = \dfrac{8}{3}(1,1,0) + \dfrac{2}{3}(-3,0,1) = \left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{8}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$ et $x_G = \dfrac{1}{3}(1,-2,-2)$, alors x_F appartient à F, x_G appartient à G et $x_F + x_G = (1,2,0)$. En conclusion : $f(1,2,0) = \left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{8}{3}, \dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{2}{3}(1,4,1)$. ▲

Exercice 16.3

1. Soit $\alpha \cdot 1 + \beta \cdot \cos + \gamma \cdot \sin = 0$ une combinaison linéaire nulle entre les vecteurs de la famille $(1, \cos, \sin)$. Alors, pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$\alpha + \beta \cdot \cos x + \gamma \cdot \sin x = 0.$$

En particulier pour $x = 0$, on obtient $\alpha + \beta = 0$, pour $x = \pi$, on obtient $\alpha - \beta = 0$, ce qui impose déjà : $\alpha = \beta = 0$. Maintenant, en prenant $x = \dfrac{\pi}{2}$, on aboutit à : $\alpha + \gamma = 0$, donc $\gamma = 0$: la famille est libre.
2. Imaginons un instant que la fonction $x \mapsto x$ appartienne à l'espace $\mathsf{Vect}\,(1, \cos, \sin)$. Il existerait trois constantes α, β et γ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x = \alpha + \beta \cdot \cos x + \gamma \cdot \sin x.$$

Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| \leqslant |\alpha| + |\beta \cdot \cos x| + |\gamma \cdot \sin x| \leqslant |\alpha| + |\beta| + |\gamma|,$$

ce qui paraît difficile à concevoir, surtout lorsque x tend vers $+\infty$: la réponse est non !

▲

Exercice 16.4

1. Quitte à renuméroter les polynômes, on peut supposer que $\deg(P_0(X)) < \deg(P_1(X)) < \cdots < \deg(P_n(X))$. Soit maintenant $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \cdot P_k(X) = 0$ une combinaison linéaire nulle entre les vecteurs de cette famille. Le seul terme en $X^{\deg(P_n(X))}$ dans cette expression est uniquement présent dans le polynôme $\lambda_n \cdot P_n(X)$: nécessairement, $\lambda_n = 0$. Le seul terme en $X^{\deg(P_{n-1}(X))}$ dans la somme restante est uniquement dans le polynôme $\lambda_{n-1} \cdot P_{n-1}(X)$: le scalaire λ_{n-1} est nul. On procède ainsi de suite jusqu'à $\lambda_0 = 0$. La famille $(P_0(X), \cdots, P_n(X))$ est libre et compte $(n+1) = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ vecteurs : il s'agit d'une base.

2. Soit $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \cdot X^k (X-1)^{n-k} = 0$ une combinaison linéaire nulle entre les vecteurs de la famille de polynômes. Si l'un au moins des scalaires λ_k est non nul, soit k_0 l'indice minimal tel que $\lambda_{k_0} \neq 0$, de sorte que :

$$\sum_{k=k_0}^{n} \lambda_k \cdot X^k (X-1)^{n-k} = 0, \quad \text{donc} \quad X^{k_0} \cdot \sum_{k=k_0}^{n} \lambda_k \cdot X^{k-k_0} (X-1)^{n-k} = 0.$$

L'anneau $\mathbb{R}[X]$ est intègre, ce qui implique : $\sum_{k=k_0}^{n} \lambda_k \cdot X^{k-k_0} (X-1)^{n-k} = 0$, et l'évaluation de cette égalité entre polynômes en 0 donne : $\lambda_{k_0} \cdot (-1)^{n-k_0} = 0$, ce qui est tout bonnement impossible. Résultat des courses : aucun des scalaires λ_k n'est non nul. La famille $\left(X^k \cdot (X-1)^{n-k}\right)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est libre et de cardinal $\dim(\mathbb{R}_n[X])$: c'est une base. ▲

Exercice 16.5

1. On vérifie facilement que $\operatorname{Ker} 0_{\mathcal{L}(E)} = E$ contient G, puis que si u et v sont dans $\mathcal{G}$ et λ est dans $\mathbb{K}$, alors pour tout x dans G, $(\lambda \cdot u + v)(x) = 0$.

2. Soit H un supplémentaire de G dans E. On sait que définir entièrement un endomorphisme dans $\mathcal{L}(E)$ revient à le définir sur G et sur H. De plus, les éléments de $\mathcal{G}$ sont exactement les endomorphismes $u \in \mathcal{L}(E)$ tels que :

- la restriction $u_{|G}$ est l'application nulle sur G
- la restriction $u_{|H}$ est n'importe quelle application dans $\mathcal{L}(H, F)$.

Ainsi, l'application $\Phi : u \mapsto u_{|H}$ est un isomorphisme de $\mathcal{G}$ vers $\mathcal{L}(H, F)$:

$$\dim(\mathcal{G}) = \dim \mathcal{L}(H, F) = \dim H \times \dim F = (\dim E - \dim G) \times \dim F.$$

▲

Exercice 16.6

Remarquons que la famille $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ est de cardinal $n = \dim E^\star$. Par conséquent, $\mathcal{F}$ est libre *si et seulement si* elle est génératrice. Montrons que $\mathcal{F}$ n'est pas génératrice.
Soit $f \in \mathsf{Vect}(\mathcal{F})$. Il existe $(\lambda_1, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $f = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot f_i$. En particulier, tout élément de $\mathsf{Vect}(\mathcal{F})$ vérifie

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot f_i(x) = 0$$

On en déduit aisément que $\mathcal{F}$ n'est pas génératrice en considérant par exemple la forme linéaire $\tilde{f} = \varphi \circ p : E \to \mathbb{K}$, où $p : E \to \mathsf{Vect}(\vec{x})$ est induite par une projection de E sur la droite vectorielle $\mathsf{Vect}(x)$,et $\varphi : \mathsf{Vect}(x) \to \mathbb{K}$ est un isomorphisme de $\mathsf{Vect}(x)$ sur $\mathbb{K}$. Clairement $f(x) \neq 0$ et par conséquent $\tilde{f} \notin \mathsf{Vect}(\mathcal{F})$. Ainsi, $\mathcal{F}$ n'est pas génératrice, donc pas libre non plus ! ▲

Exercice 16.7

1. En prenant la famille $(y_1 = 13e_1 + 12e_2 + 6e_3, y_2 = -8e_1 - 7e_2 - 4e_3, y_3 = -12e_1 - 12e_2 - 5e_3)$, on sait qu'il existe une seule application linéaire f construite sur la base (e_1, e_2, e_3) par : $f(e_i) = y_i$ pour tout i entre 1 et 3.
2.

a. L'ensemble F est en fait $\mathrm{Ker}\,(f - Id_{\mathbb{R}^3})$ et l'ensemble G est égal à $\mathrm{Ker}\,(f + Id_{\mathbb{R}^3})$. En tant que noyaux, ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

b. On a besoin de connaître la formule pour $f(x, y, z)$. Or,

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= f(x \cdot e_1 + y \cdot e_2 + z \cdot e_3) \\ &= (13x - 8y - 12z, 12x - 7y - 12z, 6x - 4y - 5z). \end{aligned}$$

Soit (x, y, z) dans $\mathbb{R}^3$. On écrit successivement :

$$\begin{aligned} (x,y,z) \in F &\iff \begin{cases} 12x - 8y - 12z = 0 \\ 12x - 8y - 12z = 0 \\ 6x - 4y - 6z = 0 \end{cases} \\ &\iff x = \frac{2}{3}y + z \\ &\iff (x,y,z) = y \cdot \left(\frac{2}{3}, 1, 0\right) + z \cdot (1,0,1) \\ &\iff (x,y,z) \in \mathsf{Vect}\left(\left(\frac{2}{3}, 1, 0\right), (1,0,1)\right). \end{aligned}$$

La famille $((2,3,0),(1,0,1))$ est une base de F : $\dim F = 2$.
De la même façon,

$$\begin{aligned} (x,y,z) \in G \iff \begin{cases} 14x - 8y - 12z = 0 \\ 12x - 6y - 12z = 0 \\ 6x - 4y - 4z = 0 \end{cases} &\iff x = y = 2z \\ &\iff (x,y,z) = z \cdot (2,2,1). \end{aligned}$$

La famille $(2, 2, 1)$ forme une base de G : $\dim G = 1$.

3. Soit (x, y, z) dans $F \cap G$.

On pose alors : $(x, y, z) = \alpha \cdot (2, 3, 0) + \beta \cdot (1, 0, 1)$ et $(x, y, z) = \gamma \cdot (2, 2, 1)$, ce qui impose le système : $\begin{cases} 2\alpha + \beta = 2\gamma \\ 3\alpha = 2\gamma \\ \beta = \gamma \end{cases}$, dont la seule solution est : $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Le vecteur (x, y, z) est nul et la somme $F + G$ est directe.

Ensuite, la dimension d'une somme directe est toujours égale à la somme des dimensions, qui est une conséquence de la formule de Grassmann. L'inclusion $F \oplus G \subset \mathbb{R}^3$ (c'est l'inclusion évidente) et l'égalité des dimensions ($\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G = 2 + 1 = \dim \mathbb{R}^3$) montre que l'on a en fait égalité : $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

▲

Exercice 16.8

1. On montre facilement que si $P(X)$ et $Q(X)$ sont dans $\mathbb{R}_n[X]$ et λ est dans $\mathbb{R}$, alors : $\Delta(\lambda \cdot P + Q) = \lambda \cdot \Delta(P) + \Delta(Q)$.

2. Soit $P(X)$ dans le noyau $\operatorname{Ker} \Delta$. Alors, $P(X + 1) = P(X)$. D'après le **théorème de d'Alembert-Gauss**, si l'on suppose que le polynôme $P(X)$ n'est pas constant, il admet au moins une racine complexe ξ. Ainsi, $P(\xi + 1) = P(\xi) = 0$ et par récurrence immédiate, tous les nombres $\xi + k$, avec k dans l'ensemble des entiers naturels. Le polynôme $P(X)$ admettrait alors une infinité de racines, ce qui fait beaucoup trop pour un polynôme non constant ! Ceci montre que si $P(X)$ est dans $\operatorname{Ker} \Delta$, alors le polynôme $P(X)$ est constant. Réciproquement, il est évident que tout polynôme constant est dans le noyau de Δ. En conclusion, le noyau $\operatorname{Ker} \Delta$ est composé de tous les polynômes constants : c'est un espace vectoriel de dimension 1, engendré par le polynôme $P(X) = 1$ par exemple.

Théorème 13.11

3. D'après le **théorème du rang** : $\dim \mathbb{R}_n[X] = \dim \operatorname{Ker} \Delta + \dim \operatorname{Im} \Delta$. Ainsi, $\dim \operatorname{Im} \Delta = n$.

Or, si $P(X)$ est un polynôme de degré au maximum n, alors les termes en X^n dans les polynômes $P(X+1)$ et $P(X)$ sont les mêmes. Il n'y a finalement plus de termes en X^n dans le polynôme $\Delta(P)$ et l'image $\operatorname{Im} \Delta$ est incluse dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ de dimension n. Par égalité des dimensions, l'image $\operatorname{Im} \Delta$ est l'espace $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tout entier. ▲

Exercice 16.9

1. Soit $(e_1, \cdots, e_p)$ une base de l'espace E. Pour tout i entre 1 et p, il existe un entier naturel n_i tel que : $f^{n_i}(e_i) = 0$.

En posant n le maximum des entiers parmi $n_1, n_2, \cdots, n_p$, en choisissant i entre 1 et p, on obtient alors : $f^n(e_i) = f^{n-n_i}(f^{n_i}(e_i)) = f^{n-n_i}(0) = 0$. Par conséquent, l'application linéaire f^n est nulle sur la base $(e_1, \cdots, e_p)$, donc nulle partout. L'entier n fait l'affaire.

Il est interdit de considérer le maximum des entiers n_x, lorsque x décrit l'ensemble de tous les vecteurs de l'espace E, car l'entier n_x pourrait tendre vers $+\infty$.

2. La réponse est : non. Pour le montrer, voici un contre-exemple : l'application $f : P(X) \mapsto P'(X)$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$.

L'application f est clairement linéaire. De plus, si $P(X)$ est un polynôme dans $\mathbb{R}[X]$ de degré s, alors en choisissant $n_P = s + 1$, le polynôme $f^{n_P}(P)$ est le polynôme $P(X)$ après l'avoir dérivé $s + 1$ fois : on tombe sur le polynôme nul. Enfin, si n est dans $\mathbb{N}$, il est facile de voir que le polynôme $f^n(X^n)$ est le

polynôme constant égal à $n!$. Ainsi, l'application f^n n'est jamais nulle, pour aucun entier n. ▲

Exercice 16.10

Soit x dans $\operatorname{Im} g$. Il existe alors un vecteur α de $\mathbb{R}^n$ tel que $g(\alpha) = x$. On en déduit : $f(x) = f \circ g(\alpha) = 0$ et le vecteur x appartient à $\operatorname{Ker} f$. On vient de montrer l'inclusion :

$$\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f \quad \text{, donc en particulier :} \quad \operatorname{Rg} g \leqslant \dim \operatorname{Ker} f.$$

Le théorème du rang fait alors l'affaire :

$$\operatorname{Rg} g + \operatorname{Rg} f \leqslant \dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{Rg} f = \dim(\mathbb{R}^n) = n.$$

▲

Exercice 16.11

1. Le **théorème du rang** appliqué aux fonctions f et g associé à la **formule de Grassmann** fournit après simplifications :

$$\dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g) + \dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g) = 0.$$

Il s'agit d'une somme nulle et composée de deux entiers naturels ; chaque entier naturel est nul et donc : $\dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g) = \dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g) = 0$, ce qui signifie que les espaces $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g$ et $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g$ sont réduits à $\{0\}$.

2.

a. C'est évident !

b. Les polynômes P dans le noyau $\operatorname{Ker} f$ sont exactement les polynômes P tels que $P' = 0$, c'est-à-dire les polynômes constants.

Soit $Q(X) = \sum_{k=0}^{q} a_k \cdot X^k$ un polynôme dans E. Il est clair que le polynôme $R(X) = \sum_{k=0}^{q} \frac{a_k}{k+1} \cdot X^{k+1}$ vérifie : $f(R) = Q$. L'application est surjective et $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}[X]$.

Les polynômes P dans le noyau de g sont exactement les polynômes admettant 0 comme racine, c'est-à-dire ceux qui ont un terme constant égal à 0. Par conséquent : $\operatorname{Ker} g = X \cdot \mathbb{R}[X]$ (multiples du polynôme X).

L'ensemble $\operatorname{Im} g$ est constitué de tous les polynômes constants. En fait, l'application g est un projecteur.

c. Avec les notations de la question 2), si P est dans E, alors $P = P(0) + (P - P(0))$, avec $f(P(0)) = 0$ et $g(P - P(0)) = 0$: $E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g$. L'espace $\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$ est inclus dans E et $\operatorname{Im} f$ est déjà égal à E, donc $\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g = E$. En résumé, les endomorphismes f et g vérifient l'égalité de la question 1). Cependant, la somme $\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$ n'est pas directe (à noter que la somme $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g$ est directe). La réponse à la question est : non. ▲

Toujours construire une application linéaire sur une base, et si possible, une base adaptée au problème.

Exercice 16.12

On suppose $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$. Soit x dans E. Alors, $f(x)$ appartient à $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$ et $f(f(x)) = 0$: $f \circ f = 0$.

Ensuite, pour montrer l'existence d'un endomorphisme h convenable, nous allons déterminer une base de E et construire les images des vecteurs de cette base par h.

Soit $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p)$ une base de $\operatorname{Im} f$. Pour tout entier i entre 1 et p, on désigne par e_i un antécédent de ε_i par f.

Soit $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot e_i + \sum_{i=1}^{p} \mu_i \cdot \varepsilon_i = 0$ une combinaison linéaire nulle entre les vecteurs de cette famille. On applique la fonction f, ce qui fournit grâce aux égalités : pour tout entier i, $f(e_i) = \varepsilon_i$ et $f(\varepsilon_i) = 0$, la formule : $0 = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot \varepsilon_i$.

Ceci est une combinaison linéaire nulle entre les vecteurs de la famille libre $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p)$: tous les λ_i sont nuls. Enfin, on obtient par la première combinaison linéaire : $\sum_{i=1}^{p} \mu_i \cdot \varepsilon_i = 0$ et tous les μ_i sont nuls.

La famille $(e_1, \cdots, e_p, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p)$ comptant $2p = 2\dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = \dim E$ vecteurs est libre donc est une base de E, que l'on note $\mathcal{B}$.

En posant h le seul endomorphisme défini sur la base $\mathcal{B}$ tel que pour tout entier i entre 1 et p : $h(e_i) = 0$ et $h(\varepsilon_i) = e_i$, on vérifie facilement que les applications linéaires $h \circ f + f \circ h$ et Id_E coïncident sur la base $\mathcal{B}$, donc partout.

Réciproquement, supposons que $f \circ f = 0$ et qu'il existe h dans $\mathcal{L}(E)$ tel que : $h \circ f + f \circ h = Id_E$.

Soit x dans $\operatorname{Im} f$. Il existe α dans E tel que : $x = f(\alpha)$. Ensuite, $f(x) = f \circ f(\alpha) = 0$, donc x appartient à $\operatorname{Ker} f$: $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$.

Soit x dans $\operatorname{Ker} f$. Alors, $h \circ f(x) + f \circ h(x) = x$, ou encore : $x = f(h(x))$, ce qui montre que x appartient à $\operatorname{Im} f$: $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$. ▲

Exercice 16.13

1. Soit φ une forme linéaire non nulle. L'ensemble image $\operatorname{Im} \varphi$ est un sous-espace non réduit à $\{0_{\mathbb{K}}\}$ de l'espace vectoriel $\mathbb{K}$ de dimension 1.

Par conséquent, la dimension de $\operatorname{Im} \varphi$ est supérieure à 1, donc est égale à 1 et par égalité des dimensions, $\operatorname{Im} \varphi = K$. Le théorème du rang appliqué à la forme linéaire φ fournit : $\dim E = \dim \operatorname{Ker} \varphi + 1$: l'espace $H = \operatorname{Ker} \varphi$ est un hyperplan de E.

Réciproquement, soit H un hyperplan de E, puis x un vecteur dans l'ensemble non vide $E \setminus H$. L'espace $H + \mathsf{Vect}\,(x)$ contient strictement H, donc $\dim H < \dim (H + \mathsf{Vect}\,(x))$, ou encore $\dim (H + \mathsf{Vect}\,(x)) \geq p$ et donc les espaces $H + \mathsf{Vect}\,(x)$ et E étant de même dimension, l'inclusion $H + \mathsf{Vect}\,(x) \subset E$ se transforme en une égalité. La formule de Grassmann pour $\dim (H + \mathsf{Vect}\,(x))$ montre que $H \cap \mathsf{Vect}\,(x) = \{0_E\}$ et finalement $H \oplus \mathsf{Vect}\,(x) = E$. Ensuite, soit $\mathcal{B}_H$ une base de H. La famille $(x, \mathcal{B}_H)$ forme une base de E. On pose l'application linéaire $\varphi : E \to \mathbb{K}$ telle que $\varphi(x) = 1_{\mathbb{K}}$ et pour tout vecteur y de la base $\mathcal{B}_H$, alors $\varphi(y) = 0_{\mathbb{K}}$. L'application φ est une forme linéaire non nulle telle que $\operatorname{Ker} \varphi = H$.

2. On suppose que la famille $(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$ forme une base de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. Soit x un vecteur non nul dans E, puis H un supplémentaire de l'espace $\mathsf{Vect}\,(x)$. Le sous-espace H est un hyperplan de E : il existe une forme linéaire non nulle φ telle que $\operatorname{Ker} \varphi = H$. Ainsi, $\varphi(x) \neq 0$. On pose : $\varphi = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \cdot \varphi_k$ la décomposition du vecteur φ selon la base $(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$. On en déduit :

$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \cdot \varphi_k(x) \neq 0$. Il est impossible que tous les nombres $\varphi_k(x)$ soient nuls : le p-uplet $\Phi(x)$ est non nul. Par contraposée, si x appartient à $\operatorname{Ker}\Phi$, alors $x = 0$: l'application Φ est injective, va d'un ensemble de dimension $\dim \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) = \dim E \times \dim \mathbb{K} = p \times 1 = p$, dans un espace de même dimension ($\dim \mathbb{K}^p = p$) : l'application linéaire Φ est un isomorphisme !
Réciproquement, supposons que la famille $(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$ soit liée. L'un des vecteurs de la famille est une combinaison linéaire des autres. Par exemple : $\varphi_p = \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k \cdot \varphi_k$. On en déduit pour tout x de E :
$\Phi(x) = \left(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_{p-1}(x), \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k \cdot \varphi_k(x)\right) = \sum_{k=1}^{p-1} \varphi_k(x) \cdot e_k$, avec e_k le p-uplet dont toutes les composantes sont nulles, sauf la k-ème valant 1 et la dernière valant λ_k. Pour tout x dans E, l'image $\Phi(x)$ appartient donc à $\mathsf{Vect}\,(e_1, \ldots, e_{p-1})$, sous-espace de dimension inférieure à $(p-1)$ (en fait égale à $(p-1)$) : l'espace image $\operatorname{Im}\Phi$ est donc strictement inclus dans $\mathbb{K}^p$ et l'application Φ n'est pas surjective. Ce n'est pas un isomorphisme.

▲

Exercice 16.14

1. Nous allons constater que lorsque nous traitons une suite arithmético-géométrique, comme c'est précisément ici le cas, eh bien nous faisons de la géométrie affine !
En effet, une solution particulière à l'équation $u_{n+1} = a \cdot u_n + b$, est la suite constante égale à $\lambda = \dfrac{b}{1-a}$.
Ensuite, si u est une suite vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = a \cdot u_n + b$, nous constatons qu'en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - \lambda$:

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \lambda = a \cdot u_n + b - (a \cdot \lambda + b) = a \cdot v_n.$$

Réciproquement, il est facile de voir que si u est une suite à valeurs complexes telle que la suite v est géométrique de raison a, alors la suite u vérifie $u_{n+1} = a \cdot u_n + b$.
En d'autres termes, l'ensemble des suites concerné est le sous-espace affine de dimension 1 passant par la suite constante égale à λ et dirigée par $\mathsf{Vect}\,((a^n)_{n\in\mathbb{N}})$.
2. On procède de la même façon :

- on trouve une solution particulière, ici la suite constante égale à 4 ;
- on étudie la différence $u - 4$, lorsque u est une solution de l'équation proposée dans l'énoncé. Lorsque u est une suite à valeurs complexes, la suite u vérifie l'équation de l'énoncé si et seulement si la suite $v = u - 4$ vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+2} = 2v_{n+1} + v_n.$$

cette dernière équation fait appel aux suites récurrentes linéaires d'ordre deux associées au polynôme $P(X) = X^2 - 2X - 1$ de racines $1 - \sqrt{2}$ et $1 + \sqrt{2}$.

En définitive, l'ensemble des suites u proposé forme le sous-espace affine de dimension deux passant par la suite constante égale à 4 et de direction $\mathsf{Vect}\left(\left((1-\sqrt{2})^n\right)_{n\in\mathbb{N}}, \left(1+\sqrt{2})^n\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)$.

▲

Chapitre 17
Matrices

UN MATHÉMATICIEN

Arthur Cayley est considéré comme l'inventeur des matrices ; c'est en tout cas lui qui le premier a défini les opérations d'addition et de multiplication matricielles. Ce mathématicien anglais, d'abord avocat, était pétri de talents ; polyglotte, il peignait des aquarelles, écrivait des romans et pratiquait l'escalade dans les Alpes. Ses travaux scientifiques ont permis une avancée notable de l'algèbre dans la deuxième moitié du XIXe siècle.

Un peu d'histoire

Au IIe siècle avant notre ère, on trouve en Chine, dans *Les neuf chapitres sur l'art mathématique*, des tableaux de nombres utilisés pour résoudre des systèmes d'équations linéaires. C'est le même problème qui amène Bézout et Vandermonde à fournir des méthodes de résolutions dépendant des coefficients. L'idée est alors venue de les présenter sous forme de tableau.

Au milieu du siècle suivant les mathématiciens anglais Arthur Cayley et James Sylvester comprennent l'importance de l'utilisation de tels tableaux. Le second leur donne le nom de *matrice* mais c'est le premier qui leur octroie un vrai statut en définissant des opérations et en les associant à des applications linéaires. Cayley présente ces notions dans un mémoire publié en 1858 et dans lequel sont démontrés d'importants théorèmes.

Objectifs

les incontournables

- Utiliser une représentation matricielle en algèbre linéaire :
  - construire la matrice représentative d'une application linéaire dans des bases ;
  - démontrer qu'une application linéaire est un isomorphisme ;
  - déterminer l'image et le noyau d'une application linéaire ;
  - démontrer qu'une famille de vecteurs est une base ;
  - savoir interpréter vectoriellement une application linéaire donnée par sa matrice ;
  - transformer la matrice d'une application linéaire à l'aide des formules de changement de bases.
- Savoir utiliser le rang et les opérations élémentaires :
  - Pour déterminer une base de l'image et du noyau ;
  - Pour démontrer qu'une famille de vecteurs est une base.

et plus si affinités

- Déterminer une base adaptée pour simplifier le calcul matriciel.
- Résoudre certaines équations polynomiales dans $\mathcal{M}(\mathbb{K})$.

Résumé de cours

Représentations matricielles en dimensions finies

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ dénote $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Représentation des familles de vecteurs

Définition : *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une base $\mathcal{E}$. La* ***matrice représentative*** $\mathsf{M}_{\mathcal{E}}(a) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ ***d'un vecteur*** *a de E est la matrice-colonne dont les coefficients sont les coordonnées de a dans la base $\mathcal{E}$. Plus généralement, on définit la* ***matrice*** $\mathsf{M}_{\mathcal{E}}(a_1, \ldots, a_p) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ***représentative d'une famille de p vecteurs*** *en rangeant leurs coordonnées dans la base $\mathcal{E}$ en colonnes.*

Proposition 17.1.— Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. L'application $\begin{array}{rccc} \Phi : & E & \to & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ & x & \mapsto & \mathsf{M}_{\mathcal{E}}(x) \end{array}$ qui à tout vecteur x de E_n associe sa matrice-colonne représentative est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Théorème 17.2.— Caractérisation matricielle des bases —. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soit $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_n)$ une famille de n vecteurs de E. Notons $A = \mathsf{M}_{\mathcal{E}}(a_1, \ldots, a_n)$. Alors

$$\boxed{\mathcal{A} \text{ est une base de } E \text{ si et seulement si } A \text{ est inversible}}$$

Représentation matricielle des applications linéaires

Définition : *Soit E_p et F_n des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies munis des bases $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_p)$ et $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_n)$. On définit la* ***matrice*** $\mathsf{M}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(a) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, ***représentative de*** *$a \in \mathcal{L}(E_p, F_n)$ dans les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ par* $\mathsf{M}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(a) = \mathsf{M}_{\mathcal{F}}(a(e_1), a(e_2), \ldots, a(e_n))$.

Remarque : la j-ième colonne de la matrice $\mathsf{M}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(a)$ est constituée des coordonnées du vecteur $a(e_j)$ dans la base $(f_1, \ldots, f_n)$.

Notation : *lorsque a est un endomorphisme de E_n, on peut prendre une seule base $\mathcal{E}$ au départ et à l'arrivée. En ce cas, on note simplement* $\mathsf{M}_{\mathcal{E}}(a)$ *à la place de* $\mathsf{M}_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(a)$.

Théorème 17.3.— Soit E_p et F_n des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies p et n. Fixons $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ des bases de E_p et F_n. Alors l'application $\begin{array}{rccc} \Psi : & \mathcal{L}(E_p, F_n) & \to & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ & a & \mapsto & \mathsf{M}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(a) \end{array}$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Remarque : ainsi une application linéaire entre espaces de dimensions finies est entièrement déterminée par sa matrice représentative relative à des bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$. Inversement, toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ représente dans les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ une unique application linéaire $a \in \mathcal{L}(E_p, F_n)$.

Théorème 17.4.— $\mathcal{L}(E_p, F_n)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension $n \times p$.

Calcul de l'image d'un vecteur, matrice représentative d'une composée

Théorème 17.5.— Soit E, F, G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies rapportés aux bases $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$. Étant donné $a \in \mathcal{L}(E,F)$, $b \in \mathcal{L}(F,G)$ et $x \in E$, on a :

- $\mathsf{M}_{\mathcal{F}}(a(x)) = \mathsf{M}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(a) \times \mathsf{M}_{\mathcal{E}}(x)$
- $\mathsf{M}_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(b \circ a) = \mathsf{M}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(b) \times \mathsf{M}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(a)$

Théorème 17.6.— Caractérisation matricielle des isomorphismes —. Soit E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de même dimension n, de bases respectives $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ et $a \in \mathcal{L}(E,F)$. On note $A = \mathsf{M}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(a)$. Alors :

a est un isomorphisme de E sur F si et seulement si A est inversible.

En ce cas $\mathsf{M}_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(a^{-1}) = A^{-1}$.

Formules de changement de bases

Définition : *Soit $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ deux bases d'un espace vectoriel de dimension finie E. On appelle* ***matrice de passage*** *de la base $\mathcal{E}$ vers la base $\mathcal{E}'$, et on note $P_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}$ la matrice représentative de $\mathcal{E}'$ dans la base $\mathcal{E}$. On a : $P_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'} = \mathsf{M}_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}') = \mathsf{M}_{\mathcal{E}',\mathcal{E}}(id_E)$*

Remarque : en particulier, $P_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}$ est inversible et $\left(P_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}\right)^{-1} = P_{\mathcal{E}'\to\mathcal{E}}$

Théorème 17.7.— Formules de changement de base —. Soit E, F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, $\mathcal{E}$,$\mathcal{E}'$ deux bases de E, $\mathcal{F}$,$\mathcal{F}'$ deux bases de F, $P = P_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}$ et $Q = P_{\mathcal{F}\to\mathcal{F}'}$.

- Soit $x \in E$. On note $X = \mathsf{M}_{\mathcal{E}}(x)$, $X' = \mathsf{M}_{\mathcal{E}'}(x)$. Alors $X' = P^{-1} \times X$.
- Soit $a \in \mathcal{L}(E)$. On note $A = \mathsf{M}_{\mathcal{E}}(a)$, $A' = \mathsf{M}_{\mathcal{E}'}(a)$. Alors $A' = P^{-1} \times A \times P$.
- Soit $a \in \mathcal{L}(E,F)$. On note $A = \mathsf{M}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(a)$, $A' = \mathsf{M}_{\mathcal{E}',\mathcal{F}'}(a)$. Alors $A' = Q^{-1} \times A \times P$.

Définition : *$A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites* ***semblables*** *s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $B = P^{-1} \times A \times P$.*

Remarque : les matrices représentatives d'un endomorphisme dans des bases différentes sont semblables. Inversement, deux matrices A et B sont semblables si elles représentent le même endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ dans des bases différentes.

■ Noyau et image d'une matrice

Application linéaire a canoniquement associée à une matrice

Proposition-Définition 17.8.— Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $a : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ l'application définie par

$\forall (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p,\ a(x_1, \ldots, x_p) = (y_1, \ldots, y_n)$,
où les coefficients $y_1, \ldots, y_n$ de l'image sont obtenus grâce à la relation matricielle ci-contre.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Alors $a : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ est une application linéaire, dite **canoniquement associée** à A.

Noyau et image d'une matrice

Proposition-Définition 17.9.— Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice, $a \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ l'application linéaire canoniquement associée. Par définition, l'image et le noyau de A sont ceux de a.

- $\operatorname{Ker} A \subset \mathbb{K}^p$ est le sous-espace vectoriel des solutions du système linéaire homogène $A \times X = 0$.
- $\operatorname{Im} A \subset \mathbb{K}^n$ est le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $a_1, a_2, \ldots, a_n$, canoniquement associés aux colonnes de A.

En appliquant le **théorème du rang** à l'application canoniquement associée à une matrice, il vient :

Théorème 17.10.— Formule du rang —. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors

$$\boxed{p = \dim(\operatorname{Ker} A) + \dim(\operatorname{Im} A)}$$

■ Rang d'une matrice

Théorème-Définition 17.11.— Rang d'une matrice —. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice à p colonnes notées $A_1, \ldots, A_p$. Notons $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ les vecteurs canoniquement associés aux colonnes de A et $a \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ l'application linéaire canoniquement associée à A. Alors $\operatorname{Rg} a = \operatorname{Rg}(a_1, a_2, \ldots, a_p)$. On pose

$$\boxed{\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg} a = \operatorname{Rg}(a_1, a_2, \ldots, a_p)}$$

Calcul du rang

Proposition 17.12.— Invariance du rang par opérations élémentaires —. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On ne change pas le rang de la matrice A lorsqu'on effectue une opération élémentaire :

- échanger deux lignes (resp. deux colonnes) de A ;
- remplacer une ligne (resp. colonne) de A par un multiple non nul de cette ligne (resp. colonne) ;
- ajouter à une ligne (resp. colonne) un multiple d'une autre ligne (resp. colonne).

Proposition 17.13.— Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors A et sa transposée A^T ont même rang.

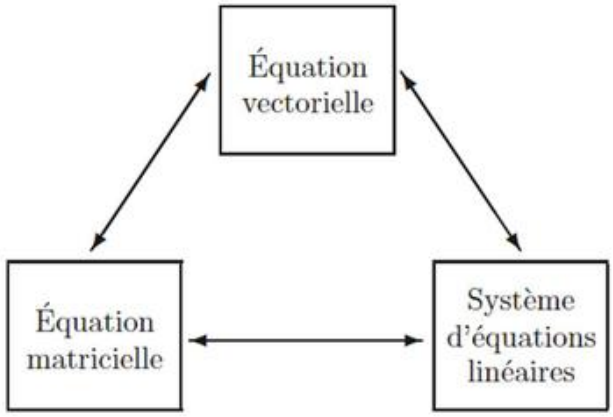
Rang et matrices inversibles

Théorème 17.14.— Caractérisations des matrices carrées inversibles —. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre n. Les assertions suivantes sont équivalentes :

$$\Updownarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} \bullet\ A \text{ est inversible} \\ \bullet\ \operatorname{Ker} A \text{ est réduit au sous-espace nul : } \operatorname{Ker} A = \{0_{\mathbb{K}^n}\} \\ \bullet\ \text{Les colonnes de } A \text{ engendrent } \mathbb{K}^n : \operatorname{Im} A = \mathbb{K}^n \\ \bullet\ A \text{ est de rang maximal } n : \operatorname{Rg} A = n \end{array}}$$

Méthodes

Nombre de questions d'algèbre linéaire dans $\mathbb{K}^n$ se traduisent par des systèmes d'équations linéaires, qui peuvent s'écrire sous la forme d'équation matricielle. L'existence de bases en dimension finie permet de généraliser ces constructions et nous retrouvons les trois points de vue :



Matrices et familles de vecteurs

Représentation matricielle d'une famille de vecteurs

Méthode 17.1.— Comment construire la matrice d'une famille de vecteurs

Soit $\mathcal{E}$ une base de E_n et $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_p)$ une famille de p vecteurs de E_n, pour déterminer la matrice $A = \mathsf{M}_{\mathcal{E}}(\mathcal{A})$, représentative de $\mathcal{A}$ dans la base $\mathcal{E}$:

1 On décompose $a_1, \ldots, a_p$ dans la base $\mathcal{E}$ $\begin{cases} a_1 = a_{1,1} \cdot e_1 + \cdots + a_{n,1} \cdot e_n \\ \vdots \\ a_p = a_{1,p} \cdot e_1 + \cdots + a_{n,p} \cdot e_n \end{cases}$

2 On range les coordonnées de ces vecteurs **en colonnes** pour avoir la matrice

$$A = \mathsf{M}_{\mathcal{E}}(a_1, \ldots, a_p) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

Remarque : inversement, pour interpréter une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ comme matrice représentative d'une famille de vecteurs dans E, il peut être utile de retenir le schéma suivant :

$$\mathsf{M}_{\mathcal{E}}(a_1, \ldots, a_p) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & & a_p \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,p} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ e_1 \\ e_2 \\ \\ e_n \end{array}$$

Ainsi dans la première colonne, se trouvent rangées les coordonnées du vecteur a_1 dans la base $\mathcal{E} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$; dans la deuxième colonne on trouve les coordonnées de a_2 dans la base $\mathcal{E}$, etc.

Soit $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_n)$ une famille de n vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension n. Pour montrer que $\mathcal{A}$ est une base de E, on peut utiliser sa matrice représentative dans une base de E.

❑ Méthode 17.2.— Comment démontrer qu'une famille est une base
Soit $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_n)$ une famille de n vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension n. Pour montrer que $\mathcal{A}$ est une base de E :
$\boxed{1}$ On construit la matrice représentative de $\mathcal{A}$ dans une base $\mathcal{B}$ de E : $A = \mathsf{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$.
$\boxed{2}$ On montre que A est inversible et on conclut à l'aide du **théorème 17.2**.

Exemple : soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On pose
$$\varepsilon_1 = e_1 + e_2 + e_3, \varepsilon_2 = 2e_1 - e_2 - e_3 \text{ et } \varepsilon_3 = -e_1 + 2 \cdot e_2 - e_3$$

Montrons que $\mathcal{A} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de E en utilisant les outils du calcul matriciel.
$\boxed{1}$ Construisons la matrice représentative de $\mathcal{A}$ dans la base $\mathcal{B}$:
$$\mathsf{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) = M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{2}$ On vérifie que $\mathrm{Rg}\,(M) = 3$. Par conséquent M est inversible. D'après la **caractérisation matricielle des bases** (**théorème 17.2**), ceci prouve que $\mathcal{A}$ est une base de E.

Remarque : plus généralement, l'étude du système $AX = 0_{n,1}$ (ou $AX = Y$), avec $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice d'une famille $\mathcal{A}$ de p vecteurs de E_n, permet de savoir si $\mathcal{A}$ est libre (ou génératrice).

■ Matrices et applications linéaires

Représentation matricielle d'une application linéaire

Étant donné deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E_p et F_n de bases respectives $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_p)$ et $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_n)$, on sait qu'une application linéaire $a \in \mathbb{K}(E_p, F_n)$ est entièrement déterminée par les images des vecteurs de la base $\mathcal{E}$. Ces p vecteurs, $a(e_1), \ldots, a(e_p)$ appartenant à F_n sont eux-mêmes entièrement déterminés par leurs coordonnées dans la base $\mathcal{F}$. La matrice représentative de a est formée de ces coordonnées. Plus précisément :

❑ Méthode 17.3.— Comment construire la matrice d'une application linéaire
Soit $a \in \mathcal{L}(E_p, F_n)$, $\mathcal{E}$ une base de E_p et $\mathcal{F}$ une base de F_n. Pour déterminer la matrice $A = \mathsf{M}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(a)$ représentative de a connaissant les images des vecteurs de la base, dans ces bases

$\boxed{1}$ On décompose $a(e_1)$, …, $a(e_p)$ dans $\mathcal{F}$ $\begin{cases} a(e_1) = a_{1,1} \cdot f_1 + a_{2,1}\, f_2 + \ldots + a_{n,1}\, f_n \\ a(e_2) = a_{1,2}\, f_1 + a_{2,2}\, f_2 + \ldots + a_{n,2}\, f_n \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a(e_p) = a_{1,p}\, f_1 + a_{2,p}\, f_2 + \ldots + a_{n,p}\, f_n \end{cases}$

$\boxed{2}$ On range les coordonnées de ces p vecteurs de F en colonnes
$$A = \mathsf{M}_{\mathcal{F}}(a(e_1), \ldots, a(e_p)) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

En pratique : vous devez savoir construire la matrice représentative d'une application linéaire dans des bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$.

Inversement, il est indispensable de savoir interpréter une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ comme matrice représentative d'une telle application. Retenez le schéma ci-contre.

$$\mathsf{M}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & & f(e_p) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ f_1 \\ f_2 \\ \\ f_n \end{array}$$

Exemple : soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et f l'application définie par $\forall P \in E,\ f(P) = (2X+1)P + (1-X^2)P'$. On vérifie aisément que f est un endomorphisme de E. Pour déterminer la matrice représentative de f dans la base canonique $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$, on calcule les images de ces vecteurs

$$\begin{array}{lclcl} f(1) & = & 2X+1 & = & 1 \cdot P_0 + 2 \cdot P_1 + 0 \cdot P_2 \\ f(X) & = & X^2+X+1 & = & 1 \cdot P_0 + 1 \cdot P_1 + 1 \cdot P_2 \\ f(X^2) & = & X^2+2X & = & 0 \cdot P_0 + 2 \cdot P_1 + 1 \cdot P_2 \end{array}$$

En rangeant en colonnes les coordonnées, il vient $\mathsf{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Mise en œuvre : exercice 17.5.

❑ Méthode 17.4.— Comment déterminer la matrice d'une composée

Soit $a : E \to F$, $b : F \to G$ des applications linéaires définies sur des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels rapportés à des bases $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$. On obtient directement la matrice représentative de $b \circ a$ à partir de celles de a et b.

[1] Déterminer $A = \mathsf{M}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(a)$, $B = \mathsf{M}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(b)$.

[2] On a $\mathsf{M}_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(b \circ a) = B \times A$.

Remarque : en particulier, si $a \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme de E, la matrice représentative dans une base $\mathcal{E}$ de E de $a^n : a \circ a \circ \cdots \circ a$ est la puissance n-ième A, matrice représentative de a dans la base $\mathcal{E}$.

Exemple : on se place dans le plan vectoriel $\vec{\mathcal{P}}$ usuel, rapporté à une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on note $Rot_\theta : \vec{\mathcal{P}} \to \vec{\mathcal{P}}$ la rotation d'angle θ.

[1] Déterminons la matrice R_θ représentative de Rot_θ dans la base $\mathcal{B}$. On a :

$$Rot_\theta(\vec{\imath}) = \cos(\theta) \cdot \vec{\imath} + \sin(\theta) \cdot \vec{\jmath} \qquad Rot_\theta(\vec{\imath}) = -\sin(\theta) \cdot \vec{\imath} + \cos(\theta) \cdot \vec{\jmath}$$

On en déduit que $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

[2] Déterminons la matrice représentative de la composée de deux rotations d'angles θ et φ. Pour cela effectuons le produit matriciel $R_\theta \times R_\varphi$. En utilisant les formules d'addition pour cos et sin, il vient :

$$R_\theta \times R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\theta+\varphi) & -\sin(\theta+\varphi) \\ \sin(\theta+\varphi) & \cos(\theta+\varphi) \end{pmatrix} = R_{\theta+\varphi}$$

Ainsi, la composée de deux rotations vectorielles est une rotation vectorielle.

Mise en œuvre : exercice 17.7 et **exercice 17.8.**

Étude matricielle d'une application linéaire

❑ Méthode 17.5.— Comment utiliser la matrice d'une application linéaire
Lorsque la matrice représentative d'une application linéaire est connue, le calcul vectoriel se ramène à du calcul matriciel. Par ce biais, on pourra :

- calculer l'image d'un vecteur par l'application linéaire a ;
- vérifier une relation polynomiale ;
- déterminer si a est un isomorphisme et déterminer son isomorphisme réciproque.

Exemple : reprenons l'exemple de l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par $\forall P \in E,\ f(P) = (2X+1)P + (1-X^2)P'$. Montrons que f est un automorphisme de E et déterminons son isomorphisme réciproque.

• La matrice $M = \mathsf{M}_{\mathcal{B}}(f)$ est inversible et on montre à l'aide du point de vue SEL ou de l'algorithme de Gauss-Jordan (**méthode 12.3** ou **méthode 12.4**) que

$$M^{-1} = \mathsf{M}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

• En conséquence $f \in \mathrm{GL}(E)$ est un automorphisme de E et la matrice représentative de f^{-1} dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est M^{-1}.

• On en déduit l'image d'un polynôme $P(X) = aX^2 + bX + X$ par f^{-1} en effectuant le produit matriciel $M^{-1} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Il en résulte que :

$$f^{-1}(aX^2 + bX + c) = (a+b-2c)X^2 + (2a-b+2c)X - (2a-b-c)$$

Mise en œuvre : exercice 17.4 et **exercice 17.5**.

Étude de l'endomorphisme canoniquement associée à une matrice carrée

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée à coefficients dans $\mathbb{K}$. On note $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A.

❑ Méthode 17.6.— Comment déterminer image, noyau et rang de f

$\boxed{1}$ On commence par l'étude du noyau. $\operatorname{Ker} f$ est l'ensemble des solutions du système d'équations linéaires homogène

$$A \times X = O_{n,1} \qquad \text{d'inconnue } X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

On résout ce système homogène à l'aide de l'algorithme de Gauss-Jordan. On en déduit une base de $\operatorname{Ker} f$, et donc sa dimension.

$\boxed{2}$ À l'aide de la **formule du Rang**, on en déduit le rang de f : $\operatorname{Rg}(f) = n - \dim(\operatorname{Ker} f)$.

$\boxed{3}$ On sait que les vecteurs de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associés aux colonnes de la matrice A forment une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$. Connaissant en outre $\operatorname{Rg}(f) = \dim \operatorname{Im} f$, on peut aisément extraire une base de $\operatorname{Im} f$ de cette famille génératrice.

Exemple : soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Déterminons le rang, l'image et le noyau de f.

$\boxed{1}$ $\operatorname{Ker} f$. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$(x,y,z) \in \operatorname{Ker} f \iff \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ 3x - 2y - 4z = 0 \\ -2x + y + 3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -1x + y + z = 0 \\ \quad\quad + y - z = 0 \\ \quad\quad - y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -1x + y + z = 0 \\ \quad\quad 1y - z = 0 \\ \quad\quad\quad 0 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 2z \\ y = z \end{cases}$$

Ainsi $\operatorname{Ker} f = \{(2z, z, z)\ ;\ z \in \mathbb{R}\} = \mathsf{Vect}\,(2,1,1)$. Comme $u = (2,1,1)$ est non nul, il forme une base de $\operatorname{Ker} f$.

$\boxed{2}$ D'après la formule du rang, il s'ensuit que $\operatorname{Rg} f = 2$.

$\boxed{3}$ On sait que $\operatorname{Im} f = \mathsf{Vect}\,\{(-1,3,-2),(1,-2,1),(1,-4,3)\}$. En particulier, $v = (-1,3,-2)$ et $w = (1,-2,1)$ forment une famille libre (car ces deux vecteurs sont visiblement non colinéaires) de $\operatorname{Im} f$. Il s'agit donc d'une base de $\operatorname{Im}(f)$.

Mise en œuvre : exercice 17.15.

■ Rang d'une matrice et applications

Différentes notions de rang

Au fil des chapitres d'algèbre linéaire, nous avons vu plusieurs notions de rang. Rappelons-les ici pour la convenance du lecteur :

- Soit $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_p)$ une famille de p vecteurs de E_n. On appelle rang de $\mathcal{A}$, le nombre entier, noté $\operatorname{Rg}(\mathcal{A})$, égal à la dimension du sous-espace vectoriel de E_n engendré par $\mathcal{A}$.

$$\operatorname{Rg}(\mathcal{A}) = \dim \mathsf{Vect}\,(a_1, \ldots, a_n)$$

- Soit $a \in \mathcal{L}(E_p, F_n)$ une application linéaire E_p vers F_n. On appelle rang de a, le nombre entier, noté $\operatorname{Rg}(a)$, égal à la dimension de l'image de a.

$$\operatorname{Rg}(a) = \dim \operatorname{Im}(a)$$

- Lorsque $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est une matrice, elle est canoniquement associée à une application linéaire $a \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ et également à une famille de p vecteurs de $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_p)$. En ce cas, d'après le **théorème-définition 17.11**, on a

$$\operatorname{Rg}(A) = \operatorname{Rg}(a) = \operatorname{Rg}(\mathcal{A})$$

- Enfin, si (S) est un système de n équations linéaires à p inconnues, (S) $AX = B$, alors le rang du système (S) est celui de la matrice A.

Calcul du rang d'une famille de vecteurs, d'une application linéaire

Par définition, le rang d'un système d'équations linéaires est celui de la matrice des coefficients. Plus généralement, tout calcul de rang se ramène à celui d'une matrice :

❑ Méthode 17.7.— Comment calculer le rang d'une famille de vecteurs

$\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_p)$ une famille de p vecteurs de E_n. Pour calculer le rang de $\mathcal{A}$:

1 Déterminer la matrice A représentative de $\mathcal{A}$ dans une base $\mathcal{E}$ de E_p.

2 Calculer le rang r de A grâce à la **méthode 17.9**.

3 Conclure $\mathrm{Rg}\,(\mathcal{A}) = \mathrm{Rg}\,(A) = r$.

❑ Méthode 17.8.— Comment calculer le rang d'une application linéaire

Soit $a \in \mathcal{L}(E_p, F_n)$ une application linéaire de E_p vers F_n. Pour calculer le rang de a :

1 Déterminer la matrice A représentative de a relative à des bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ de E_p et F_n.

2 Calculer le rang r de A grâce à la **méthode 17.9**.

3 Conclure $\mathrm{Rg}\,(a) = \mathrm{Rg}\,(A) = r$.

Calcul du rang d'une matrice par la méthode de Gauss

Grâce à l'utilisation répétée de la **proposition 17.12** sur les lignes et/ou sur les colonnes, la méthode du **pivot de Gauss** permet d'échelonner une matrice de proche en proche en conservant le rang à chaque étape. Le rang de A est alors égal au rang de sa **réduite de Gauss** E :

❑ Méthode 17.9.— Comment calculer le rang de A par la méthode de Gauss

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1 À l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes (ou sur les colonnes), on échelonne A de proche en proche jusqu'à obtenir sa réduite de Gauss, il s'agit d'une matrice échelonnée E de la forme :

$$E = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{1,1}} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,r} & \cdots & a_{1,p} \\ 0 & \boldsymbol{a_{2,2}} & \cdots & a_{2,r} & \cdots & a_{2,p} \\ & 0 & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \boldsymbol{a_{r,r}} & \cdots & a_{r,p} \\ \vdots & & & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cdots & \cdots & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad E = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{1,1}} & 0 & & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & \boldsymbol{a_{2,2}} & \ddots & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & & \vdots \\ a_{r,1} & a_{r,2} & \cdots & \boldsymbol{a_{r,r}} & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,r} & 0 & \cdots 0 \end{pmatrix}$$

où les coefficients diagonaux $\boldsymbol{a_{i,i}}$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$ sont **non nuls**.

2 Comme le rang est préservé, on peut alors conclure $\mathrm{Rg}\,(A) = \mathrm{Rg}\,(E) = r$.

Notation : *On note $A \sim B$ lorsque B se déduit de A par opérations élémentaires, sur les lignes ou les colonnes.*

Exemple : $\mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$

Mise en œuvre : exercice 17.14 et **exercice 17.15**.

■ Changements de bases

Soit E_p, F_n des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies respectives p et n et $a \in \mathcal{L}(E_p, F_n)$ une application linéaire. À chaque choix de bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ des espaces de départ et d'arrivée, correspond une matrice représentative $A = \mathsf{M}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(a)$. On a tout intérêt à choisir des bases $\mathcal{E}', \mathcal{F}'$ adaptées à la géométrie pour avoir une matrice représentative $A' = \mathsf{M}_{\mathcal{E}',\mathcal{F}'}(a)$ la plus simple possible.

Déterminer une matrice de changement de base

❑ Méthode 17.10.— Comment déterminer une matrice de passage

Soit E_p un espace vectoriel rapporté à une base $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_p)$. On considère une famille $\mathcal{E}' = (e'_1, ..., e'_p)$ une famille de p vecteurs de E_p (Si $\mathcal{E}'$ ne compte pas p vecteurs, aucune chance qu'il s'agisse d'une base). Pour vérifier que $\mathcal{E}'$ est une base de E_p et déterminer la matrice de passage $P_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}$:

1. Construire la matrice représentative de $\mathcal{E}'$ dans la base $\mathcal{E}$. On note $P = \mathsf{M}_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}')$.
2. On vérifie que P est inversible.
3. On conclut que $\mathcal{E}'$ est une base de E_p et $P_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'} = P$.

Exemple : plaçons-nous dans $E = \mathbb{R}^3$ rapporté sa base canonique $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$. Considérons la famille $\mathcal{E}' = (e_1 + e_2 + e_3, -e_1 + e_2, -e_1 + e_3)$ de sorte que

$$\begin{aligned} e'_1 &= (1,1,1) \\ e'_2 &= (-1,1,0) \\ e'_3 &= (-1,0,1) \end{aligned}$$

1. La matrice représentative de $\mathcal{E}'$ dans la base canonique est $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. On vérifie que P est inversible par la méthode de son choix.
3. Par conséquent (**théorème 17.2**), $\mathcal{E}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et :

$$P_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'} = P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mise en œuvre : exercice 17.10 et **exercice 17.12**.

Utiliser les formules de changements de bases

❑ Méthode 17.11.— Comment déterminer la matrice $\mathsf{M}_{\mathcal{E}',\mathcal{F}'}(a)$

1. On détermine les matrices de passage de $P = P_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}$ et $Q = P_{\mathcal{F}\to\mathcal{F}'}$.
2. On calcule ensuite Q^{-1} par une méthode d'inversion de matrice.
3. Finalement $A' = Q^{-1} \times A \times P$.

Remarque : cette méthode inclut le cas particulier important où $a \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme.

Exemple : soit la matrice $a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $A = \mathsf{M}_{\mathcal{B}}(a) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Autrement dit, A est la matrice représentative de a dans la base canonique $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$. Considérons la nouvelle base $\mathcal{E}' = (e_1 + e_2 + e_3, -e_1 + e_2, -e_1 + e_3)$.

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ La matrice de passage de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{E}'$ et son inverse sont données par

$$P = P_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = P_{\mathcal{E}' \to \mathcal{E}} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{3}$ D'après les formules de changements de base pour un endomorphisme, on a $A' = \mathsf{M}_{\mathcal{B}'}(a) = P^{-1} \times A \times P$. Or

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Finalement, la matrice représentative de a dans la nouvelle base est la matrice diagonale $A' = \mathrm{Diag}(4, 1, 1)$.

Mise en œuvre : exercice 17.10.

Déterminer une base connaissant la matrice représentative dans cette base

Inversement, étant donné un endomorphisme d'un espace vectoriel, il arrive que l'on demande de construire une base $\mathcal{B}'$ de E pour que sa matrice représentative dans la base $\mathcal{B}'$ ait une forme spéciale. En ce cas, la marche à suivre est la suivante :

❑ **Méthode 17.12.— Comment déterminer une base de E pour que $\mathsf{M}_{\mathcal{E}}(a) = A'$.**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. On considère $a \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E, $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour montrer l'existence d'une base $\mathcal{B}' = (\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n)$ telle que $\mathsf{M}_{\mathcal{B}'}(a) = A'$:

- **Analyse :** On suppose qu'une telle base existe. En interprétant les colonnes de A', on en déduit que $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$ vérifient un système d'équations linéaires vectorielles, que l'on résout pour obtenir $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$.
- **Synthèse :** On vérifie que
  - $\mathcal{B}' = (\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n)$ est une base de E ;
  - $\mathsf{M}_{\mathcal{B}'}(a) = A'$.

Exemple : soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel rapporté à une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. On considère l'endomorphisme a de E défini par sa matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$: $A = \mathsf{M}_{\mathcal{B}}(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminons une base $\mathcal{B}'$ de E telle que $\mathsf{M}_{\mathcal{B}'}(a) = A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

■ **Analyse :** Supposons qu'une telle base $\mathcal{B}' = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ existe. En ce cas, $a(\epsilon_1) = 0_E, a(\epsilon_2) = \epsilon_1, a(\epsilon_3) = 0_E$. Ainsi, visiblement $\mathrm{Ker}\,(a) = \mathsf{Vect}\,(\epsilon_1, \epsilon_3)$ et $\mathrm{Im}\,(a) = (\epsilon_1)$.

• Or on détermine aisément l'image et le noyau de a à l'aide de sa matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$. En effet, on sait que $\mathrm{Im}\,(a) = \mathsf{Vect}\,(a(e_1), a(e_2), a(e_3))$. Comme $a(e_1) = a(e_2) = -a(e_3) = e_1 - 3e_2 - 2e_3$. On en déduit que $\mathrm{Im}\,(a) = (e_1 - 3e_2 - 2e_3)$. En particulier $\mathrm{Rg}\,(a) = 1$ et d'après la **formule du rang**, il en résulte que $\dim \mathrm{Ker}\,(a) = 2$. Des relations $a(e_1) = a(e_2)$ et $a(e_1) = -a(e_3)$ d'autre part, on tire que $e_1 - e_2$ et $e_1 + e_3$ appartiennent au noyau. Comme ces deux vecteurs sont non colinéaires, ils forment une (famille libre maximale donc une) base de $\mathrm{Ker}\,(a)$.

• On va donc prendre pour ϵ_1 un vecteur non nul de l'image : $\epsilon_1 = e_1 - 3e_2 - 2e_3$. Pour ϵ_2, on prendra un antécédent de ϵ_1 par a. Par exemple $\epsilon_2 = e_1$ convient. Enfin, on complète notre famille avec un vecteur du noyau, par exemple $\epsilon_3 = e_1 + e_3$.

■ **Synthèse :** Posons $\epsilon_1 = e_1 - 3e_2 - 2e_3, \epsilon_2 = e_1, \epsilon_3 = e_1 + e_3$. Montrons que $\mathcal{B}' = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ forme une base de E. Pour vérifier cela, considérons la matrice représentative de cette famille par rapport à la base $\mathcal{B}$. On a

$$\mathsf{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En échelonnant cette matrice, par ligne ou par colonne, on vérifie qu'elle est de rang maximal 3. En conséquence, $\mathsf{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ est inversible, ce qui prouve que $\mathcal{B}'$ est une base de E. Enfin, construisons la matrice représentative de a dans cette nouvelle base. On applique la **méthode 17.3**. Il vient $\mathsf{M}_{\mathcal{B}'}(a) = A'$.

Mise en œuvre : exercice 17.13

Vrai/Faux

Dans les questions ci-dessous, E_n, désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

	Vrai	Faux
1. Soit $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ des bases de E_n, on a $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \mathsf{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \mathsf{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(id_E)$	☐	☐
2. Soit $f \in \mathcal{L}(E_n)$. Si $\mathsf{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = I_n$ alors $f = id_E$.	☐	☐
3. La matrice représentative d'un isomorphisme n'est pas toujours inversible car elle peut ne pas être carrée.	☐	☐
4. Soit A, B deux matrices carrées d'ordre n. Si A et B sont semblables, alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, A^p et B^p le sont aussi.	☐	☐
5. Soit A, B deux matrices carrées d'ordre n. Si A et B sont semblables, alors elles sont équivalentes.	☐	☐
6. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors $\mathrm{Rg}\,(A) \leqslant \min\{n, p\}$	☐	☐
7. On ne change pas le rang d'une matrice en échangeant deux de ses colonnes.	☐	☐
8. On ne change pas le rang d'une matrice en remplaçant une ligne par une combinaison linéaire des autres lignes.	☐	☐
9. Toute matrice carrée est équivalente à une matrice diagonale.	☐	☐
10. Soit $\mathcal{A}$ une famille de p vecteurs de E_n. Si $\mathrm{Rg}\,(\mathcal{A}) = n$, alors $\mathcal{A}$ est génératrice.	☐	☐

Énoncé des exercices

Matrices et familles de vecteurs

Exercice 17.1 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On pose $\varepsilon_1 = e_2 + 2 \cdot e_3$, $\varepsilon_2 = e_3 - e_1$ et $\varepsilon_3 = e_1 + 2 \cdot e_3$.

1. Déterminer la matrice représentative de $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ dans la base $\mathcal{B}$.

2. Montrer que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de E.

Exercice 17.2 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On pose $\varepsilon_1 = e_1 + 2 \cdot e_2 + 2 \cdot e_3$, $\varepsilon_2 = e_2 + e_3$. Montrer que la famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est libre, puis la compléter en une base de E.

Exercice 17.3 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^\star$ et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On pose pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\varepsilon_i = e_1 + \cdots + e_i$

1. Déterminer la matrice représentative de $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ dans la base $\mathcal{B}$.

2. Montrez que $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ est une base de E.

3. Exprimer en fonction de $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées du vecteur $x = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Matrices et applications linéaires

Exercice 17.4 :

1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x, y, z) = (2x - y + z, -x + y, x - z)$.

a. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice représentative de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

b. Montrer que f est bijective et déterminez f^{-1}.

2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et $\varphi : E \to E$ l'application définie pour tout $x = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + x_3 \cdot e_3$, par :

$$\varphi(x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + x_3 \cdot e_3) = (2x_1 - x_2 + x_3) \cdot e_1 + (-x_1 + x_2) \cdot e_2 + (x_1 - x_3) \cdot e_3.$$

Démontrer que φ est un automorphisme de E et déterminer son isomorphisme réciproque.

Exercice 17.5 : Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. À tout polynôme $P(X) \in E$, on associe

$$\varphi(P)(X) = (X + 1)P'(X) + P(X)$$

1. Vérifier que φ est un endomorphisme de E et déterminer sa matrice représentative M dans la base canonique de E.

2. Démontrer que M est inversible et calculer M^{-1}.

3. En déduire que φ est un automorphisme et expliciter φ^{-1}.

Exercice 17.6 : Dans $E = \mathbb{R}_3[X]$, on considère $\varphi : P \mapsto (X^2 - 1)P'' + 2XP'$.
Déterminer la matrice φ dans la base canonique de E. En déduire $\operatorname{Ker} \varphi$ et $\operatorname{Im} \varphi$.

Exercice 17.7 : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme canoniquement associé à $A = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.
Montrer que f est un projecteur et donner ses éléments caractéristiques.

Exercice 17.8 : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel rapporté à une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ l'endomorphisme de E déterminé par sa matrice représentative M dans la base $\mathcal{B}$, définie ci-contre.
Montrer que f est une symétrie vectorielle et préciser sa base E_1 et sa direction E_2. Déterminer sa matrice représentative dans une base adaptée à la décomposition $E = E_1 \oplus E_2$.

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 17.9* : Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$ et $f(P)$ est le reste de la division euclidienne de AP par B, où $A = X^3 - X^2 - X + 2$ et $B = X^3 - 3X^2 + 2X$.

1. Montrer que f définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la matrice M de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Montrer qu'il existe un unique triplet de polynômes (P_0, P_1, P_2) de $\mathbb{R}_2[X]^3$ tels que $P_i(k) = 1$ si $i = k$ et $P_i(k) = 0$ si $i \neq k$ pour i et k entiers variant de 0 à 2.
4. Montrer que (P_0, P_1, P_2) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et déterminer les composantes de P dans cette base en fonction de $P(0), P(1)$ et $P(2)$.
5. Déterminer la matrice de f dans cette base.

■ Changements de base

Exercice 17.10 : Soit $E = \mathbb{R}^3$, rapporté à sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et f, l'endomorphisme de E canoniquement associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 14 & -10 & 4 \\ 16 & -10 & 3 \end{pmatrix}$$

On considère la famille $\mathcal{B}' = (e_1 + 2e_2 + e_3,\ e_1 + 2e_2 + 2e_3,\ e_2 + 2e_3)$.

1. Vérifier que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et expliciter la matrice de changement de base $P = P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$.
2. Écrire $\mathsf{M}_{\mathcal{B}'}(f)$.

Exercice 17.11 : Commutant d'une matrice —. On s'intéresse ici à l'ensemble $\mathcal{C}_A$ des matrices qui commutent avec la matrice A. On reprend les notations de l'**exercice 17.10**.

1. Montrer que $\mathcal{C}_A$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $M \in \mathcal{C}_A$ si et seulement si $DN = ND$, où $N = P^{-1}M\,P$ et $D = P^{-1}A\,P$.
3. Montrer que $DN = ND$ si et seulement si N est une matrice diagonale.
4. En déduire que $\mathcal{C}_A$ est de dimension 3 et vérifier que (I_3, A, A^2) est une base de $\mathcal{C}_A$.

Exercice 17.12 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ associé canoniquement à A.

1. Déterminer une base de $\operatorname{Ker}(f - id)$ et de $\operatorname{Ker}(f - 2id)$.
2. En déduire une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice B de f est diagonale.
3. Calculer B^n puis A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 17.13* : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ l'endomorphisme canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Rg} f$.

2. Déterminer une base de $\operatorname{Ker}(f^2)$ et une base de $\operatorname{Ker}(f-id)^2$. Montrer que ces deux sous-espaces sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

3. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ dans laquelle la matrice représentative de f est égale à la matrice triangulaire ci-contre. $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Nb : on choisira les vecteurs $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_4$ de sorte que leurs coordonnées dans la base canonique appartiennent à $\{-1, 0, 1\}$.

4. Déterminer la matrice de passage P de la base canonique vers la base $\mathcal{B}'$ et calculer P^{-1}.

5. Calculer pour tout entier naturel T^n puis A^n.

■ Calcul du rang

Exercice 17.14 : Déterminer le rang des familles de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivantes :

1. $x_1 = (1,1,1,1), x_2 = (1,-1,1,-1), x_3 = (1,0,1,1)$

2. $x_1 = (1,1,0,1), x_2 = (1,-1,1,0), x_3 = (2,0,1,1), x_4 = (0,2,-1,1)$

Exercice 17.15 : En utilisant des opérations élémentaires sur les colonnes, déterminer le rang des applications linéaires canoniquement associées aux matrices suivantes. En déduire une base de leur image et de leur noyau.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 17.16 : Calculer le rang de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & a & 2 \\ 2 & a & 2 & 3 \end{pmatrix}$, où $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 17.17* : Montrer que la matrice carrée d'ordre n, $A = (\sin(i+j))$ est de rang au plus 2.

D'après CCINP option PC

■ Équations dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Exercice 17.18* : Déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ telles que $M^2 = 0_3$.

Exercice 17.19 : Soit (E) : $X^2 + X = A$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On considère f et φ les endomorphismes associés canoniquement respectivement à A et X.

1. Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$ et une base de $\operatorname{Ker} f$.

2. Soit X vérifiant (E). En notant que A n'est pas inversible, montrer que X ou $X + I_2$ n'est pas inversible.

3. On suppose ici que X vérifie (E) et n'est pas inversible. Montrer que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} \varphi$ et que $\operatorname{Ker} \varphi \subset \operatorname{Ker} f$. En déduire qu'il existe $x \in \mathbb{R}^*$ tel que $X = xA$. En déduire les seules valeurs de x.

4. On suppose ici que X vérifie (E) et que $X + I_2$ n'est pas inversible. En posant $Y = -(X + I_2)$, se ramener au cas précédent. En déduire toutes les solutions de (E).

Indications

Ex. 17.11

La matrice D est la matrice $\mathsf{M}_{\mathcal{B}'}(f)$ *de l'***exercice 17.10**. *Pour la question 4, si on note $\mathcal{D}_3(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices diagonales de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on pourra montrer que ψ de $\mathcal{C}_A$ dans $\mathcal{D}_3(\mathbb{R})$, qui à une matrice M de $\mathcal{C}_A$ associe $\psi(M) = N = P^{-1}MP$, est un isomorphisme.*

Ex. 17.12

L'idée principale est de remarquer que $\operatorname{Ker}(f - id)$ *et* $\operatorname{Ker}(f - 2id)$ *sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$. On détermine alors une base adaptée à cette supplémentarité.*

Ex. 17.18

On montrera que si f est l'endomorphisme associé canoniquement à M, en supposant $M \neq 0_3$, on partira d'un vecteur x tel que $f(x) \neq 0$ et on montrera qu'il existe une base de $\mathbb{K}^3$ de la forme $\{x, f(x), z\}$, où z est dans $\operatorname{Ker} f$. *Bien entendu, on utilisera cette base... À vous de jouer !*

Corrigé des vrai/faux

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F	F	F	V	V	V	V	F	V	V

1. Faux. $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \mathsf{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(id_E)$
2. Faux. Tout isomorphisme f de E_n peut être représenté par I_n dans un choix de bases adapté.
3. Faux. Un isomorphisme est toujours une application linéaire entre espaces vectoriels de même dimension et la caractérisation matricielle montre que ses matrices représentatives sont inversibles.
4. Vrai. Si $B = P^{-1}AP$, avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $B^2 = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) = P^{-1}A^2P$, de sorte que A^2 et B^2 sont semblables. Plus généralement, on montre par récurrence que A^p et B^p sont semblables.
5. Vrai, mais la réciproque est fausse ! Deux matrices équivalentes, ne sont pas nécessairement semblables.
8. En général, une telle opération diminue le rang de la matrice.
9. Vrai. En effet, toute matrice carrée est équivalente à sa réduite canonique qui est diagonale. En revanche, une matrice carrée n'est pas toujours semblable à une matrice diagonale.
10. Par définition, le rang de $\mathcal{A}$ est la dimension du sous-espace vectoriel de E_n engendré par $\mathcal{A}$. Si ce dernier est de dimension n, ce ne peut être que E_n lui-même : la famille engendre E_n.

❑ Erreurs classiques

Le risque est d'intervertir lignes et colonnes lorsqu'on construit la matrice représentative d'une application linéaire. En effet, deux constructions son possibles, à condition de les utiliser à bon escient.
Soit E_3 et F_3 des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension 3 de bases respectives $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ et $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$.

Soit $a : E_3 \to F_3$ l'application linéaire définie par :

$$\left\| \begin{array}{rcl} a(e_1) & = & f_1 - 2\cdot f_2 + f_3 \\ a(e_2) & = & f_1 + \quad f_2 - f_3 \\ a(e_3) & = & f_1 + 2\cdot f_2 \end{array} \right.$$

Alors

$$\mathsf{M}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $b : E_3 \to F_3$ l'application linéaire définie par :

$$b(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = (2x_1 - x_2 + x_3)f_1 + (-x_1 + x_2)f_2 + (x_1 - x_3)f_3.$$

Alors

$$\mathsf{M}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(b) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Corrigé des exercices

Exercice 17.1

1. On met en œuvre la **méthode 17.1**. En rangeant leurs coordonnées en colonnes, on obtient :

$$\mathsf{M}_{\mathcal{B}}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. D'après la **caractérisation matricielle des bases**, $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base si et seulement si sa matrice représentative est inversible. Or en échelonnant par les colonnes on obtient aisément :

Théorème 17.2.

On a effectué ici les opérations élémentaires suivantes : $C_3 \leftarrow C_2 + C_3$, puis $C_1 \iff C_2$.

$$\mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 3$$

Ainsi, la matrice représentative de $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est de rang 3. Elle est donc inversible et par suite, $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de E. ▲

Exercice 17.2

Clairement, les deux vecteurs ε_1 et ε_2 ne sont pas colinéaires, par conséquent ils sont linéairement indépendants. De plus la matrice représentative de $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ dans la base $\mathcal{B}$ s'écrit :

Une famille de deux vecteurs est libre si et seulement si ils sont non colinéaires. Ceci n'est évidemment plus valide lorsqu'on a affaire à une famille de trois vecteurs (ou plus).

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Posons $\varepsilon_3 = e_3$, de sorte que la matrice représentative de $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ dans la base $\mathcal{B}$ soit

$$\mathsf{M}_{\mathcal{B}}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est triangulaire inférieure à coefficients diagonaux non nuls, elle est donc inversible. D'après la **caractérisation matricielle des bases**, la famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de E. ▲

Exercice 17.3

1. En rangeant les coordonnées dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$ des vecteurs $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ en colonnes nous obtenons :

On met en œuvre la **méthode 17.1**.

$$P = \mathsf{M}_{\mathcal{B}}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. La matrice représentative de la famille $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux non nuls, elle est donc inversible. Par conséquent, $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ est une base de E.

3. Notons X la matrice représentative du vecteur x dans la base $\mathcal{B}$ et X' sa matrice représentative dans la base $\mathcal{B}'$. Les matrices colonnes X et X' vérifient la relation

$$X' = P^{-1} \times X$$

Déterminons $P^{-1} = \mathsf{M}_{\mathcal{B}'}(e_1, \ldots, e_n)$. Il est clair que $e_1 = \varepsilon_1$. De plus, pour $k \in [\![2, n]\!]$, $e_k = \varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}$. En rangeant les coordonnées dans la base $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ des vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ en colonnes nous obtenons :

$$P^{-1} = \mathsf{M}_{\mathcal{B}'}(e_1, \ldots, e_n) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Par conséquent, les coordonnées $(x'_1, \ldots, x'_n)$ du vecteur x dans la base $\mathcal{B}'$ sont données par :

- $x'_k = x_k - x_{k+1}$, pour $k \in [\![1, n-1]\!]$
- $x'_n = x_n$

▲

Exercice 17.4

1.

a. f est l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

b. Montrons que f est bijective et déterminons son inverse. Adoptons le point de vue des équations. Soit donc $(x', y', z') \in \mathbb{R}^3$.

L'équation vectorielle $f(x, y, z) = (x', y', z')$ se traduit en une équation matricielle et finalement en un système d'équations linéaires. Pour le résoudre, on met en œuvre l'algorithme du **pivot de Gauss.**

$$\begin{aligned} f(x,y,z) = (x',y',z') &\iff \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rrrl} 2x & -y & +z & = x' \\ -x & +y & & = y' \\ x & & -z & = z' \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rrrl} \mathbf{2}x & -y & +z & = x' \\ & \mathbf{1}y & +z & = x' + 2y' \\ & & \mathbf{4}z & = 2x' + 2y' - 2z' \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rrrr} x = & \frac{1}{2}x' & +\frac{1}{2}y' & +\frac{1}{2}z' \\ y = & \frac{1}{2}x' & +\frac{3}{2}y' & +\frac{1}{2}z' \\ z = & \frac{1}{2}x' & +\frac{1}{2}y' & -\frac{1}{2}z' \end{array} \right. \end{aligned}$$

Par identification, il s'ensuit que f est inversible et que son automorphisme réciproque est canoniquement associé à la matrice

$$M^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Déterminons la matrice représentative de φ dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ à l'aide de la **méthode 17.3**. Calculons :

$$\begin{aligned} \varphi(e_1) &= 2e_1 - 1e_2 + 1e_3 \\ \varphi(e_2) &= -1e_1 + 1e_2 + 0e_3 \\ \varphi(e_3) &= 1e_1 + 0e_3 - 1e_3 \end{aligned}$$

En rangeant les coordonnées dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\varphi(e_1)$, $\varphi(e_2)$ et $\varphi(e_3)$ en colonnes, nous obtenons la matrice :

$$M = \mathbf{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Comme la matrice M est inversible, φ est un automorphisme de E et son isomorphisme réciproque est représenté dans la base $\mathcal{B}$ par la matrice M^{-1}. Par conséquent, φ^{-1} est défini pour tout $x = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + x_3 \cdot e_3$,

$$\varphi^{-1}(\vec{x}) = \frac{1}{2}\Big[(x_1 + x_2 + x_3) \cdot e_1 + (x_1 + 3x_2 + x_3) \cdot e_2 + (x_1 + x_2 - x_3) \cdot e_3\Big]$$

▲

Exercice 17.5

1. Soit $(P, Q) \in E^2$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)(X) &= (X+1)\big(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q\big)'(X) + \big(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q\big)(X) \\ &= (X+1)\big(\lambda \cdot P'(X) + \mu \cdot Q'(X)\big) + \big(\lambda \cdot P(X) + \mu \cdot Q(X)\big) \\ &= \lambda\big[(X+1)P'(X) + P(X)\big] + \mu\big[(X+1)Q'(X) + Q(X)\big] \\ &= \lambda\varphi(P)(X) + \mu\varphi(Q)(X) \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $(P, Q) \in E^2$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, φ est bien linéaire. En outre, d'après les propriétés algébriques du degré des polynômes, si $P \in E$, alors $\deg(P) \leqslant 2, \deg(P') \leqslant 1$, de sorte que $\deg \varphi(P) \leqslant 2$, soit $\varphi(P) \in E$. Pour déterminer la matrice représentative de φ dans la base canonique $\mathcal{B} = (B_0, B_1, B_2)$ de E, on décompose les images de ces polynômes par φ dans la base $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned} \varphi(B_0) &= (X+1)B_0'(X) + B_0(X) &&= 1 \cdot B_0 + 0B_1 &&+0B_2 \\ \varphi(B_1) &= (X+1)B_1'(X) + B_1(X) &&= 1 \cdot B_0 + 2B_1 &&+0B_2 \\ \varphi(B_0) &= (X+1)B_2'(X) + B_2(X) &&= 0 \cdot B_0 + 2B_1 &&+3B_2 \end{aligned}$$

En rangeant ces coordonnées en colonnes, on obtient :

$$M = \mathbf{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2. La matrice M est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux tous non nuls, elle est donc inversible. De plus, on trouve aisément que :

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

3. D'après la **caractérisation matricielle des automorphismes**, φ est un automorphisme de E et pour tout polynôme $P(X) = a + bX + cX^2$, on obtient les coordonnées de $\varphi^{-1}(P)$ au moyen de la relation matricielle :

$$\mathsf{M}_{\mathcal{B}}(\varphi^{-1}(P)) = M^{-1} \times \mathsf{M}_{\mathcal{B}}(P)$$

Il s'ensuit que $\varphi^{-1}(P)(X) = (a - \frac{1}{2}b + \frac{1}{3}c) + (\frac{1}{2}b - \frac{1}{3}c)X + \frac{1}{3}cX^2$. ▲

Exercice 17.6

Le lecteur courageux pourra trouver une équation (dans $\mathcal{B}$) de $\operatorname{Im}\varphi$ *:* $3x + z = 0$.

Dans $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^3\}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$. A est de rang 3 et $\operatorname{Ker}\varphi = \mathsf{Vect}\{1\}$ et $\operatorname{Im}\varphi$ a pour base $\{\varphi(X), \varphi(X^2), \varphi(X^2)\}$. ▲

Exercice 17.7

Commençons par établir que f est un projecteur, c'est-à-dire qu'il vérifie $f \circ f = f$. On montre aisément que $A^2 = A$. Or si A est la matrice représentative de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$, alors A^2 est la matrice représentative de f^2. Ainsi $\mathsf{M}_{\mathcal{B}}(f^2) = \mathsf{M}_{\mathcal{B}}(f)$. D'après l'isomorphisme de représentation matricielle des endomorphismes, si ces deux endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ ont même matrice, c'est tout simplement parce qu'ils sont égaux !
Déterminons les éléments caractéristiques de f.

• Déterminons la direction de la projection, c'est-à-dire le noyau de f. On résout le système $AX = 0$, où $X = (x, y, z)^T$. L'ensemble des solutions est la droite vectorielle de base $(1, 2, 2)$.

• Il reste à déterminer $\operatorname{Im} f$, c'est-à-dire ici l'ensemble des vecteurs invariants par f. On résout pour cela le système $AX = X$. L'ensemble des solutions est le plan vectoriel de base $\{(-2, 1, 0), (-2, 0, 1)\}$. ▲

Exercice 17.8

Commençons par établir que f est une involution, c'est-à-dire qu'il vérifie $f \circ f = id_E$. Pour ce faire, on utilise bien sûr la matrice représentative de f et on vérifie que $M^2 = I_4$. Ainsi $\mathsf{M}_{\mathcal{B}}(f^2) = \mathsf{M}_{\mathcal{B}}(id_E)$. D'après l'isomorphisme de représentation matricielle des endomorphismes, il en résulte que $f^2 = id_E$.
Déterminons les éléments caractéristiques de f.

• Déterminons la direction de la base de la symétrie, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs invariants par f. On résout le système (S_1) $(M - I_4)X = 0$, où

$X = (x, y, z, t)^T$.

$$(S_1) \iff \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rrrl} 2x & & +2z & = 0 \\ & -2y & & = 0 \\ -4x & & -4z & = 0 \\ 2x & & +2z & = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rrrl} \mathbf{1}x & & +z & = 0 \\ & \mathbf{1}y & & = 0 \\ & & & 0 = 0 \\ & & & 0 = 0 \end{array} \right.$$

L'ensemble des solutions est le sous-espace vectoriel E_1 de E engendré par $\varepsilon_1 = e_1 - e_3, \varepsilon_2 = e_4$.

• Déterminons la direction de la symétrie, c'est-à-dire le noyau de $f + id_E$. On résout pour cela le système (S_2) $(M + I_4)X = 0$, où $X = (x, y, z, t)^T$. On trouve que l'ensemble des solutions est le sous-espace vectoriel E_2 de E dont une base est constituée de $\varepsilon_3 = e_1 - 2e_3 + e_4$ et $\varepsilon_4 = e_2$.

• Nous savons que E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E et que $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ est une base, adaptée à la décomposition $E = E_1 \oplus E_2$. Pour déterminer la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}'$ il serait ici maladroit d'utiliser les formules de changements de base. En effet, par construction des vecteurs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ on a directement :

- $f(\varepsilon_1) = \varepsilon_1$, car $\varepsilon_1 \in \operatorname{Ker}(f - id_E)$;
- $f(\varepsilon_2) = \varepsilon_2$, car $\varepsilon_2 \in \operatorname{Ker}(f - id_E)$;
- $f(\varepsilon_3) = -\varepsilon_3$, car $\varepsilon_3 \in \operatorname{Ker}(f + id_E)$;
- $f(\varepsilon_4) = -\varepsilon_4$, car $\varepsilon_4 \in \operatorname{Ker}(f + id_E)$.

Ainsi,

$$\mathsf{M}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

▲

Exercice 17.9

1. Soit $(P_1, P_2) \in \mathbb{R}_2[X]^2$, il existe (Q_1, Q_2) et $(R_1, R_2) \in \mathbb{R}_2[X]^2$, $AP_1 = Q_1B + R_1$ et $AP_2 = Q_2B + R_2$. On a par définition $f(P_1) = R_1$ et $f(P_2) = R_2$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $A(P_1 + \lambda P_2) = (Q_1 + \lambda Q_2)B + R_1 + \lambda R_2$. On a $f(P_1 + \lambda P_2) = f(P_1) + \lambda f(P_2)$. En effet, $R_1 + \lambda R_2 \in \mathbb{R}_2[X]$. Comme f est linéaire et $f(P) \in \mathbb{R}_2[X]$, f est bien un endomorphisme.

Ne pas oublier de dire que $f(P) \in \mathbb{R}_2[X]$.

2. Un calcul donne pour reste de la division de A par B, $f(1) = 2X^2 - 3X + 2$, pour reste de la division de AX par B, $f(X) = 3X^2 - 2X$, pour reste de la division de AX^2 par B, $f(X^2) = 7X^2 - 6X$. La matrice A de f dans la base $B_0 = (1, X, X^2)$ est $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & -6 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$.

3. On trouve $P_0 = \frac{1}{2}(X-1)(X-2)$, $P_1 = -X(X-2)$ et $P_2 = \frac{1}{2}X(X-1)$. En effet ces polynômes vérifient les relations voulues. Supposons trois autres

P_0, P_1 et P_2 sont appelés polynômes de Lagrange.

polynômes Z_0, Z_1 et Z_2 de $\mathbb{R}_2[X]$ qui vérifient les mêmes conditions. La différence $Z_i - P_i$ s'annule pour les trois entiers $0, 1, 2$ pour i variant de 0 à 2. Donc $Z_i = P_i$. On a l'unicité.

Une famille libre de trois vecteurs est une base d'un espace vectoriel de dimension 3.

4. Il suffit de démontrer que (P_0, P_1, P_2) est libre. En effet, si $a_0P_0 + a_1P_1 + a_2P_2 = 0$, en appliquant pour $X = i$, on a $a_i = 0$ pour tout i de 0 à 2. Enfin, en utilisant la définition de P_0, P_1 et P_2, on a : $P = P(0)P_1 + P(1)P_1 + P(2)P_2$.

5. Déterminons $f(P_0)$ dans la base B directement. On remarque que $B = X(X-1)(X-2)$ et tout le secret est là ! La division euclidienne de AP_0 par B s'écrit : $AP_0 = X(X-1)(X-2)Q + R_0$, où $R_0 = f(P_0) = R_0(0)P_0 + R_0(1)P_1 + R_0(2)P_2$. Comme $P_0(0) = 1$, $P_0(1) = P_0(2) = 0$, on a : $R_0(0) = 2 = A(0)$ et $R_0(1) = R_0(2) = 0$. De même, on calcule $f(P_1)$ et $f(P_2)$ directement dans la base B. La seule composante non nulle de $f(P_1)$ est $R_1(1) = A(1) = 1$ et la seule composante non nulle de $f(P_2)$ est $R_2(2) = A(2) = 4$. La matrice de f par rapport à B est $\mathrm{Diag}\,(2, 1, 4)$.

$(P_{\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Remarque : on peut utiliser la matrice de passage $P_{\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}}$ de la base canonique à la base $B = (P_0, P_1, P_2)$ et calculer $(P_{\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}})^{-1} A P_{\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}}$, mais c'est bien plus long !

Exercice 17.10

1. La matrice représentative de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$ est

$$P = \mathsf{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

On vérifie – par la méthode d'inversion de votre choix – que P est inversible et que

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

D'après la **caractérisation matricielle des bases** que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. La formule de changement de base pour un endomorphisme donne alors :

$$\mathsf{M}_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1} \times \mathsf{M}_{\mathcal{B}}(f) \times P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

▲

Exercice 17.11

1. La matrice 0_3 appartient à $\mathcal{C}_A$ de façon évidente. Si M et M' appartiennent à $\mathcal{C}_A$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $A(M + \lambda M') = AM + \lambda AM' = MA + \lambda M'A = (M + \lambda M')A$ et donc $M + \lambda M'$ est dans $\mathcal{C}_A$. En conclusion, $\mathcal{C}_A$ contient 0_3 et est stable par combinaison linéaire, il s'agit bien d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On a posé $N = P^{-1}MP$, soit $M = PNP^{-1}$.

2.

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C}_A \quad &\iff \quad AM = MA \iff P^{-1}AMP = P^{-1}MAP \\ &\iff \quad P^{-1}APP^{-1}MP = P^{-1}MPP^{-1}AP \\ &\iff \quad DP^{-1}MP = P^{-1}MPD \iff DN = ND \end{aligned}$$

3. On pose $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ et on calcule DN et ND.

$$DN = ND \iff \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ d & e & f \\ -2g & -2h & -2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & b & -2c \\ -d & e & -2f \\ -g & h & -2i \end{pmatrix}$$

L'égalité des coefficients deux à deux correspondants donne

$$b = c = d = f = g = h = 0$$

Dans la question 3, comme les matrices sont carrées d'ordre 3, une méthode algébrique colle.

Donc N est une matrice diagonale. La réciproque est immédiate.

4. Soit $\mathcal{D}_3(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices diagonales de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. D'après ce qui précède, on peut définir une application ψ de $\mathcal{C}_A$ dans $\mathcal{D}_3(\mathbb{R})$, qui à une matrice M de $\mathcal{C}_A$ associe $\psi(M) = N = P^{-1}MP$. Cette application est bijective car toute matrice N de $\mathcal{D}_3(\mathbb{R})$ admet pour unique antécédent dans $\mathcal{C}_A$ la matrice $M = PNP^{-1}$. Si $(M, M') \in C_A^2$ et $a \in \mathbb{R}$,

$$\psi(M + aM') = P^{-1}(M + aM')P = P^{-1}MP + aP^{-1}M'P = \psi(M) + a\psi(M')$$

et donc ψ est linéaire. C'est donc un isomorphisme de $\mathcal{C}_A$ sur $\mathcal{D}_3(\mathbb{R})$. Comme $\dim \mathcal{D}_3(\mathbb{R}) = 3$, on en déduit que $\dim C_A = 3$. Il suffit de vérifier que $\{I_3, A, A^2\}$ est une famille libre pour montrer que c'est une base de C_A. Pour cela, on met en œuvre la **méthode 16.1** : on calcule A^2 puis on vérifie que pour tout $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^3$, $\lambda_0 I_3 + \lambda_1 A + \lambda_2 A^2 = 0_3 \Rightarrow \lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$. ▲

Il est clair que I_3, A et A^2 sont dans $\mathcal{C}_A$.

Exercice 17.12

1. Un vecteur (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ appartient à $\operatorname{Ker}(f - id)$ si et seulement s'il est solution du système $AX = X$, où $X = (x\,y\,z)^T$. L'ensemble des solutions de ce système est la droite vectorielle de base $\{u_1(1, 1, 1)\}$. De même, un vecteur (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ appartient à $\operatorname{Ker}(f - 2id)$ si et seulement s'il est solution du système $AX = 2X$, où $X = (x\,y\,z)^T$. L'ensemble des solutions de ce système est le plan vectoriel de base $\{u_2(1, 0, -1), u_3(0, 1, 1)\}$.

2. Prenons la famille $\gamma = \{u_1, u_2, u_3\}$. On vérifie sans difficulté sa liberté et c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$. Si on note β la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on peut écrire la matrice de passage P de β à γ puis utiliser la formule du cours pour passer de A à B. Il y a ici plus simple. Comme $u_1 \in \operatorname{Ker}(f - id)$, $f(u_1) = u_1$ et comme $(u_2, u_3) \in (\operatorname{Ker}(f - 2id))^2$, $f(u_2) = 2u_2$ et $f(u_3) = 2u_3$. La matrice B est donc : $B = \operatorname{Diag}(1, 2, 2)$.

3. On montre pour tout $n \in \mathbb{N}$, par récurrence immédiate : $B^n = \operatorname{Diag}(1, 2^n, 2^n)$.

Puis, en utilisant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, un premier calcul donne :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Puis,

$$A^n = PB^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 + 2^n & 1 - 2^n \\ 1 - 2^n & -1 + 2^{n+1} & 1 - 2^n \\ 1 - 2^n & -1 + 2^n & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 17.13

1. On détermine le noyau de f en résolvant le système $AX = 0$. On obtient $\operatorname{Ker} f = \mathsf{Vect}\,(1,1,0,0)$. Par conséquent, d'après la formule du rang, f est de rang 3, i.e. $\dim \operatorname{Im} f = 3$. Or $\operatorname{Im} f$ est engendrée par les vecteurs canoniquement associés aux colonnes de A. D'où

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} f &= \mathsf{Vect}\big(1,0,1,1);(-1,0,-1,-1);(2,1,1,1);(-2,-1,0,0)\big)\\ &= \mathsf{Vect}\big(1,0,1,1);(2,1,1,1);(-2,-1,0,0)\big)\end{aligned}$$

Ainsi, la famille $\big(1,0,1,1);(2,1,1,1);(-2,-1,0,0)\big)$ est génératrice de $\operatorname{Im} f$. Comme elle compte $3 = \dim \operatorname{Im} f$ vecteurs, elle est génératrice minimale : c'est donc une base $\operatorname{Im} f$.

2. La matrice représentative de f^2 dans la base canonique est A^2 Or

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Visiblement, A^2 est de rang 2 (trois colonnes sont colinéaires) et $\operatorname{Im} f^2 = \mathsf{Vect}\,\big((1,0,2,2);(1,0,1,1)\big)$. Par la formule du rang, il s'ensuit que $\operatorname{Ker} f^2$ est de dimension 2. Or, $e_1 + e_2$ et $e_1 - e_3$ sont deux vecteurs non colinéaires de $\operatorname{Ker} f^2$. Ils forment donc une base de $\operatorname{Ker} f^2$.

$$\operatorname{Ker} f = \mathsf{Vect}\,(e_1 + e_2, e_1 - e_3)$$

La matrice représentative de $(f - id_E)^2$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est

$$(A - I_4)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Clairement $\operatorname{Rg}\,(f - id_E)^2 = 2$ et $\operatorname{Im}\,(f - id_E)^2 = \mathsf{Vect}\,\big((1,1,0,0);(3,2,-1,0)\big)$. Par suite $\operatorname{Ker}\,(f - id_E)^2$ est de dimension 2. Comme e_1 et $e_3 + e_4$ appartiennent visiblement au noyau et sont linéairement indépendants, ils forment une base de $\operatorname{Ker}\,(f - id_E)^2$. Ainsi,

$$\operatorname{Ker}\,(f - id_E)^2 = \mathsf{Vect}\,(e_1, e_3 + e_4)$$

Vérifions que la famille $u_1 = e_1 + e_2; u_2 = e_1 - e_3; u_3 = e_1; u_4 = e_3 + e_4$ est une base de $\mathbb{R}^4$. Pour ce faire, il suffit de vérifier que cette famille de 4 vecteurs de $\mathbb{R}^4$ est libre, ou bien de calculer le rang de la matrice représentative de cette famille dans la base canonique. Adoptons ce dernier point de vue :

Méthode 17.9

$$M = \mathsf{M}_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, u_3, u_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En échelonnant cette matrice par les lignes, il vient

$$\operatorname{Rg} M = \operatorname{Rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{Rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4$$

Ainsi (u_1, u_2, u_3, u_4) est une base de $\mathbb{R}^4$. En particulier, $\operatorname{Ker} f^2 = \mathsf{Vect}\,(u_1, u_2)$ et $\operatorname{Ker}(f - id_E)^2 = \mathsf{Vect}\,(u_3, u_4)$ sont supplémentaires.

3. Prenons $\varepsilon_1 = e_1 - e_3$, $\varepsilon_2 = f(\varepsilon_1) = -e_1 - e_2$, $\varepsilon_3 = e_3 + e_4$, $\varepsilon_4 = e_1$. Alors, il résulte aisément de la question précédente que $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$. De plus

$$\begin{array}{rcl} f(\varepsilon_1) & = & \varepsilon_2 \\ f(\varepsilon_2) & = & 0 \\ f(\varepsilon_3) & = & \varepsilon_3 \\ f(\varepsilon_4) & = & e_1 + e_3 + e_4 = \varepsilon_3 + \varepsilon_4 \end{array}$$

Ainsi, la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}'$ est la matrice T.

4. La matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ est la matrice représentative de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$. On calcule son inverse en adoptant par exemple le point de vue système linéaire :

Méthode 12.3

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

5. Soit $n \geqslant 2$, une récurrence immédiate montre que

$$T^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De plus, comme $T = P^{-1} \times A \times P$, *i.e.* $A = P \times T \times P^{-1}$, une récurrence immédiate montre que $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad A^n = P \times T^n \times P^{-1}$. Il ne reste plus qu'à effectuer ce produit matriciel pour obtenir l'expression de A^n. ▲

Exercice 17.14

1. La matrice représentative de (x_1, x_2, x_3) dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ s'écrit :

Les deux premières équivlences sont obtenues par opérations sur les colonnes. La dernière est l'échange des lignes L_3 et L_4.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 1 & \mathbf{-2} & 0 \\ 1 & -2 & \mathbf{1} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En utilisant des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes de A, le rang est préservé. On obtient $\operatorname{Rg} A = 3$. La famille (x_1, x_2, x_3) est donc de rang maximal 3.

2. la matrice représentative B de (x_1, x_2, x_3, x_4) dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ s'écrit :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les équivalences obtenues (en échelonnant par les lignes) préservent le rang des matrices, donc $\operatorname{Rg} B = 2$. La famille (x_1, x_2, x_3, x_4) est donc de rang 2. ▲

Exercice 17.15

- Échelonnons la matrice A par les colonnes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Il en résulte tout d'abord que $\operatorname{Rg} A = 2$. Ainsi $\operatorname{Im} A$ est un sous-espace de dimension 2 et $\operatorname{Ker} A$ est de dimension 1. Pour obtenir ces équivalences, nous avons opéré sur les colonnes de A les opérations suivantes :

On note a l'endomorphisme canoniquement associé à A et (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$$C_2 \leftarrow C_2 + C_1, C_3 \leftarrow C_3 + C_1, \text{ puis } C_3 \leftarrow C_3 + C_2$$

Ces opérations élémentaires s'interprètent comme des combinaisons linéaires des images $a(e_1), a(e_2), a(e_3)$. En particulier, la dernière matrice équivalente à A montre que :

- $0_{3,1} = (C_2 + C_1) + (C_3 + C_1)$, soit $2a(e_1) + a(e_2) + a(e_3) = 0_{\mathbb{R}^3}$. Comme a est linéaire, ceci revient à dire que le vecteur $2e_1 + e_2 + e_3 = (2, 1, 1)$ appartient au noyau de a. Comme ce vecteur est non nul, il constitue – à lui tout seul – une **famille libre maximale** dans $\operatorname{Ker} a$, c'en est donc une base.
- D'autre part, $\big(a(e_1), a(e_2), a(e_3)\big)$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im}(a)$. Comme $a(e_3) = -2a(e_1) - a(e_2)$, il en résulte que $\big(a(e_1), a(e_2)\big)$ est également génératrice de $\operatorname{Im}(a)$. Comme elle compte deux vecteurs, il s'agit d'une **famille génératrice minimale** dans $\operatorname{Im}(a)$, c'est en est donc une base.

- Procédons de même pour la matrice B.

On a opéré successivement $C_3 \leftarrow C_3 - C_2$, $C_4 \leftarrow C_4 - 2C_2$ puis $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$, $C_4 \leftarrow C_4 - C_1$ et pour finir $C_4 \leftarrow 3C_3 - 2C_4$, $C_1 \leftrightarrow C_2$.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$b \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$ est l'application linéaire canoniquement associée à B.

On en déduit alors que $\operatorname{Rg} B = 3$ et $\dim \operatorname{Ker} B = 1$. Comme b est à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, elle est donc surjective. On peut prendre comme base de l'image la base canonique de $\mathbb{R}^3$, ou bien, comme l'indique les opérations ci-dessus, $\big(b(1,0,0,0), b(0,1,0,0), b(0,0,1,0)\big)$. Concernant le noyau, en traduisant rigoureusement les opérations effectuées sur les colonnes en des combinaisons linéaires des images de la base canonique de $\mathbb{R}^4$, on trouve que $-e_1 + e_2 + 3e_3 - 2e_4 = (-1, 1, 3, -2)$ appartient au noyau de b. Il forme donc à lui tout seul une base de ce dernier. ▲

Exercice 17.16

On applique la méthode du pivot de Gauss à cette matrice et on procède successivement aux opérations élémentaires

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1,\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1,\ L_3 \leftarrow L_3 - (a-2)L_2$$

et on obtient la matrice triangulaire supérieure

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a+1 & 1 \\ 0 & 0 & (3-a)(a+2) & 3-a \end{pmatrix}$$

► Si $a \notin \{-2, 3\}$, on fait l'opération $L_3 \leftarrow \dfrac{1}{(3-a)(a+2)} L_3$,

ce qui nous donne la matrice : $A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a+1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/(a+2) \end{pmatrix}$ qui est de rang 3.

► Si $a = -2$, alors $\operatorname{Rg} A = 3$ et si $a = 3$, $\operatorname{Rg} A = 2$. ▲

Exercice 17.17

Supposons $n \geqslant 3$ et posons $X = \begin{pmatrix} \cos(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cos(n) \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} \sin(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \sin(n) \end{pmatrix}$.

On remarque que pour tout i de 1 à n, la colonne C_i de A est tout simplement $X \sin(i) + Y \cos(i)$. Comme $C_i \in \mathsf{Vect}\{X, Y\}$, $\operatorname{Rg} A = 2$ et c'est fini ! ▲

Si $n \leqslant 2$, le problème est réglé !

Exercice 17.18

Supposons que $M \neq 0_3$ et soit f l'endomorphisme associé canoniquement à M. Il existe donc un vecteur x tel que $f(x) \neq 0$. On a $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$ et comme $\dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = 3$, nécessairement $\dim \operatorname{Im} f = 1$ et $\dim \operatorname{Ker} f = 3$. Comme $f(x) \in \operatorname{Ker} f$, il existe $z \in \operatorname{Ker} f$ tel que $\{f(x), z\}$ soit une base de $\operatorname{Ker} f$. La famille $\mathcal{F} = \{x, f(x), z\}$ est libre (le faire) et la matrice de f par rapport à cette base est $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Les matrices solutions sont soit 0_3 soit toutes les matrices $P^{-1}AP$, avec P quelconque dans $\mathrm{GL}_3(\mathbb{K})$. ▲

Si $M = 0_3$, M est évidemment solution de l'équation.

Exercice 17.19

1. Si $\{e_1, e_2\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$, une base de $\operatorname{Im} f$ est $\{e_1 + e_2\}$ et une base de $\operatorname{Ker} f$ est $\{e_1 - e_2\}$.

2. Soit X vérifiant (E), on a $\varphi \circ (\varphi + id_{\mathbb{R}^2}) = (\varphi + id_{\mathbb{R}^2}) \circ \varphi = f$. Si φ et $\varphi + id_{\mathbb{R}^2}$ étaient inversibles tous les deux, f le serait. Donc l'une des deux matrices X ou $X + I_2$ n'est pas inversible.

En notant que A n'est pas inversible (car $\operatorname{Ker} f$ est non nul).

3. On suppose ici que X vérifie (E) et n'est pas inversible.

$$\varphi \circ (\varphi + id_{\mathbb{R}^2}) = f \Rightarrow \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} \varphi,$$

$$(\varphi + id_{\mathbb{R}^2}) \circ \varphi = f \Rightarrow \operatorname{Ker} \varphi \subset \operatorname{Ker} f$$

Comme $\operatorname{Ker} \varphi$ n'est pas réduit au vecteur nul ni égal à $\mathbb{R}^2$, on a

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} \varphi \text{ et } \operatorname{Ker} \varphi = \operatorname{Ker} f$$

Dans la base $\{e_1+e_2, e_1-e_2\}$, f a pour matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et φ a alors une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc il existe $x \in \mathbb{R}^\star$ tel que $\varphi = xf$. On peut en déduire les seules valeurs de x possibles en reportant dans (E),

$$2x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ ou } x = \frac{1}{2}$$

4. On suppose ici que X vérifie (E) et que $X + I_2$ n'est pas inversible. En posant $Y = -(X + I_2)$, on remarque que $Y^2 + Y = A$ et on est ramené au cas précédent. On a : $Y \in \{-A,\, A/2\} \Rightarrow X \in \{A - I_2,\, -A/2 - I_2\}$. On en déduit toutes les solutions de (E),

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

▲

Chapitre 18
Déterminants

UN MATHÉMATICIEN

Après des études musicales, **Alexandre Vandermonde** devient un brillant violoniste. Ce n'est que vers trente-cinq ans qu'il s'intéresse aux mathématiques, avec succès puisqu'il entre peu après à l'Académie des Sciences. Ses travaux concernent les résolutions de systèmes linéaires ; il est l'un des principaux artisans de la théorie des déterminants dont il donne différentes méthodes de calcul. Fidèles à ses premières amours, il publie un ouvrage sur la musique.

Un peu d'histoire

Les systèmes linéaires sont à l'origine de la notion de déterminant. C'est dans l'objectif de définir l'intersection de courbes algébriques qu'en 1748, le mathématicien écossais Colin Maclaurin résout explicitement des systèmes de deux ou trois équations. Il tente de donner une formule de résolution générale dans laquelle apparaît ce qu'on appelle, depuis Cauchy, un déterminant. Deux ans plus tard Gabriel Cramer retrouve ces formules dans le cas plus général de n équations.

Les premières études détaillées sur les déterminant sont l'œuvre d'Alexandre Vandermonde et Pierre-Simon Laplace qui, dans les années 1770, ont l'idée d'introduire des développements par rapport à une ligne ou une colonne. Cauchy, au début du siècle suivant, démontre les théorèmes généraux de cette théorie. Les déterminants prendront alors tout à fait leur place dans la formalisation de l'algèbre linéaire.

Objectifs

les incontournables

- Décomposer des permutations sur les ensembles finis en cycles ou en transpositions.
- Montrer plus facilement qu'un endomorphisme ou une matrice carrée est inversible.
- Calculer des déterminants :
  - grâce à la notion de multilinéarité ;
  - grâce à des manipulations sur des lignes ou des colonnes ;
  - grâce à des développements par rapport à des lignes ou des colonnes.

et plus si affinités

- Utiliser les fonctions polynomiales pour résoudre des problèmes de déterminants.
- Manipuler des sommes de $n!$ termes.

Résumé de cours

Déterminant d'une famille de n vecteurs

Définition et propriétés du déterminant

Théorème-Définition 18.1.— Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n rapporté à une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. Il existe une application unique notée $\mathrm{Det}_{\mathcal{B}} : E^n \to \mathbb{K}$ telle que :

- $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n)$ est **n-linéaire**, *i.e* linéaire par rapport à chacune de ses n variables ;
- $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n)$ est **alternée**, *i.e* $\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n) = 0$ dès qu'un des vecteurs x_i apparaît deux fois dans la famille $(x_1, \ldots, x_n)$;
- $\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = \mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(e_1, \ldots, e_n) = 1$.

Pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$, le scalaire $\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n)$ est appelé le **déterminant de la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$**.

Proposition 18.2.— Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n rapporté à une base $\mathcal{B}$. Toute forme $\varphi : E^n \to \mathbb{K}$ n-linéaire et alternée est proportionnelle à $\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}$.

En particulier, si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, les applications $\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}$ et $\mathrm{Det}_{\mathcal{B}'}$ sont proportionnelles. Plus précisément :

Théorème 18.3.— Formule de changement de base —. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Alors

$$\boxed{\forall (x_1, \ldots, x_n) \in E^n, \quad \mathrm{Det}_{\mathcal{B}'}(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{Det}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \times \mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n)}$$

Application du déterminant à l'étude de la dépendance linéaire

Le principal résultat donne une nouvelle **caractérisation des bases** en dimension finie.

Théorème 18.4.— Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B}$ une base de E et $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$

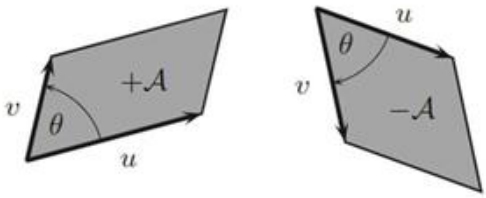
$$\boxed{(x_1, \ldots, x_n) \text{ est une base de } E \text{ si et seulement si } \mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n) \neq 0}$$

Interprétation géométrique dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

- Si $E = \mathbb{R}^2$, notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de E. Pour tout couple $(u, v) \in E^2$, on a alors

$$\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(u, v) = u_1 v_2 - u_2 v_1,$$

où on a noté $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$. Ce réel est égal à l'aire algébrique du parallélogramme engendré sur les vecteurs u et v. Cette aire est comptée positivement si (u, v) est directe, négativement sinon.

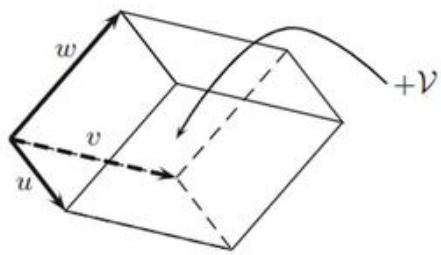


On retrouve le fait que la famille (u, v) est une base si et seulement si les vecteurs u et v ne sont pas colinéaires, si et seulement si le parallélogramme est non aplati, si et seulement si son aire géométrique est non nulle, si et seulement si $\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(u, v) \neq 0$.

• Lorsque $E = \mathbb{R}^3$ (correspondant à $n = 3$) est l'espace muni de la base canonique $\mathcal{B}$, pour tout triplet $(u, v, w) \in E^3$, on a alors

$$\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(u, v, w) = [u_1v_2w_3 + u_2v_3w_1 + u_3v_1w_2] - [u_1v_3w_2 + u_2v_1w_3 + u_3v_2w_1]$$

où nous avons noté $u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3), w = (w_1, w_2, w_3)$. Ce réel est le volume algébrique du parallélépipède engendré par les trois vecteurs u, v, w.



On retrouve le fait que la famille (u, v, w) est une base si et seulement si les vecteurs u, v et w ne sont pas coplanaires, si et seulement si le parallélépipède est non aplati, si et seulement si son volume géométrique est non nul, si et seulement si $\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(u, v, w) \neq 0$.

■ Déterminant d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

Déterminant d'un endomorphisme

Théorème-Définition 18.5.— Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour toute base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E, le scalaire

$$\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}\big(f(e_1), \cdots, f(e_n)\big)$$

est indépendant de la base $\mathcal{B}$ et ne dépend que de f. On appelle ce scalaire le **déterminant de l'endomorphisme** f. On le note $\mathrm{Det}\,(f)$.

Proposition 18.6.— Soit f, g deux endomorphismes de E et $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E. Alors

- $\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}\big(f(x_1), \ldots, f(x_n)\big) = \mathrm{Det}\,(f) \times \mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n)$
- $\mathrm{Det}\,(g \circ f) = \mathrm{Det}\,(g) \times \mathrm{Det}\,(f)$

Le principal résultat est la **caractérisation des automorphismes** en dimension finie qui suit.

Théorème 18.7.— Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $f \in \mathcal{L}(E)$.

$$\boxed{f \text{ est un automorphisme de } E \text{ si et seulement si } \mathrm{Det}\,(f) \neq 0}$$

En ce cas, $\mathrm{Det}\,(f^{-1}) = \big(\mathrm{Det}\,(f)\big)^{-1}$.

Déterminant d'une matrice carrée

Théorème-Définition 18.8.— Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'espace des matrices colonnes $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est rapporté à sa base canonique $\mathcal{C}$. Étant donné une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, carrée d'ordre n, on note $C_1, C_2, \ldots, C_n$ les colonnes de A. On définit le **déterminant de la matrice** A comme étant le déterminant de la famille $(C_1, \ldots, C_n)$ dans la base canonique $\mathcal{C}$:

$$\boxed{\operatorname{Det} A = \operatorname{Det}_{\mathcal{C}}(C_1, C_2, \ldots, C_n)}$$

En particulier, $(C_1, C_2, \ldots, C_n) \mapsto \operatorname{Det}_{\mathcal{C}}(C_1, C_2, \ldots, C_n)$ est une forme n-linéaire, alternée sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Notation : *Si* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, *on note* $\operatorname{Det} A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Théorème 18.9.— Le déterminant vérifie les propriétés suivantes sur l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

- Pour toutes matrices A et B, on a $\operatorname{Det}(A \times B) = \operatorname{Det}(A) \times \operatorname{Det}(B)$.
- Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$, $\operatorname{Det}(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \operatorname{Det}(A)$.
- Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\operatorname{Det}(A^T) = \operatorname{Det}(A)$.

Théorème 18.10.— Caractérisation des matrices inversibles —. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\boxed{A \text{ est inversible si et seulement si } \operatorname{Det}(A) \neq 0.}$$

En ce cas, $\operatorname{Det}(A^{-1}) = \big(\operatorname{Det}(A)\big)^{-1}$.

■ Calcul des déterminants

Calcul du déterminant d'une famille de vecteurs, d'un endomorphisme

Proposition 18.11.— Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n rapporté à une base $\mathcal{B}$.

- Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ une famille de vecteurs de E et notons $A = \mathsf{M}_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n)$. Alors $\operatorname{Det}(x_1, \ldots, x_n) = \operatorname{Det}(A)$.
- Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et notons $A = \mathsf{M}_{\mathcal{B}}(f)$. Alors $\operatorname{Det}(f) = \operatorname{Det}(A)$.

Commentaires : ainsi, tout calcul de déterminant se ramène à celui d'une matrice carrée.

Développement suivant une ligne ou une colonne

Définition : $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *une matrice carrée d'ordre* n. *On appelle* ***mineur d'indices*** (i_0, j_0), *le nombre :*

$$\Delta_{i_0 j_0} = (-1)^{i_0 + j_0} \cdot \operatorname{Det}(A_{i_0 j_0}),$$

où $A_{i_0 j_0}$ *est la matrice carrée d'ordre* $n-1$ *obtenue à partir de la matrice* A, *en supprimant sa* ${i_0}^{\text{ième}}$ *ligne et sa* ${j_0}^{\text{ième}}$ *colonne.*

Théorème 18.12.— Développement par une ligne ou une colonne —. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $(i_0, j_0) \in [\![1, n]\!]^2$,

$$\boxed{\bullet \quad \mathrm{Det}\,(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j} \Delta_{i_0,j} \qquad \bullet \quad \mathrm{Det}\,(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j_0} \Delta_{i,j_0}}$$

Proposition 18.13.— Déterminant d'une matrice triangulaire —. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) d'ordre n. Alors

$$\boxed{\mathrm{Det}\,(A) = a_{1,1} \times a_{2,2} \times \cdots \times a_{n,n} = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}}$$

Ainsi, le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des coefficients diagonaux.

Méthodes

Différents types de déterminants

Méthode 18.1.— Comment savoir quel déterminant calculer

Quel que soit le déterminant à calculer, qu'il s'agisse du déterminant d'une famille de vecteurs de E dans une base $\mathcal{B}$ ou celui d'un endomorphisme de E, on se ramène toujours à calculer le déterminant d'une matrice.

- Pour calculer $\operatorname{Det}_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, écrire la matrice A dont la $j^{\text{ième}}$ colonne est constituée des n coordonnées de x_j selon $\mathcal{B}$ et calculer $\operatorname{Det} A$.
- Pour calculer $\operatorname{Det} f$, calculer la matrice $A = \mathsf{M}_{\mathcal{B}}(f)$ selon n'importe quelle base, puis calculer $\operatorname{Det} A$.

Mise en œuvre : exercice 18.3

Exemple : plaçons-nous dans $E = \mathbb{R}_2[X]$ et considérons l'application φ qui à tout polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ fait correspondre le polynôme $\varphi(P)$ défini par :

$$\varphi(P)(X) = (X^2 - 1)\ P''(X) + 2X\ P'(X)$$

- On vérifie aisément que φ est linéaire. De plus
  - $\varphi(1) = 0$
  - $\varphi(X) = 2X$
  - $\varphi(X^2) = 2(X^2 - 1) + 4X^2 = 6X^2 - 2$

Ainsi, $\varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2)$ sont des polynômes de degré inférieurs à 2. Comme ces trois polynômes engendrent $\operatorname{Im}\varphi$, on a bien $\operatorname{Im}\varphi \subset \mathbb{R}_2[X]$. En particulier, $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme de E.

- φ est-il un automorphisme de E ? Rangeons en colonnes les coordonnées des images de la base canonique de E, il vient

$$\mathsf{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Comme cette matrice est triangulaire, il est aisé de calculer son déterminant : $\operatorname{Det}\varphi = 0 \times 2 \times 6 = 0$. D'après la caractérisation des automorphismes, φ n'est pas un automorphisme.

Exemple : soit n un entier naturel. On définit l'application $f : P(X) \mapsto X^n \cdot P(\frac{1}{X})$ sur l'espace $\mathbb{R}_n[X]$. Comment calculer $\operatorname{Det} f$?

On vérifierait que la formule proposée est encore un polynôme de degré inférieur ou égal à n et que f est linéaire.

La matrice A représentant l'endomorphisme f selon la base canoninque $\mathcal{B} = (1, X, \cdots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ est la matrice $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ ne comportant pratiquement que des zéros avec une diagonale de 1 partant du coin bas-gauche vers le coin opposé. Il ne reste plus qu'à calculer $\operatorname{Det} A$ ...

Remarque : on peut deviner que le déterminant de f vaut ± 1. En effet, on vérifie que $f \circ f = id$, donc $A^2 = I_{n+1}$: $\operatorname{Det} A^2 = 1$ et $\operatorname{Det} A = \pm 1$.

■ Calcul pratique de déterminants

Pour calculer le déterminant d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, plusieurs méthodes sont possibles que nous allons détailler ci-après.

- Si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ vous effectuez un produit en croix.
- Si A est triangulaire son déterminant est le produit des coefficients diagonaux.
- Sinon, on dispose de deux méthodes explicites :
  - par opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes, on triangule la matrice A,
  - en développant $\mathrm{Det}\,(A)$ suivant une rangée *i.e.* une ligne ou une colonne.
- Pour calculer un déterminant Δ_n d'ordre $n \in \mathbb{N}^\star$, on peut aussi utiliser une méthode implicite. En développant par rapport à une ligne ou une colonne, on met en évidence une relation de récurrence entre Δ_n et Δ_{n-1} ou Δ_{n-2}. (Δ_n) apparaît ainsi comme le terme général d'une suite récurrente.

Opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'un déterminant

L'application

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Det} & : & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ & & A & \mapsto & \mathrm{Det}\,(A) \end{array}$$

étant une forme n-linéaire alternée sur les vecteurs canoniquement associés aux colonnes de A, on en déduit les règles de calcul suivantes :

❑ Méthode 18.2.— Comment manipuler les lignes ou colonnes d'un déterminant

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, notons $C_1, \ldots, C_n$ ses colonnes et $\mathrm{Det}\,(A) = \mathrm{Det}\,(C_1, \ldots, , C_n)$.

- Lorsqu'on ajoute à C_j une combinaison d'autres colonnes, le déterminant est inchangé :
$$\mathrm{Det}\,(C_1, \ldots, C_j + \sum_{i \neq j} \lambda_i \cdot C_i, \ldots, C_n) = \mathrm{Det}\,(C_1, \ldots, C_j, \ldots, C_n)$$
- Si $C_j = C'_j + C''_j$, le déterminant de A est la somme des deux déterminants obtenus :
$$\mathrm{Det}\,(C_1, \ldots, C'_j + C''_j, \ldots, C_n) = \mathrm{Det}\,(C_1, \ldots, C'_j, \ldots, C_n) + \mathrm{Det}\,(C_1, \ldots, C''_j, \ldots, C_n)$$
- Lorsqu'on transpose deux colonnes $C_i \leftrightarrow C_j$, le déterminant change de signe :
$$\mathrm{Det}\,(C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_j, \ldots, C_n) = -\mathrm{Det}\,(C_1, \ldots, C_j, \ldots, C_i, \ldots, C_n)$$
- Lorsqu'on permute selon $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ les colonnes de A, $\mathrm{Det}\,A$ est multiplié par $\varepsilon(\sigma)$.
$$\mathrm{Det}\,(C_{\sigma(1)}, \ldots, C_{\sigma(j)}, \ldots, C_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma)\mathrm{Det}\,(C_1, \ldots, C_j, \ldots, C_n)$$
- Lorsqu'on multiplie **une** colonne par $\lambda \in \mathbb{K}$, $\mathrm{Det}\,A$ est multiplié par λ.
$$\mathrm{Det}\,(C_1, \ldots, \lambda \cdot C_j, \ldots, C_n) = \lambda\mathrm{Det}\,(C_1, \ldots, C_j, \ldots, C_n)$$
- Lorsqu'on multiplie **toutes** les colonnes par $\lambda \in \mathbb{K}$, $\mathrm{Det}\,A$ est multiplié par λ^n.
$$\mathrm{Det}\,(\lambda \cdot C_1, \ldots, \lambda \cdot C_j, \ldots, \lambda \cdot C_n) = \lambda^n\mathrm{Det}\,(C_1, \ldots, C_j, \ldots, C_n)$$

Comme le déterminant d'une matrice carrée est égal à celui de sa transposée, les mêmes règles de calcul ont lieu pour les lignes de A.

Remarque : au moyen d'opérations élémentaires, on peut donc faire apparaître un maximum de zéros sur une colonne C_j ou une ligne L_i de la matrice A. Ces manipulations changent les coefficients de la matrice A mais le déterminant reste identique !

Développement suivant une ligne ou une colonne

Étant donné une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, le **théorème 18.12** permet de développer $\mathrm{Det}\,(A)$ suivant une rangée (une ligne ou une colonne) de A.

1. Si A est une matrice carrée d'ordre 2, on obtient $\mathrm{Det}\,A$ comme un *produit en croix* des coefficients. Ainsi, en développant suivant sa première colonne :

$$\mathrm{Det}\,(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1} \times a_{2,2} - a_{2,1} \times a_{1,2}$$

2. Si A est une matrice carrée d'ordre 3, le **théorème 18.12** permet de développer (ici par rapport à la dernière colonne) comme une combinaison linéaire de 3 déterminants d'ordre 2 :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = +\boldsymbol{a_{1,3}} \cdot \begin{vmatrix} \cancel{a_{1,1}} & \cancel{a_{1,2}} & \cancel{a_{1,3}} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} - \boldsymbol{a_{2,3}} \cdot \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ \cancel{a_{2,1}} & \cancel{a_{2,2}} & \cancel{a_{2,3}} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} + \boldsymbol{a_{3,3}} \cdot \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ \cancel{a_{3,1}} & \cancel{a_{3,2}} & \cancel{a_{3,3}} \end{vmatrix}$$

$$= +\boldsymbol{a_{1,3}} \cdot \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix} - \boldsymbol{a_{2,3}} \cdot \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix} + \boldsymbol{a_{3,3}} \cdot \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}$$

Plus généralement, vous pouvez développer un déterminant 3×3 par rapport à la rangée (ligne ou colonne) de votre choix : chaque coefficient $a_{i,j}$ de la rangée, affecté du bon signe $(-1)^{i+j}$, est multiplié par le déterminant de la matrice $A_{i,j}$ obtenue en rayant la ligne et la colonne du coefficient $a_{i,j}$.

Remarque : pour s'y retrouver en ce qui concerne les signes, on utilise le tableau de signes

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

3. Dans le cas d'une matrice carrée d'ordre $n \geqslant 3$, le **théorème 18.12** donne $\mathrm{Det}\,(A)$ comme une combinaison linéaire de n déterminants d'ordre $n-1$: on peut donc itérer ce processus pour ce ramener à des calculs de déterminants d'ordre 2.
À chaque étape, on prendra soin de choisir une rangée avec un maximum de coefficients nuls pour limiter les calculs ! Au besoin, on pourra même effectuer des opérations sur les lignes ou les colonnes des déterminants successifs de façon à faire apparaître des coefficients nuls.

La fiche méthode qui suit résume cet algorithme de calcul :

❑ Méthode 18.3.— Comment calculer le déterminant d'une matrice carrée

En pratique, pour calculer le déterminant d'une matrice A carrée d'ordre n :

[1] Effectuer des manipulations sur lignes ou colonnes pour faire apparaître des zéros.

[2] Développer par rapport à une ligne ou une colonne comportant un maximum de zéros.

→ On se ramène ainsi à des déterminants avec une ligne et une colonne de moins.

[3] Reprendre à l'étape [1] jusqu'à se ramener à des déterminants de taille 2×2.

Mise en œuvre : exercice 18.4 et **exercice 18.5**.

Calcul d'un déterminant par triangulation

Le déterminant d'une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) est toujours égal au produit de ses coefficients diagonaux.

À l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'un déterminant, nous pouvons ramener le calcul d'un déterminant à celui d'une matrice triangulaire, à la manière d'un processus Gaussien, en prenant garde toutefois que le déterminant est n-linéaire alterné, par exemple,

- l'opération élémentaire $L_1 \leftarrow L_2 - L_1$ multilplie le déterminant par -1 ;
- l'opération élémentaire $C_3 \leftarrow 2C_3 - C_1 - C_2$ multiplie le déterminant par 2 !

Cette méthode est particulièrement utile pour obtenir une expression factorisée du résultat.

Exemple :

$$\begin{aligned}
\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ \mathbf{1} & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 \\ \mathbf{1} & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} && \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - 2 \cdot L_2 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{matrix} \\
&= 3 \begin{vmatrix} 0 & \mathbf{1} & 1 \\ \mathbf{1} & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} && \begin{matrix} \text{Linéarité par rapport} \\ \text{à la première ligne} \end{matrix} \\
&= 3 \begin{vmatrix} 0 & \mathbf{1} & 1 \\ \mathbf{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{3} \end{vmatrix} && L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\
&= -3 \begin{vmatrix} \mathbf{1} & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{3} \end{vmatrix} && L_1 \leftrightarrow L_2
\end{aligned}$$

D'où $\Delta = -3 \times 1 \times 1 \times 3 = -9$.

Calcul par récurrence

❑ Méthode 18.4.— Comment calculer un déterminant d'ordre n

On considère une suite de déterminants Δ_n d'ordre $n \in \mathbb{N}^\star$. Pour obtenir l'expression de Δ_n en fonction de n, une méthode consiste à démontrer que Δ_n est le terme général d'une suite récurrente.

$\boxed{1}$ Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, arbitraire. On développe Δ_n suivant une ligne ou une colonne afin de mettre en évidence une relation de récurrence entre Δ_n et Δ_{n-1}.

Il est parfois nécessaire de développer suivant une deuxième ligne ou colonne pour avoir une relation de récurrence entre Δ_n, Δ_{n-1} et Δ_{n-2}.

$\boxed{2}$ La relation de récurrence ainsi obtenue et les valeurs initiales Δ_1, Δ_2, permettent d'obtenir l'expression de Δ_n en fonction de n.

Exemple : reprenons l'exemple de l'application $f : P(X) \mapsto X^n \cdot P\left(\frac{1}{X}\right)$.

On pose Δ_{n+1} le déterminant de la matrice $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ ci-contre. On en déduit par développement par rapport à la dernière colonne :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_{n+1} = (-1)^{n+2} \cdot \Delta_n = (-1)^n \cdot \Delta_n.$$

De fil en aiguille, on aboutit à :

$$\Delta_{n+1} = (-1)^n \cdot (-1)^{n-1} \cdot \Delta_{n-1} = \cdots = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

En particulier, $\mathrm{Det}\,(f)$ est non nul : d'après le **théorème 18.7**, f est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exemple : pour tout entier $n \geqslant 1$, on note A_n la matrice dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ne comportant que des 0, sauf ceux situés sur la diagonale, ceux situés juste au dessus de la diagonale et ceux situés juste en dessous de la diagonale, tous ces coefficients valant 1. Calculer le déterminant de la matrice A_n.

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Notons pour tout $n \geqslant 1$, le nombre $u_n = \mathrm{Det}\, A_n$. Lorsque n vaut 1, on a : $A_1 = (1)$ et $u_1 = 1$. Lorsque n vaut 2, on a : $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $u_2 = 0$.

Pour $n \geqslant 3$, en développant le déterminant $\mathrm{Det}\,(A_n)$ par rapport à la première colonne, on obtient :

$$u_n = u_{n-1} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{n-1}.$$

Notation : *dans le calcul ci-dessus, on a noté en indice l'ordre du déterminant.*

En développant maintenant le dernier déterminant par rapport à la première ligne, celui-ci vaut u_{n-2}. On dispose finalement de la formule de récurrence linéaire d'ordre 2 :

$$u_1 = 1, \quad u_2 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 3, \quad u_n = u_{n-1} - u_{n-2}.$$

On adopte directement la méthode de l'équation caractéristique associée au polynôme : $P(X) = X^2 - X + 1$. Tous calculs faits, on aboutit à : $u_n = \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$.

Il s'agit toujours d'un entier, puisque les matrices A_n sont à coefficients entiers, et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est 6-périodique, ce qui n'était *a priori* difficilement imaginable !

Mise en œuvre : exercice 18.6, **exercice 18.7** et **exercice 18.8**.

■ Exploitation des déterminants

Le déterminant d'une matrice carrée est une valeur numérique qui permet d'apporter des réponses à des questions qualitatives. Plus précisément, on sera la plupart du temps intéressé par la nullité ou pas d'un déterminant, ce qui renforce l'intérêt du calcul du déterminant par triangulation, méthode qui permet d'obtenir l'expression du déterminant sous forme factorisée.

❑ Méthode 18.5.— Comment utiliser les déterminants en algèbre linéaire

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n rapporté à une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, , $(a_1, \ldots, a_n)$ une famille de vecteurs de E et $f : E \to E$ un endomorphisme de E.

- Pour montrer qu'une matrice A est inversible, on calcule son déterminant.

$$A \text{ est inversible si et seulement si } \mathrm{Det}\,(A) \neq 0,$$

- Pour montrer que f est un automorphisme de E, on calcule son déterminant.

$$f \text{ est un automorphisme si et seulement si } \mathrm{Det}\,(f) \neq 0.$$

- Pour montrer qu'un système $S : A \times X = Y$ de n équations à n inconnues est de Cramer, on calcule son déterminant.

$$(S) \text{ est de Cramer si et seulement si } \mathrm{Det}\,(A) \neq 0.$$

Mise en œuvre : exercice 18.9, **exercice 18.11** et **exercice 18.12**.

Vrai/Faux

	Vrai	Faux
1. Si le produit de matrices carrées est inversible, alors chaque matrice dans le produit est inversible.	☐	☐
2. Si le déterminant d'une matrice est égal au produit de ses coefficients diagonaux, alors la matrice A est triangulaire supérieure ou inférieure.	☐	☐
3. Le déterminant d'une matrice A ne comportant que des 0 et de 1 est un entier.	☐	☐
4. Le déterminant d'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est égal au déterminant selon n'importe quelle base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ de la famille des colonnes de A.	☐	☐
5. Si A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifient $\mathrm{Det}\,(A+B) = \mathrm{Det}\,(B)$, alors A est la matrice nulle.	☐	☐
6. Le déterminant d'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ est égal au déterminant de la matrice $\mathsf{M}_{\mathcal{B}}(f)$, seulement lorsque $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.	☐	☐
7. Si A est une matrice dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors le déterminant de la matrice A^2 est obligatoirement positif ou nul.	☐	☐
8. La formule $\mathrm{Det}\,(AB) = \mathrm{Det}\,(BA)$ n'est valable que pour les matrices carrées A et B qui commutent.	☐	☐
9. Dans une matrice carrée, le fait de remplacer la première colonne par une combinaison linéaire de colonnes de la matrice comportant la première colonne peut changer le déterminant de cette matrice.	☐	☐
10. Les déterminants d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et de sa matrice symétrique par rapport au centre de A sont égaux.	☐	☐

Énoncé des exercices

Propriétés des déterminants

Exercice 18.1 : Calculer en fonction des paramètres a, b et c, les déterminants suivants en privilégiant les propriétés du déterminant. Exprimer les résultats sous forme factorisée.

1. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

2. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$

3. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ 1 & \cos b & \cos 2b \\ 1 & \cos c & \cos 2c \end{vmatrix}$

4. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & c+a & b+c \\ ab & ca & bc \end{vmatrix}$

Exercice 18.2 : Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\{-1, 1\})$.

1. Montrer que $\operatorname{Det} A \in \mathbb{Z}$.

2. Montrer que 2^{n-1} divise $\operatorname{Det} A$.

Exercice 18.3* : Soit n dans $\mathbb{N}^\star$, A et H dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec H une matrice de rang égal à 1. Montrer l'inégalité : $\operatorname{Det}(A + H) \cdot \operatorname{Det}(A - H) \leqslant \operatorname{Det}(A)^2$.

Calculs de déterminants

Exercice 18.4 : Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer le déterminant de la matrice $A = (|i - j|)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Exercice 18.5 : Soit n et p deux entiers strictement positifs. Calculer le déterminant de la matrice $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant p+1}$ appartenant à $\mathcal{M}_{p+1}(\mathbb{R})$, avec $a_{ij} = \begin{pmatrix} n+i-1 \\ j-1 \end{pmatrix}$.

Exercice 18.6 : Soit n dans $\mathbb{N}^\star$ et θ dans $\mathbb{R}$.

Calculer le déterminant de taille n : $\begin{vmatrix} \cos\theta & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}$.

Exercice 18.7 : Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On considère le déterminant d'ordre n suivant :

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & & & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 & & \\ 0 & 6 & 3 & -2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & -2 \\ 0 & & & 0 & n(n-1) & n \end{vmatrix}$$

1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$

$$D_n = nD_{n-1} + 2n(n-1)D_{n-2}$$

2. Soit pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n = \dfrac{D_n}{n!}$. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n. En déduire celle de D_n.

Exercice 18.8 : Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Étant donné $x \in \mathbb{R}$ et $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, on considère le déterminant d'ordre $n+1$ suivant :

$$\Delta(a_0, \ldots, a_n; x) = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & \cdots & a_0 \\ -1 & x & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x \end{vmatrix}$$

1. Exprimer $\Delta(a_0, \ldots, a_n; x)$ en fonction de a_0, x et $\Delta(a_0, \ldots, a_n; x)$.
2. En déduire l'expression de $\Delta(a_0, \ldots, a_n; x)$ en fonction $a_0, \ldots, a_n$ et x

■ Utilisation des déterminants

Exercice 18.9 :
1. Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, on pose les vecteurs $e_1 = (1, 2, -1)$, $e_2 = (3, 0, m)$ et $e_3 = (m, 1, 1)$. Déterminer les nombres réels m tels que la famille (e_1, e_2, e_3) forme une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer le déterminant de l'application linéaire :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P(X) & \mapsto & X \cdot P'(X+2) + P(1) \cdot (X^3 - 1). \end{array}$$

Que peut-on en déduire ?

Exercice 18.10* : Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x_0, \ldots, x_n$, $(n+1)$ nombres complexes. On veut calculer le déterminant de Vandermonde noté $\mathcal{V}_n(x_0, \ldots, x_n)$ de la matrice $(x_i^j)_{0 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$.
1. Calculer $\mathcal{V}_n(x_0, \ldots, x_n)$ lorsque Card $(\{x_0, \ldots, x_n\}) \leqslant n$. On suppose dans toute la suite que les nombres $x_0, \ldots, x_n$ sont tous différents.
2. On suppose que $\mathcal{V}_n(x_0, \ldots, x_n) \neq 0$. On pose pour tout $z \in \mathbb{C}$, $Q(z) = \mathcal{V}_{n+1}(x_0, \ldots, x_n, z)$.
  a. Montrer que la fonction $z \mapsto Q(z)$ est polynomiale de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Quel est son degré ?
  b. Montrer que : $\forall z \in \mathbb{C}$, $Q(z) = \mathcal{V}_n(x_0, \ldots, x_n) \times \displaystyle\prod_{k=0}^{n} (z - x_k)$.
3. Conclure que : $\mathcal{V}_n(x_0, \ldots, x_n) = \displaystyle\prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$.

Exercice 18.11 : Interpolation de Lagrange —. Soit $n \in \mathbb{N}$, puis $z_0, \cdots, z_n$ des nombres complexes deux à deux distincts.

Montrer que pour tout $(\theta_0, \cdots, \theta_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$, il existe un seul polynôme $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ de degré inférieur ou égal à n tel que :

$$\forall k \in \{0, \cdots, n\},\ P(z_k) = \theta_k$$

en utilisant deux méthodes différentes portant sur l'application $\varphi : P(X) \mapsto (P(z_0, P(z_1), \cdots, P(z_n))$ définie de $\mathbb{C}_n[X]$ vers $\mathbb{C}^{n+1}$, soit en étudiant son noyau, soit en étudiant son déterminant selon deux bases adaptées au problème.

Exercice 18.12* : Réduction d'un endomorphisme —. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

1. Pour quelles valeurs du réel λ a-t-on $\mathrm{Det}\,(f - \lambda \cdot Id_{\mathbb{R}^3}) = 0$?

2. Pour chaque valeur trouvée à la question précédente, déterminer une base de $\mathrm{Ker}\,(f - \lambda \cdot Id_{\mathbb{R}^3})$.

3. En déduire une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice représentative de f soit une matrice diagonale D.

Indications

Ex. 18.2

On pourra faire une récurrence sur l'entier n.

Ex. 18.3

On fera intervenir l'application linéaire associée à la matrice H, puis on utilisera la multilinéarité du déterminant en corrélation avec la colinéarité de certains vecteurs.

Ex. 18.6

On posera Δ_n le déterminant à calculer puis on développera par rapport à la dernière colonne pour obtenir une formule de récurrence.

Ex. 18.10

2. b. *On pourra considérer des racines du polynôme $Q(X)$.*

Corrigé des vrai/faux

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
V	F	V	V	F	F	V	F	V	V

2. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est non inversible : son déterminant vaut 0 et est par ailleurs égal au produit des coefficients diagonaux de A sans que A ne soit triangulaire. À noter que l'énoncé est juste lorsque n est inférieur ou égal à 2.

3. C'est un résultat qui peut se montrer par récurrence sur la taille n des matrices. Lorsque $n = 1$, c'est évident puisque le déterminant vaut alors le coefficient de la matrice à un seul coefficient.
L'hérédité s'effectue en développant par exemple par rapport à une colonne. Le développement d'une matrice de taille $(n+1) \times (n+1)$ fait intervenir une somme de ± 1 multipliés par des déterminants de matrices de taille $n \times n$ et à coefficients entiers. Par hypothèse de récurrence, chaque sous-déterminant est encore un entier, ainsi que le déterminant de la matrice de taille $(n+1) \times (n+1)$ initiale.

5. Les matrices $A = B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donnent un contre-exemple.

9. Plus précisément, le fait de remplacer la première colonne C_1 par la combinaison linéaire $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot C_k$ multipliera le déterminant de la matrice par λ_1.

10. Passer de la matrice A à la matrice symétrique par rapport au centre revient à permuter les colonnes de A par un certain nombre d'interversions de colonnes. Le déterminant obtenu est égal au déterminant initial multiplié par $\varepsilon = \pm 1$. Ensuite, pour obtenir la véritable matrice issue de A en effectuant la symétrie par rapport au centre, cela revient une nouvelle fois à effectuer les mêmes interversions que tout à l'heure mais sur les lignes cette fois. Ainsi, le déterminant se retrouve encore multiplié par le même ε. Au final, comme $\varepsilon^2 = 1$, le déterminant reste inchangé une fois toutes ces interversions effectuées.

Erreurs classiques

- Ne pas confondre n-linéarité et linéarité.
- Ne pas utiliser des opérations de la forme $L_i \longleftarrow L_j - L_i$ ou $C_i \longleftarrow C_j - C_i$, lesquelles transforment le déterminant.
- Ne pas oublier de manipuler des lignes ou des colonnes pour faire apparaître des zéros avant de développer. Ne pas choisir au hasard une ligne ou une colonne pour développer le déterminant. Toujours choisir selon le maximum de zéros.

Corrigé des exercices

Exercice 18.1

*Il s'agit ici d'un cas particulier de déterminant de Vandermonde (**exercice 18.10**).*

1. Afin d'obtenir une expression factorisée de Δ, on calcule ce déterminant par triangulation :

$$\begin{aligned}
\Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} && \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - a \cdot L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - a^2 \cdot L_1 \end{matrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & 0 & (c^2-a^2)-(c-a)(a+b) \end{vmatrix} && L_3 \leftarrow L_3 - (a+b)L_2
\end{aligned}$$

Ce déterminant est triangulaire : il est donc égal au produit de ses coefficients diagonaux.

$$\Delta = (b-a)\big[(c-a)(c+a)-(c-a)(a+b)\big] = (b-a)(c-a)(c-b)$$

2. Pour ce déterminant, nous allons développer suivant une rangée, mais au préalable, faisons apparaître quelques zéros.

$$\begin{aligned}
\Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^3-a^3 & c^3-a^3 \end{vmatrix} && \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - a \cdot L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - a^3 \cdot L_1 \end{matrix} \\
&= \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^3-a^3 & c^3-a^3 \end{vmatrix} && \text{En développant la 1}^{\text{e}}\text{ colonne} \\
&= (b-a)(c-a)\big[c^2+ac-ab-b^2\big] \\
&= (b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c)
\end{aligned}$$

3.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ 1 & \cos b & \cos 2b \\ 1 & \cos c & \cos 2c \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ 0 & \cos b - \cos a & \cos 2b - \cos 2a \\ 0 & \cos c - \cos a & \cos 2c - \cos 2a \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ 0 & \cos b - \cos a & 2(\cos^2 b - \cos^2 a) \\ 0 & \cos c - \cos a & 2(\cos^2 c - \cos^2 a) \end{vmatrix} \qquad \cos 2b = 2\cos^2 b - 1$$

$$= (\cos b - \cos a)(\cos c - \cos a) \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ 0 & 1 & 2(\cos a + \cos b) \\ 0 & 1 & 2(\cos a + \cos c) \end{vmatrix}$$

$$= 2(\cos b - \cos a)(\cos c - \cos a)(\cos c - \cos b)$$

4.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & c+a & b+c \\ ab & ca & bc \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+b & c-b & c-a \\ ab & a(c-b) & b(c-a) \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \end{matrix}$$

$$= (c-a)(c-b) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+b & 1 & 1 \\ ab & a & b \end{vmatrix} \qquad \text{linéarité des lignes}$$

$$= (c-a)(c-b)(b-a)$$

▲

Exercice 18.2

1. Lorsque $n = 1$, le résultat est immédiat. Soit $n \geqslant 1$ tel que le déterminant de toute matrice carrée d'ordre n à coefficients entiers est un antier. Soit A une matrice carrée d'ordre $n+1$. D'après la formule de développement suivant une rangée, le déterminant de A est une combinaison linéaire à coefficients entiers de matrices d'ordre n à coefficients entiers. Par hypothèse de récurrence, tous ces mineurs sont des entiers et il en va donc de même pour le déterminant de A.

Par récurrence, on a bien établi que le déterminant d'une matrice d'entiers est un entier.

2. Lorsque $n = 1$, c'est terminé.

Supposons le résultat vrai au rang n.

Soit A une matrice de taille $(n+1) \times (n+1)$ à coefficients valant ± 1. Le fait de remplacer la première colonne C_1 par $C_1 + C_2$ fait apparaître une

Développer directement par rapport à une colonne ou une ligne ne donne rien.

nouvelle première colonne avec des 0 ou des ± 2, et tout cela sans modifier le déterminant !
Or, on peut mettre en facteur 2 dans cette première colonne. Le développement par rapport à la première colonne nous donne donc un facteur deux multiplié par ± 1 ou bien 0, multiplié par le déterminant de la matrice en ayant supprimé la première colonne et une ligne. Il nous reste un déterminant d'une matrice de taille $n \times n$ avec uniquement des ± 1. Par hypothèse de récurrence, les déterminants de ces matrices sont des multiples de 2^{n-1} et le facteur 2 mis en facteur dans la première colonne fait que le déterminant de la matrice de taille $(n+1) \times (n+1)$ est un multiple de $2 \times 2^{n-1} = 2^n$: la récurrence est terminée. ▲

Exercice 18.3

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ des matrices colonnes. On sait que pour toute matrice M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, le déterminant de la matrice M est en fait égal au déterminant de l'application linéaire canoniquement associée à la matrice M, c'est-à-dire de l'application :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & M \cdot X \end{array}$$

Par conséquent, $\operatorname{Det}(M) = \operatorname{Det}_{\mathcal{B}}(M \cdot e_1, \cdots, M \cdot e_n)$.
Ainsi, $\operatorname{Det}(A+H) = \operatorname{Det}_{\mathcal{B}}(A \cdot e_1 + H \cdot e_1, A \cdot e_2 + H \cdot e_2, \cdots, A \cdot e_n + H \cdot e_n)$. Nous savons que le déterminant est une forme n-linéaire, ce qui implique qu'il nous est autorisé de développer l'expression précédente en une expression assez monstrueuse *a priori* et qui a l'allure suivante :
après développement, on obtient pour formule une somme de 2^n termes de la forme : $\operatorname{Det}_{\mathcal{B}}(x_1, \cdots, x_n)$, où pour tout i entre 1 et n, le vecteur x_i vaut ou bien $A \cdot e_i$, ou bien $H \cdot e_i$.
Parmi ces termes, il y a bien évidemment $\operatorname{Det}_{\mathcal{B}}(A \cdot e_1, \cdots, A \cdot e_n)$, qui vaut $\operatorname{Det} A$; il y a également n termes obtenus en ne choisissant pour les x_i que les $A \cdot e_i$, sauf pour un seul x_j que l'on prend égal à $H \cdot e_j$, ce qui nous donne :

$$\alpha = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Det}_{\mathcal{B}}(A \cdot e_1, \cdots, A \cdot e_{j-1}, H \cdot e_j, A \cdot e_{j+1}, \cdots, A \cdot e_n).$$

Il reste à considérer tous les autres termes. Fort heureusement, ceux-ci sont de la forme $\operatorname{Det}_{\mathcal{B}}(x_1, \cdots, x_n)$, où dans la liste des vecteurs $x_1, \cdots, x_n$, deux au moins ont été choisis égaux à $H \cdot e_i$. Ainsi, il existe dans la liste $x_1, \cdots, x_n$ deux vecteurs au moins appartenant à l'image de l'application $x \mapsto H \cdot x$ dont le rang vaut 1. Autrement dit, ces deux vecteurs au moins choisis dans l'image de H sont colinéaires et la famille $(x_1, \cdots, x_n)$ est liée.
En définitive, le déterminant $\operatorname{Det}_{\mathcal{B}}(x_1, \cdots, x_n)$ est nul et le développement de $\operatorname{Det}(A+H) = \operatorname{Det}_{\mathcal{B}}(A \cdot e_1 + H \cdot e_1, A \cdot e_2 + H \cdot e_2, \cdots, A \cdot e_n + H \cdot e_n)$ se réduit à l'aide des notations précédentes à :

$$\operatorname{Det}(A+H) = \operatorname{Det} A + \alpha.$$

De la même façon, on obtiendrait par développement de $\operatorname{Det}(A-H) = \operatorname{Det}_{\mathcal{B}}(A \cdot e_1 - H \cdot e_1, A \cdot e_2 - H \cdot e_2, \cdots, A \cdot e_n - H \cdot e_n)$, le terme en $\operatorname{Det} A$, où aucun des x_i n'a été choisi égal à $-H \cdot e_i$, puis :

$$\beta = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(A \cdot e_1, \cdots, A \cdot e_{j-1}, -H \cdot e_j, A \cdot e_{j+1}, \cdots, A \cdot e_n),$$

où un seul x_j à été choisi à $-H \cdot e_j$, tous les autres termes étant nuls car correspondant une nouvelle fois à des déterminants de familles liées, d'où $\mathrm{Det}\,(A - H) = \mathrm{Det}\,A + \beta$.
Par multilinéarité du déterminant, on peut écrire pour tout j entre 1 et n :

$$\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(A.e_1, \cdots, A_{e_{j-1}}, -H \cdot e_j, A \cdot e_{j+1}, \cdots, A \cdot e_n) =$$

$$-\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(A.e_1, \cdots, A_{e_{j-1}}, H \cdot e_j, A \cdot e_{j+1}, \cdots, A \cdot e_n)$$

donc $\beta = -\alpha$. En conclusion,

$$\begin{aligned} \mathrm{Det}\,(A+H) \cdot \mathrm{Det}\,(A-H) &= (\mathrm{Det}\,A + \alpha) \cdot (\mathrm{Det}\,A - \alpha) \\ &= \mathrm{Det}\,(A)^2 - \alpha^2 \\ &\leqslant (\mathrm{Det}\,A)^2. \end{aligned}$$

▲

Exercice 18.4

Nous allons procéder par manipulations sur les colonnes et les lignes de la matrice :

$$\mathrm{Det}\,A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & n-2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & \vdots \\ n-2 & n-3 & \cdots & 0 & 1 \\ n-1 & n-2 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & -1 & \ddots & \ddots & 1 \\ n-2 & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ n-1 & -1 & \cdots & \ddots & -1 \end{vmatrix} \quad C_i \longleftarrow C_i - C_{i-1}, \text{ pour } i \geqslant 2$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 2 \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad L_i \longleftarrow L_i + L_1 \text{ pour } i \geqslant 2$$

$$= (-1)^{n+1} \cdot (n-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l}\text{développement} \\ \text{dernière ligne}\end{array}$$

$$= (-1)^{n+1} \cdot (n-1) \cdot 2^{n-2} \quad \text{matrice triangulaire supérieure !}$$

▲

Exercice 18.5

On va utiliser la formule entre coefficients binomiaux :

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}.$$

On va effectuer des manipulations sur les lignes ou les colonnes pour faire apparaître un maximum de zéros dans la matrice, puis ensuite développer par rapport à une colonne ou une ligne.

$\boxed{3}$ On remplace la ligne L_{p+1} par $L_{p+1}-L_p$, puis L_p par L_p-L_{p-1}, etc. jusqu'à remplacer la ligne L_2 par la ligne L_2-L_1. Après toutes ces manipulations qui ne modifient pas le déterminant, on obtient que Det A est égal au déterminant de la matrice de première ligne inchangée, puis à partir de la deuxième ligne : le coefficient ligne $i \geqslant 2$ et colonne j vaut :

$$\begin{aligned} b_{ij}=a_{ij}-a_{(i-1)j} &= \binom{n+i-1}{j-1}-\binom{n+i-2}{j-1} \\ &= \binom{n+i-2}{j-2} \\ &= a_{(i-1)(j-1)}, \end{aligned}$$

avec la convention que si $j=1$, alors $\binom{n+i-2}{j-2}=0$.

$\boxed{1}$ La première colonne de cette nouvelle matrice n'est constitué que d'un seul 1, puis uniquement des 0. Par développement, le déterminant de A est égal au déterminant de la matrice $(a_{(i-1)(j-1)})_{2\leqslant i,j\leqslant p+1}=(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant p}$.

$\boxed{2}$ En procédant par récurrence, on montre que les matrices $(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant p}$, $(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant p-1}$, jusqu'à $(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant 1}$ (qui est la matrice à un seul coefficient valant 1) ont tous le même déterminant. La réponse est : Det $A=1$. ▲

Exercice 18.6

Développer par rapport à la première colonne n'est pas une bonne idée car la matrice de départ comporte un premier coefficient diagonal égal à $\cos\theta$ alors que tous les autres sont identiques.

On pose Δ_n le déterminant à calculer. Le développement par rapport à la dernière colonne fournit :

$$\Delta_n=2\cos\theta\cdot\Delta_{n-1}-\begin{vmatrix} \cos\theta & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Le développement du dernier déterminant par rapport à la dernière ligne donne Δ_{n-2} (deux colonnes et lignes en moins par rapport au déterminant initial), d'où une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 :

$$\begin{cases} \Delta_1=\cos\theta \\ \Delta_2=2\cos^2\theta-1=\cos 2\theta \\ \forall n\in\mathbb{N}^\star,\quad \Delta_{n+2}=2\cos\theta\cdot\Delta_{n+1}-\Delta_n. \end{cases}$$

On pose $P(X)$ le polynôme caractéristique de la relation de récurrence linéaire :

$$P(X)=X^2-2\cos\theta\cdot X+1=(X-e^{i\theta})(X-e^{-i\theta}).$$

Lorsque $e^{i\theta} \neq e^{-i\theta}$ (donc lorsque $\theta \neq 0[\pi]$), on sait que Δ_n est de la forme :

$$\Delta_n = \kappa_1 \cdot (e^{i\theta})^n + \kappa_2 \cdot (e^{-i\theta})^n = \kappa_1 \cdot e^{in\theta} + \kappa_2 \cdot e^{-in\theta},$$

avec κ_1 et κ_2 deux constantes complexes. Ces deux constantes vérifient le système :

Dans la résolution des suites récurrentes linéaires d'ordre deux, il y a distinction de cas selon que les deux racines du polynôme caractéristique soient confondues ou différentes.

$$\begin{cases} \kappa_1 \cdot e^{i\theta} + \kappa_2 \cdot e^{-i\theta} = \Delta_1 = \cos\theta = \dfrac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \\ \kappa_1 \cdot e^{2i\theta} + \kappa_2 \cdot e^{-2i\theta} = \Delta_2 = \cos 2\theta = \dfrac{1}{2}(e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}) \end{cases}$$

Une solution évidente - et on sait que c'est la seule ! - est $\kappa_1 = \kappa_2 = \dfrac{1}{2}$. Ainsi, lorsque $\theta \neq 0[\pi]$, $\Delta_n = \dfrac{1}{2} \cdot (e^{in\theta} + e^{-in\theta}) = \cos n\theta$.

Lorsque $\theta = 0[\pi]$, donc $e^{i\theta} = e^{-i\theta} = \pm 1 = \varepsilon$ soit on recommence les calculs, sachant que Δ_n sera sous la forme : $\Delta_n = (\kappa_1 \cdot n + \kappa_2) \cdot \varepsilon^n$ et on trouve $\kappa_1 = 0$ et $\kappa_2 = 1$, soit on utilise ce que l'on a fait :

on fixe l'entier $n \in \mathbb{N}^\star$. L'application $\theta \mapsto \Delta_n(\theta)$ est manifestement continue en tant que somme (de $n!$ termes de produits (de n termes) de fonctions continues (au choix : fonctions constantes ou cosinus)). La fonction $\theta \mapsto \cos n\theta$ est également continue. Si $\theta = 0[\pi]$, pour ε très petit, on a : $\theta + \varepsilon \neq 0[\pi]$ et :

Méthode qui a l'avantage de sortir de l'ordinaire.

$$\Delta_n(\theta) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \Delta_n(\theta + \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \cos n(\theta + \varepsilon) = \cos n\theta.$$

En conclusion, $\Delta_n = \cos n\theta$, pour n'importe quel angle θ. ▲

Exercice 18.7

1. Soit $n \geqslant 3$. Développons D_n suivant sa n-ième colonne. Il vient :

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 2 & \ddots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \cdot & n-2 & -2 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdot & n-1 & -2 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & n(n-1) & n \end{vmatrix}_n$$

$$= nD_{n-1} + 2 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdot & n-2 & -2 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & n(n-1) \end{vmatrix}_{n-1}$$

En développant ce déterminant d'ordre $n-1$ par rapport à sa dernière ligne, il en résulte finalement $D_n = nD_{n-1} + 2D_{n-2}$.

2. D'après la question précédente, $(u_n)_{n \geqslant 1}$ vérifie pour tout $n \geqslant 3$

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{D_n}{n!} = \frac{nD_{n-1} + 2D_{n-2}}{n!} = \frac{D_{n-1}}{(n-1)!} + 2\frac{D_{n-2}}{(n-2)!} \\ &= u_{n-1} + 2u_{n-2} \end{aligned}$$

Autrement dit, $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Elle est entièrement déterminée par la donnée de ses deux premiers termes et de la relation de récurrence. Plus précisément, l'équation caractéristique de cette suite récurrente est $r^2 - r - 2 = 0$ qui admet pour racines simples -1 et 2. Par conséquent, $(u_n)_n$ s'écrit comme combinaison linéaire des suites géométriques $\left((-1)^n\right)_n$ et $\left(2^n\right)_n$. Il existe un couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, unique, tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_n = \lambda(-1)^n + \mu\, 2^n.$$

En résolvant un système d'inconnues λ et μ.

Comme $u_1 = D_1 = 1$ et $u_2 = \dfrac{D_2}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$, on en déduit finalement que $\forall n \geqslant 1, u_n = \frac{1}{3}\left(2^{n+1} - (-1)^{n+1}\right)$. Finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad D_n = \frac{n!}{3}\left(2^{n+1} - (-1)^{n+1}\right).$$

▲

Exercice 18.8

1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Développons $\Delta_{n+1} = \Delta(a_0, \ldots, a_n; x)$ par rapport à sa première colonne :

$$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & x & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & x \end{vmatrix}_{n+1}$$

$$= a_n \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & x \end{vmatrix}_n + 1 \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & x & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & x \end{vmatrix}_n$$

Le premier déterminant d'ordre n est triangulaire, il est donc égal au produit de ses coefficients diagonaux, soit x^n. Le second quant à lui est le *petit frère* de Δ_{n+1}, à savoir $\Delta_n = \Delta(a_0, \ldots, a_{n-1}; x)$. Finalement

$$\Delta(a_0, \ldots, a_n; x) = a_n\, x^n + \Delta(a_0, \ldots, a_{n-1}; x)$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Par itération, il vient

$$\begin{aligned} \Delta(a_0, \ldots, a_n; x) &= a_n x^n + \Delta(a_0, \ldots, a_{n-1}; x) \\ &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \Delta(a_0, \ldots, a_{n-2}; x) \\ &\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \ddots \\ &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + \Delta(a_1, x) \end{aligned}$$

Comme $\Delta(a_1, x) = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ -1 & x \end{vmatrix} = a_1 x + a_0$, il en résulte finalement que

$$\Delta(a_0, \ldots, a_n; x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n.$$

▲

Exercice 18.9

1. Nous allons utiliser le déterminant de la famille (e_1, e_2, e_3) selon la base canonique, pour savoir si ce déterminant est non nul ou pas.
En notant $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on obtient :

$$\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(e_1, e_2, e_3) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & m \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & m & 1 \end{vmatrix}.$$

Plutôt que de s'acharner à combiner les colonnes ou les lignes pour faire apparaître d'autrs zéros, le mieux pour des matrices de taille raisonnable est de développer directement, ce que nous allons faire par rapport à la deuxième colonne :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 3 & m \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & m & 1 \end{vmatrix} &= (-3) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (-m) \cdot \begin{vmatrix} 1 & m \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (-3) \times 3 - m \times (1 - 2m) \\ &= 2m^2 - m - 9. \end{aligned}$$

2. Premièrement, l'application f est bien linéaire (par linéarité de la dérivation, de la composition à droite par $(X + 2)$ et de l'évaluation en 1). Ensuite, il s'agit bien d'un endomorphisme car si $\deg(P) \leqslant 3$, alors $\deg(f(P)) \leqslant 3$.
Deuxièmement, nous allons calculer la matrice A représentant l'endomorphisme selon la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$. On obtient successivement les colonnes de la matrice A.

- $f(1) = X^3 - 1$.
- $f(X) = X + X^3 - 1$.
- $f(X^2) = X \times 2(X + 2) + X^3 - 1 = X^3 + 2X^2 + 4X - 1$.
- $f(X^3) = X \times 3(X + 2)^2 + X^3 - 1 = 4X^3 + 12X^2 + 12X - 1$.

On en déduit la matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 12 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}).$$

On effectue l'opération $L_4 \longleftarrow L_4 + L_1$, ce qui donne la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

On aboutit à une matrice triangulaire supérieure. Le déterminant de cette matrice est égal au produit des coefficients diagonaux. En définitive :

$$\mathrm{Det}\,(f) = \mathrm{Det}\,(A) = -6.$$

Comme $\mathrm{Det}\,(f) \neq 0$, on en déduit que l'endomorphisme f est en fait un automorphisme de l'espace $\mathbb{R}_3[X]$. ▲

Corrigé

Exercice 18.10

1. Dire que le cardinal de l'ensemble $\{x_0, \ldots, x_n\}$ est inférieur ou égal à n signifie que dans la liste $x_0, \ldots, x_n$, il y a au moins deux fois le même nombre. Cela implique que la matrice $(x_i^j)_{0 \leqslant i,j \leqslant n}$ comporte au moins deux lignes identiques : le déterminant de la matrice correspondante est nul.

2.

a. Soit z dans $\mathbb{C}$. Le développement du déterminant $Q(z)$ par rapport à la dernière ligne donne une expression de la forme :

$$Q(z) = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot z + \cdots + \alpha_{n+1} \cdot z^{n+1}.$$

La fonction $z \mapsto Q(z)$ est polynomiale de degré inférieur ou égal à $(n+1)$ pour l'instant. Or, le terme α_{n+1} correspond exactement au terme $\mathcal{V}_n(x_0, \ldots, x_n) \neq 0$. Le degré est exactement $(n+1)$.

b. Dès que z appartient à l'ensemble $\{x_0, \ldots, x_n\}$, d'après la première question, on a : $Q(z) = 0$. On dispose de la forme factorisée du polynôme $Q(z)$ d'après la question précédente :

$$Q(z) = \xi \cdot \prod_{k=0}^{n} (z - x_k), \qquad \text{avec } \xi = \mathcal{V}_n(x_0, \ldots, x_n).$$

Une récurrence était cachée dans la question !

3. Les questions précédentes permettent de montrer par récurrence la propriété : «si $x_0, \ldots, x_n$ sont différents, alors $\mathcal{V}_n(x_0, \ldots, x_n) \neq 0$». L'initialisation donne pour $n = 0$, $\mathcal{V}(x_0) = 1$ et la question précédente fournit $Q(x_{n+1}) \neq 0$ lorsque les nombres $x_0, \cdots, x_{n+1}$ sont tous différents.
On démontre finalement la formule par une nouvelle récurrence. Lorsque $n = 0$, $\mathcal{V}(x_0) = 1$ qui correspond au produit vide et la formule est vraie. Supposons la formule vraie au rang n. Au rang $(n+1)$, on sait que si les x_i pour i entre 0 et n sont différents, alors :

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(x_0, \cdots, x_{n+1}) = Q(x_{n+1}) &= \mathcal{V}(x_0, \ldots, x_n) \cdot \prod_{k=0}^{n} (x_{n+1} - x_k) \\
&= \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i) \cdot \prod_{k=0}^{n} (x_{n+1} - x_k) \\
&= \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n+1} (x_j - x_i).
\end{aligned}$$

Lorsque dans la liste $x_0, \ldots, x_n$ figurent au moins deux nombres identiques, la formule est encore vraie car tout vaut 0. Par récurrence, on a ce qu'il faut.

▲

Exercice 18.11

Pour des raisons de dimensions ($\dim(\mathbb{C}_n[X]) = n+1 = \dim(\mathbb{C}^{n+1})$), il suffit de montrer que l'application φ qui est clairement linéaire est en fait injective : par le théorème du rang, elle sera aussi surjective.
Nous développons deux méthodes pour aboutir à l'injectivité de φ.

• Première méthode

Soit $P(X)$ dans le noyau de φ. Alors, les nombres $z_0, \cdots, z_n$ sont des racines du polynôme $P(X)$, lequel a donc strictement plus de racines que son degré : il s'agit du polynôme nul et le noyau de φ est réduit à $\{0\}$.

• **Seconde méthode**

La matrice représentant l'application linéaire φ selon la base canonique de $\mathbb{C}_n[X]$ qui n'est autre que la base $(1, X, \cdots, X^n)$ pour le départ et la base canonique $(e_1, \cdots, e_{n+1})$ de $\mathbb{C}^{n+1}$ pour l'arrivée est exactement la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & z_0 & \cdots & z_0^n \\ 1 & z_1 & \cdots & z_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & z_n & \cdots & z_n^n \end{pmatrix}.$$

On reconnaît une matrice de Vandermonde dont le déterminant vaut :

$$\prod_{0 \leqslant k < \ell \leqslant n} (z_\ell - z_k) \neq 0.$$

La matrice A est donc inversible, correspondant à un isomorphisme φ. ▲

Exercice 18.12

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Calculer le déterminant de l'endomorphisme $f - \lambda \cdot Id_{\mathbb{R}^3}$ revient à calculer le déterminant de sa matrice représentative dans n'importe quelle base de $E = \mathbb{R}^3$. Plaçons-nous dans la base canonique. On a :

$$\begin{aligned} \mathrm{Det}\,(f - \lambda \cdot Id_{\mathbb{R}^3}) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2\lambda & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} \\ &= \lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 5 & 2 \\ 1 & 4-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 5 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda(\lambda+1)(\lambda-5) \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{Det}\,(f - \lambda \cdot Id_{\mathbb{R}^3}) = 0$ uniqment lorsque $\lambda \in \{0, -1, 5\}$.

2. Pour chaque valeur $\lambda \in \{0, -1, 5\}$, $f - \lambda \cdot Id_{\mathbb{R}^3}$ n'est pas un isomorphisme d'après le **théorème 18.7**. D'après la **caractérisation des isomorphismes en dimension finie**, il s'ensuit que ces endomorphismes ne sont pas injectifs : leurs noyaux ne sont donc pas réduits au seul vecteur nul ! Théorème 16.17

• **Lorsque** $\lambda = 0$. Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. x appartient au noyau de f si et seulement si $f(x) = 0_E$. En traduisant cette équation vectorielle dans la base canonique, nous obtenons le système :

$$f(x) = 0_E \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x_2 + 2x_3 &=& 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &=& 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 &=& 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 &=& 3x_3 \\ x_2 &=& -2x_3 \end{array} \right.$$

D'où

$$\mathrm{Ker}\, f = \mathsf{Vect}\,(\epsilon_1), \text{ où } \epsilon_1 = (3, -2, 1).$$

• **Lorsque** $\lambda = -1$ **ou** $\lambda = 5$. En résolvant de la même manière les équations vectorielles $f(x) + x = 0_E$ et $f(x) - 5x = 0_E$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}\,(f + Id) &= \mathsf{Vect}\,(\epsilon_2), \text{ où } \epsilon_2 = (-5, 1, 2) \\ \mathrm{Ker}\,(f - 5Id) &= \mathsf{Vect}\,(\epsilon_3), \text{ où } \epsilon_3 = (1, 1, 2) \end{aligned}$$

3. Posons $\mathcal{B}' = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ et montrons que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, il suffit, d'après le **théorème 18.4** de vérifier que son déterminant selon la base canonique est non nul. La matrice représentative de $\mathcal{B}'$ dans la base canonique s'écrit

$$\mathsf{M}_{\mathcal{B}}(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Son déterminant se calcule facilement :

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -30$$

Ainsi, la famille $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$. De plus, comme

$$\begin{array}{rcrl} f(\epsilon_1) & = & 0_E & = 0 \cdot \epsilon_1 + 0 \cdot \epsilon_2 + 0 \cdot \epsilon_3 \\ f(\epsilon_2) & = & -\epsilon_2 & = 0 \cdot \epsilon_1 - 2 \cdot \epsilon_2 + 0 \cdot \epsilon_3 \\ f((\epsilon_3) & = & 5 \cdot \epsilon_3 & = 0 \cdot \epsilon_1 + 0 \cdot \epsilon_2 + 5 \cdot \epsilon_3 \end{array},$$

la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}'$ s'écrit

$$D = \mathsf{M}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

▲

Chapitre 19
Intégration

UN MATHÉMATICIEN

Gottfried Leibniz étudie la philosophie, le droit et la théologie ; il ne se tourne que tardivement vers les mathématiques. Dans les années 1670, il publie plusieurs articles dans lesquels on trouve toutes les bases du calcul différentiel et du calcul intégral. Il propose des pistes innovantes dans différents domaines des mathématiques qui seront reprises deux siècles plus tard dans la genèse de la théorie des ensembles et de la logique mathématique.

Un peu d'histoire

Au XVIe et au XVIIe siècle de nombreux mathématiciens se sont posés deux problèmes à l'apparence différents. Le premier était la recherche d'une méthode générale pour calculer l'équation de la tangente à une courbe en un point ; de nos jours ceci correspond à calculer la dérivée en ce point. Le second était la recherche de l'aire sous une courbe ce qui pour nous revient à en calculer l'intégrale et donc à rechercher une primitive. Newton et Leibniz, chacun de son côté, ont montré que ceci consistait à deux opérations inverses l'une de l'autre ; ainsi naissait le calcul différentiel et son pendant, le calcul intégral. Cette découverte a permis des progrès spectaculaires en physique et en astronomie tout au long du XVIIIe siècle.

Objectifs

les incontournables

- Reconnaître une somme de Riemann et calculer la limite d'une suite correspondante.
- Savoir calculer une primitive ou une intégrale :
  - d'un polynôme trigonométrique ;
  - d'une fraction rationnelle dans des cas simples.
- Utiliser une intégration par parties :
  - pour calculer une intégrale ;
  - pour trouver une relation de récurrence qui permette le calcul d'une intégrale.

et plus si affinités

- Utiliser les propriétés de l'intégrale :
  - pour étudier une suite d'intégrales ;
  - pour étudier une fonction définie à l'aide d'une intégrale.

Résumé de cours

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Intégrale des fonctions continues sur un segment

Fonctions en escalier

Définition : *Une* ***subdivision*** *de $[a,b]$ est une suite finie $\sigma = (a_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ strictement croissante avec $a_0 = a$ et $a_n = b$. On peut alors écrire :*

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b.$$

On note $\Delta a_k = a_k - a_{k-1}$, pour $k \in [\![1,n]\!]$.

Définition : *On appelle* ***fonction en escalier*** *sur $[a,b]$ toute fonction φ définie sur $[a,b]$ pour laquelle il existe une subdivision $\sigma = (a_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ de $[a,b]$ vérifiant*

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ \exists\, \lambda_k \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \,]a_{k-1},\, a_k[\,,\ \varphi(x) = \lambda_k.$$

On dit que la subdivision σ introduite plus haut **est subordonnée** *à φ.*

On peut définir l'intégrale d'une fonction en escalier sur $[a,b]$ comme aire de la région délimitée par le graphe de φ et l'axe des abscisses. Plus précisément si $\sigma = (a_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une subdivision subordonnée à φ, alors l'**intégrale de φ sur** $[a,b]$, est le nombre réel $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, \Delta a_k$.

Intégrale d'une fonction continue sur un segment

Définition : *Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$. Pour toute subdivision $\sigma = (a_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ de $[a,b]$, on définit les* ***sommes de Darboux*** *de f par*

- $I(f,\sigma) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} m_k\, \Delta a_k$, *où on a noté pour $k \in [\![1,n]\!]$, $m_k = \displaystyle\inf_{[a_{k-1},a_k]} f$.*
- $S(f,\sigma) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} M_k\, \Delta a_k$, *où on a noté pour $k \in [\![1,n]\!]$, $M_k = \displaystyle\sup_{[a_{k-1},a_k]} f$.*

Théorème-Définition 19.1.— Intégrale d'une fonction continue sur $[a,b]$ —.
Avec les notations ci-dessus, $\displaystyle\sup_{\sigma} I(f,\sigma) = \inf_{\sigma} S(f,\sigma)$

les bornes inf et sup étant prises sur toutes les subdivisions de $[a,b]$. Ainsi

$$\boxed{\sup\left\{\sum_{k=1}^{n} m_k\, \Delta a_k\ ;\ \sigma \text{ subdivision de } [a,b]\right\} = \inf\left\{\sum_{k=1}^{n} M_k\, \Delta a_k\ ;\ \sigma \text{ subdivision de } [a,b]\right\}}$$

On appelle intégrale de a à b de f, et on note $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ ou $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ la valeur commune de ces bornes inférieure et supérieure.

Interprétation : l'intégrale de f est l'aire algébrique de la portion de plan située entre le graphe de f et l'axe des abscisses. Cette aire est comptée positivement lorsque le graphe est au-dessus des l'axe des abscisses et négativement dans le cas contraire.

■ Propriétés de l'intégrale

Propriétés fondamentales de l'intégrale des fonctions continues

Théorème 19.2.— Soit $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ des fonctions continues, $c \in [a,b]$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors

- **Linéarité**
  $\displaystyle\int_{[a,b]} (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g$;
- **Relation de Chasles**
  $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$;
- **Croissance**
  si $f \leqslant g$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} g$;
- **Positivité**
  si $f \geqslant 0$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f \geqslant 0$.

Croissance de l'intégrale des fonctions continues

À partir des propriétés de croissance et de positivité de l'intégrale, on déduit :

Théorème 19.3.— Estimations d'intégrales —. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On note $m = \inf_{[a,b]} f$ et $M = \sup_{[a,b]} f$.

- **Encadrement d'une intégrale**
  $\displaystyle m(b-a) \leqslant \int_{[a,b]} f \leqslant M(b-a)$;
- **Inégalité triangulaire intégrale**
  $\displaystyle\left|\int_{[a,b]} f\right| \leqslant \int_{[a,b]} |f|$.

Définie-positivité de l'intégrale des fonctions continues

Proposition 19.4.— Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ une fonction **continue et positive** sur le segment $[a,b]$. Alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0 \text{ avec égalité si et seulement si } f \text{ est identiquement nulle.}$$

Remarque : on appliquant ceci à la différence $f - g$ de deux fonctions continues, on obtient un cas d'égalité intéressant dans la propriété de croissance de l'intégrale des fonctions continues.

Valeur moyenne d'une fonction continue

On déduit du **théorème 10.12**.

Théorème 19.5.— Soit $f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$.

$$\text{Il existe } c \in [a,b] \text{ tel que } \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt = f(c)$$

Sommes de Riemann d'une fonction continue

Définition : *Soit $f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$. Les sommes de Riemann $\left(I_n(f)\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $\left(J_n(f)\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ de f sont les suites définies par : $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $I_n(f) = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)$, $J_n(f) = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(a_k)$, où on a noté pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $a_k = a + k \cdot \dfrac{b-a}{n}$.*

Théorème 19.6.— Sommes de Riemann —. Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. Les sommes de Riemann de f $\big(I_n(f)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\big(J_n(f)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont des suites convergentes et :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n(f) = \lim_{n\to+\infty} J_n(f) = \int_a^b f(t)\,dt}$$

■ Intégrale des fonctions continues à valeurs dans $\mathbb{C}$

Définition : *On dit que $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ est* ***continue*** *si les deux fonctions à valeurs réelles $\mathfrak{Re}\, f$ et $\mathfrak{Im}\, f$ sont continues. On note $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues à valeurs dans $\mathbb{C}$.*

Définition : *Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})$. On note $u = \mathfrak{Re}\, f$, $v = \mathfrak{Im}\, f$. L'intégrale de f sur $[a,b]$ est le nombre complexe défini par $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)\,dt$.*

Remarques : en appliquant les résultats analogues à u et à v, on vérifie que l'intégrale de fonctions continues à valeurs complexes est linéaire et satisfait la relation de Chasles. Les propriétés liées à l'ordre n'ont plus de sens dans le cadre complexe, néanmoins on a

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

■ Lien fondamental entre intégrale et primitive

Intégrale fonction de sa borne supérieure

Théorème 19.7.— Soit $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})$, une fonction continue sur un intervalle, $a \in I$ et $F : I \to \mathbb{K}$ définie par $\forall x \in I,\ F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$. Alors F est dérivable sur I et :

$$\boxed{\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x)}$$

Primitives d'une fonction continue

Définition : *Soit $g, G : I \to \mathbb{K}$. On dit que G est une* ***primitive*** *de g sur I si G est dérivable dans I et $\forall x \in I, G'(x) = g(x)$.*

Remarque : si G est une primitive de g dans I, alors la fonction $G + C$, où $C \in \mathbb{K}$, l'est aussi.

Ainsi, la fonction F construite précédemment est une primitive de f sur l'intervalle I.

Théorème 19.8.— Primitives d'une fonction continue —. Soit $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})$. Alors f possède des primitives sur I. Plus précisément, si $a \in I$ et $A \in \mathbb{K}$ l'unique primitive $F_{a,A}$ de f sur I, qui s'annule au point a est définie par $\forall x \in I, \quad F_{a,A}(x) = A + \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$.

Notation : *le symbole $\displaystyle\int^x f(t)\,dt$ désigne une primitive quelconque de f. Il s'agit donc en fait d'une famille de fonctions définies à une constante additive près.*

Théorème fondamental du calcul intégral

L'existence des primitives d'une fonction continue découle des propriétés de l'intégrale. Inversement, la connaissance d'une primitive permet de calculer les intégrales.

Théorème 19.9.— Théorème fondamental du calcul intégral —. Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ et F une primitive *quelconque* de f sur I, alors

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = \Big[F(t)\Big]_a^b = F(b) - F(a)}$$

Corollaire 19.10.— En particulier, si $f \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{K})$ et $a \in I$, alors $\forall x \in I,\ f(x) - f(a) = \displaystyle\int_a^x f'(t)\,dt$.

Calculs d'intégrales et de primitives

Le **théorème 19.9** permet d'obtenir d'autres outils pour le calcul d'intégrales :

Théorème 19.11.— Intégration par parties —. Soit $(u,v) \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{K})^2$, alors

$$\boxed{\int_a^b u'(t) \times v(t)\,dt = \Big[u(t) \times v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t) \times v'(t)\,dt}$$

Théorème 19.12.— Changement de variable —. Soit I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $\varphi : J \to I$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue et $(\alpha,\ \beta) \in J^2$. Alors :

$$\boxed{\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,du}$$

■ Formules de Taylor

Théorème 19.13.— Formule de Taylor avec reste intégral —. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel et f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I contenant a. Alors

$$\boxed{\forall x \in I, \quad f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\,(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,f^{(n+1)}(t)\,dt}$$

Théorème 19.14.— Inégalité de Taylor-Lagrange —. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I contenant a et $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall t \in I,\ \left|f^{(n+1)}(t)\right| \leqslant M$. Alors

$$\boxed{\forall x \in I, \quad \left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k\right| \leqslant M\ \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}}$$

Méthodes

Techniques de calcul de primitives et d'intégrales

Les prochains paragraphes complètent les techniques de calcul développées au premier semestre (**méthode 8.1**).

Démarche générale

Tout calcul d'intégrale repose sur le **théorème fondamental du calcul intégral** (**théorème 19.9**) qui fait le lien entre intégrales et primitives.

Méthode 19.1.— Comment calculer une intégrale

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$. Pour calculer $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$

- On peut «intégrer à vue» lorsqu'on reconnaît une primitive usuelle (voir page 224).
- Si f est combinaison linéaire de fonctions usuelles, vous exploitez la linéarité de l'intégrale.
- Lorsque f peut s'écrire comme produit, vous pouvez envisager une intégration par parties.
- Lorsque f est composée de fonctions usuelles, vous pouvez effectuer un changement de variable.

Remarque : comme les primitives d'une fonction continue sur un intervalle s'écrivent sous la forme $\displaystyle\int^x f(t)\,dt$, toutes ces techniques de calcul s'appliquent aussi au calcul de primitives.

Mise en œuvre : pour toutes les techniques présentées ci-après voir **exercice 19.1**, **exercice 19.2**

Intégration d'une fraction rationnelle

Soit $F(t) = \dfrac{P(t)}{Q(t)}$ une fraction rationnelle. Pour intégrer F, on commence par la décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ (**méthode 13.10**). Ainsi, $F(t)$ s'écrit comme combinaison linéaire de fonctions du type

$$t \mapsto t^n,\ t \mapsto \frac{1}{(t-a)^n},\ t \mapsto \frac{ct+d}{(t^2+at+b)^n}$$

où $n \in \mathbb{N}$, $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ et $a^2 - 4b < 0$.

Par linéarité de l'intégrale, on se ramène à intégrer des éléments simples de première et deuxième espèces.

Méthode 19.2.— Comment intégrer un élément simple de première espèce

Soit $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

- Si $n = 1$, alors $\displaystyle\int^x \frac{dt}{t-a} = \ln\left(|x-a|\right) + C$, pour $I \subset \mathbb{R} \setminus \{a\}$.
- Si $n \geqslant 2$, alors $\displaystyle\int^x \frac{dt}{(t-a)^n} = \frac{1}{1-n}\,\frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C$, pour $I \subset \mathbb{R} \setminus \{a\}$.

❑ Méthode 19.3.— Comment intégrer un élément simple de deuxième espèce
Soit $a \in \mathbb{R}^\star$.

- $\displaystyle\int^x \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\text{Arctan}\left(\frac{x}{a}\right) + C$, pour $I \subset \mathbb{R}$.
- $\displaystyle\int^x \frac{t\,dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{2}\ \ln\left(x^2+a^2\right) + C$, pour $I \subset \mathbb{R}$.

❑ Méthode 19.4.— Comment intégrer une fraction rationnelle
Soit $F(t)$ une fraction rationnelle à coefficients réels. Pour déterminer ses primitives sur tout intervalle de continuité :

$\boxed{1}$ Présentez F sous forme irréductible.
$\boxed{2}$ Si F peut se factoriser sous la forme $F(t) = t^{n-1}G(t^n)$, posez $u = t^n$.
$\boxed{3}$ Puis effectuez la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle obtenue.
$\boxed{4}$ Intégrez terme à terme.

Exemple : déterminons les primitives de $F : t \mapsto \dfrac{1}{t^3+1}$ sur $I \subset \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ On a $t^3+1 = (t+1)(t^2-t+1)$ et la décomposition de F en éléments simples s'écrit

$$F(t) = \frac{1}{t^3+1} = \frac{1}{(t+1)(t^2-t+1)} = \frac{a_0}{t+1} + \frac{b_0+b_1t}{t^2-t+1}$$

Déterminons les coefficients à l'aide de la **méthode 13.10** :

- $(t+1)F(t) = \frac{1}{t^2-t+1} \xrightarrow[t=-1]{} a_0 = \frac{1}{3}$
- $tF(t) = \frac{t}{t^3+1} \xrightarrow[t\to\infty]{} a_0 + b_1 = 0$ d'où l'on tire $b_1 = -\frac{1}{3}$
- $F(t) = \frac{1}{t^3+1} \xrightarrow[t=0]{} a_0 + b_0 = 1$ d'où l'on tire $b_0 = \frac{2}{3}$

Ainsi $F(t) = \dfrac{1}{3}\,\dfrac{1}{t+1} + \dfrac{1}{3}\,\dfrac{2-t}{t^2-t+1}$.

$\boxed{4}$ Pour intégrer $\dfrac{2-t}{t^2-t+1}$, on fait apparaître une dérivée logarithmique :

$$\begin{aligned}\int^x \frac{dt}{t^3+1} &= \frac{1}{3}\int^x \frac{dt}{t+1} - \frac{1}{3}\int^x \frac{t-2}{t^2-t+1}\,dt = \frac{1}{3}\int^x \frac{dt}{t+1} - \frac{1}{3}\,\frac{1}{2}\int^x \frac{(2t-1)-3}{t^2-t+1}\,dt \\ &= \frac{1}{3}\int^x \frac{dt}{t+1} - \frac{1}{6}\int^x \frac{(2t-1)}{t^2-t+1}\,dt + \frac{1}{2}\int^x \frac{dt}{t^2-t+1}\end{aligned}$$

Or $\displaystyle\int^x \frac{dt}{t+1} = \ln(|x+1|) + C$, $\displaystyle\int^x \frac{(2t-1)}{t^2-t+1}\,dt = \ln(|x^2-x+1|) + C$ et
$\displaystyle\int^x \frac{dt}{t^2-t+1} = \int^x \frac{dt}{(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\text{Arctan}\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)\right]^x$.
Finalement, $\displaystyle\int^x \frac{dt}{t^3+1} = \frac{1}{3}\ln(|x+1|) - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\text{Arctan}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$.

Intégration par parties

Lorsque l'intégrande $f(t)$ s'écrit sous la forme d'un produit, on peut intégrer par parties.

> ❑ **Méthode 19.5.— Comment utiliser la formule de l'intégration par parties**
>
> 1 On identifie clairement u' et v :
>
> $$\left\| \begin{array}{ll} u'(t) = \cdots & v(t) = \cdots \\ u(t) = \cdots & v'(t) = \cdots \end{array} \right.$$
>
> *Au passage, on vérifie que u et v sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$.*
>
> 2 Puis on écrit $\displaystyle\int_a^b u'(t)v(t)\,dt = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,dt$.
>
> 3 Il reste à intégrer $u(t)v'(t)$.

Exemple : déterminons les primitives sur $I \subset \mathbb{R}$ de la fonction (de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$) $t \mapsto \sqrt{1+t^2}$. Pour cela, effectuons une intégration par parties en posant

$$\left\| \begin{array}{ll} u'(t) = 1 & v(t) = \sqrt{1+t^2} \\ u(t) = t & v'(t) = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \text{On a } \int^x 1 \times \sqrt{1+t^2}\,dt &= \Big[t\sqrt{1+t^2}\Big]^x - \int^x \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}\,dt = \Big[t\sqrt{1+t^2}\Big]^x - \int^x \frac{(1+t^2)-1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt \\ &= \Big[t\sqrt{1+t^2}\Big]^x - \int^x \sqrt{1+t^2}\,dt + \int^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} \end{aligned}$$

On en déduit que $2\displaystyle\int^x \sqrt{1+t^2}\,dt = x\sqrt{1+x^2} + \ln(x+\sqrt{x^2+1})$, d'où l'on tire en définitive

$$\int^x \sqrt{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+1}) + C.$$

Intégration par changement de variable

> ❑ **Méthode 19.6.— Comment effectuer un changement de variable**
>
> $$\int_a^b f \circ \varphi(t) \times \varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,du$$
>
> La formule de changement de variable opère dans les deux sens :
>
> - pour rédiger une intégration à vue *perçante*, vous pouvez poser $u = \varphi(t)$;
> - pour calculer l'intégrale $\int_a^b f(u)\,du$, à l'aide du changement de variable $u = \varphi(t)$.
>
> Dans tous les cas, la méthode est la suivante :
>
> 1 On pose $u = \varphi(t)$.
>
> 2 On dérive formellement $du = \varphi'(t)\,dt$.
>
> 3 On remplace TOUT ! sans oublier les nouvelles bornes !

Exemple : calculons $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-u^2}\,du$ à l'aide du changement de variables $u = \sin(t)$. La fonction

sin est de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0, \pi/2]$ sur $[0, 1]$, nous pouvons effectuer le changement de variable $u = \sin t$.

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ Posons $\quad u = \sin t.$
Dérivons $\quad du = \cos(t)\, dt,$

$\boxed{3}$ Comme $0 = \sin 0$ et $1 = \sin \pi/2$, ce changement de variable conduit à

$$\int_0^1 \sqrt{1-u^2}\, du = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\, \cos t\, dt.$$

Comme pour tout $t \in [0, \pi/2]$, $\cos t \geqslant 0$, remarquons que $\sqrt{1-\sin^2 t} = |\cos t| = \cos t$. Par suite :

$$\int_0^1 \sqrt{1-u^2}\, du = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

Nous venons de redémontrer par le calcul que l'aire du quart de disque unité est $\frac{\pi}{4}$... *Bravo !*

■ Estimation d'intégrales

Pour estimer (majorer, minorer ou borner) une intégrale, le calcul se conduit comme dans le cas de l'estimation d'une somme, à ceci près qu'il est nécessaire de vérifier d'abord que les bornes de l'intégrale sont dans le bon sens.

❑ Méthode 19.7.— Comment montrer qu'une intégrale est bornée

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux sur un segment $[a, b]$, avec $a \leqslant b$. Pour majorer la valeur absolue de l'intégrale, vous utilisez l'**inégalité triangulaire**.

$$\left| \int_a^b f(t)\, dt \right| \leqslant \int_a^b \left| f(t) \right| dt.$$

❑ Méthode 19.8.— Comment estimer une intégrale

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux sur un segment $[a, b]$, avec $a \leqslant b$.

Pour estimer l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$:

$\boxed{1}$ Soit $t \in [a, b]$, fixé. On cherche une estimation de $f(t)$, comme $m \leqslant f(t) \leqslant M$ ou plus généralement $f(t) \leqslant g(t)$

$\boxed{2}$ À l'aide de la **croissance de l'intégrale** (ou la **positivité**), on peut intégrer cet encadrement *terme à terme* sans changer le sens des inégalités, pour obtenir

$$m \cdot (b-a) \leqslant \int_a^b f(t)\, dt \leqslant M \cdot (b-a) \quad ou \quad \int_a^b f(t)\, dt \leqslant \int_a^b g(t)\, dt.$$

■ Application des intégrales à l'étude des suites

Étude d'une suite d'intégrales

On trouve fréquemment des exercices d'étude de suites définies par des intégrales, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_a^b f_n(t)\,dt$$

où $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue qui dépend de n. En clair, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}_m([a,b],\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ (avec $a \leqslant b$). Grâce à la propriété de **croissance de l'intégrale**, pour étudier (I_n) on privilégie les méthodes liées à l'ordre.

❑ **Méthode 19.9.— Comment étudier une suite d'intégrales $I_n = \displaystyle\int_a^b f_n(t)\,dt$**

- **Monotonie de la suite**
  Étudier la monotonie de (I_n) revient à établir une inégalité entre I_n et I_{n+1}. Pour ce faire, fixez $n \in \mathbb{N}$. Pour $t \in [a,b]$, comparez $f_n(t)$ et $f_{n+1}(t)$. Par **croissance de l'intégrale**, I_n et I_{n+1} sont rangées dans le même ordre que les intégrandes.
- **Existence de limite**
  Pour établir l'existence d'une limite de (I_n), on utilise un théorème de convergence lié à l'ordre : **théorème de la limite monotone**, **théorème d'existence de limite par comparaison** ou par **encadrement**.
- **Relation de récurrence**
  Pour obtenir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}, on a souvent recours à une **intégration par parties**.

Exemple : Intégrales de Wallis

Étudions la suite d'intégrales définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,dt$.

- **Premières valeurs.** $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$.
- **Monotonie.** Soit $n \in \mathbb{N}$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. De $0 \leqslant \sin(t) \leqslant 1$, on déduit $0 \leqslant \sin^{n+1}(t) \leqslant \sin^n(t)$. Par croissance de l'intégrale, il s'ensuit que $0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$.
- **Convergence.** Ainsi, la suite (I_n) est décroissante et minorée. D'après le **théorème 9.12**, (I_n) est donc convergente.
- **Relation de récurrence.** Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Intégrons par parties

$$\begin{aligned} I_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\sin(t)\,dt &= -\Big[\sin^n(t)\cos(t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}(t)\cos^2(t)\,dt \\ &= n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}(t)\big[1-\sin^2(t)\big]\,dt = nI_{n-1} - nI_{n+1} \end{aligned}$$

On en déduit que $I_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}\, I_{n-1}$.

- **Équivalent de I_n.** Une récurrence facile montre que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)I_n\, I_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}$. En particulier, la décroissance de (I_n) entraîne alors que $(n+1)I_{n+1}^2 \leqslant \frac{\pi}{2} \leqslant (n+1)I_n^2$. Ceci étant vrai pour tout entier, on en déduit que

$$n\, I_n^2 \leqslant \frac{\pi}{2} \leqslant (n+1)\, I_n^2$$

Méthodes

Par la caractérisation de l'équivalence par le quotient, il en résulte finalement que $I_n \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Mise en œuvre : exercice 19.7.

Sommes de Riemann

> ❑ **Méthode 19.10.— Comment étudier une suite de sommes de Riemann**
>
> Si $U_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_{k,n}$ est une somme de termes dépendants *à la fois* de k et de n. Il s'agit peut-être d'une somme de **Riemann** !
>
> $$U_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)$$
>
> $\boxed{1}$ On reconnaît tout d'abord n (le nombre de termes de la somme).
>
> $\boxed{2}$ Puis on identifie les a_k : $a_0 = a, a_n = b, a_k = a + k\,\frac{b-a}{n}$.
>
> $\boxed{3}$ On factorise alors par $\dfrac{b-a}{n}$.
>
> $\boxed{4}$ Finalement, on détermine la fonction f.
>
> Si f est continue sur le segment $[a,b]$, alors (U_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$.

Exemple : considérons la suite de sommes $U_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{n+n}$.

$\boxed{1}$ On a $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$.

$\boxed{2}$ On identifie alors les $a_k = \frac{k}{n}$, pour $k \in [\![0,n]\!]$, de sorte que $[a,b] = [0,1]$.

$\boxed{4}$ Finalement $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ est continue sur $[0,1]$. D'après le théorème de convergence des sommes de Riemann, $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(2)$.

Mise en œuvre : exercice 19.5.

Étude des séries

On utilise aussi les intégrales pour étudier la convergence des séries numériques et obtenir des équivalents de suites de sommes partielles, **méthode 24.7**.

■ Application des intégrales à l'étude des fonctions

Étude d'une fonction définie à l'aide d'une intégrale

Soit $x \mapsto a(x)$ et $x \mapsto b(x)$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle J à valeurs dans un même intervalle I. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle I. Pour $x \in J$ fixé, l'intégrale $\displaystyle\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt$ est un réel bien défini puisqu'on intègre une fonction continue sur un segment. Ce procédé définit une application $\Phi : J \to \mathbb{R}$ par $\Phi(x) = \displaystyle\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt$.

❑ **Méthode 19.11.— Comment étudier** $x \mapsto \displaystyle\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt$

- **Domaine de définition** $\mathcal{D}_\Phi$.
  Soit $x \in \mathbb{R}$. $x \in \mathcal{D}_\Phi$ ssi le segment $[a(x), b(x)] \cup [b(x), a(x)]$ est contenu dans I.
- **Dérivabilité de** Φ.
  Supposons que $\mathcal{D}_\Phi$ est un intervalle. Vous introduisez la fonction $x \mapsto F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ (pour $a \in \mathcal{D}_\Phi$ un point bien choisi). D'après la relation de **Chasles**,
  $$\Phi(x) = F(b(x)) - F(a(x))$$
  D'après le **théorème intégrale fonction de sa borne supérieure**, on sait que F est dérivable et $F' = f$. Par composition, Φ est dérivable et la **règle de dérivation en chaîne** donne $\forall x \in \mathcal{D}_\Phi,\ \Phi'(x) = F' \circ b(x) \times b'(x) - F' \circ a(x) \times a'(x) = b'(x) f\big(b(x)\big) - a'(x) f\big(a(x)\big)$
- **Étude des limites.**
  Comme pour l'étude de suites d'intégrales, on utilise les théorèmes d'existence de limites liés à la relation d'ordre : **théorèmes** de la **limite monotone**, d'**existence de limite par comparaison** ou **encadrement**.

Exemple : étudions les variations et les limites aux bornes de la fonction $\Phi : \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}$ définie par
$$\forall x \in \mathbb{R}^{+\star}, \quad \Phi(x) = \int_x^{3x} e^{-t^2}\,dt.$$

• Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = e^{-x^2}$. f est continue sur $\mathbb{R}^+$. D'après le **théorème 19.9**, la fonction $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $F'(x) = f(x)$. De plus, d'après la **relation de Chasles**, pour tout réel positif $x \in \mathbb{R}^+$, on a :
$$\Phi(x) = \int_x^{3x} f(t)\,dt = \int_0^{3x} f(t)\,dt - \int_0^x f(t)\,dt = F(3x) - F(x)$$

Ainsi, Φ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ comme somme de telles fonctions et pour tout réel positif $x \in \mathbb{R}^+$, on a :
$$\Phi'(x) = 3F'(3x) - F'(x) = 3f(3x) - f(x) = 3e^{-9x^2} - e^{-x^2}$$

Étudions le signe de Φ'. Soit $x \geqslant 0$.
$$\Phi'(x) \geqslant 0 \iff 3e^{-9x^2} \geqslant e^{-x^2} \iff \ln 3 - 9x^2 \geqslant -x^2 \iff x^2 \leqslant \frac{\ln 3}{8}$$

Comme x est positif, ceci n'est possible que si $x \leqslant \sqrt{\dfrac{\ln 3}{8}}$. On en déduit le tableau de variation :

x	0		$\sqrt{\ln 3/8}$		$+\infty$
$\Phi'(x)$		$+$	0	$-$	
$\Phi(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	

• Pour étudier la limite de Φ en $+\infty$, cherchons un encadrement de Φ.
Soit $x \geqslant 0$. Par décroissance de f, on a pour tout $t \in [x, 3x]$ l'encadrement :

$$e^{-9x^2} \leqslant e^{-t^2} \leqslant e^{-x^2}$$

Intégrons terme à terme. Par croissance de l'intégrale, il en découle que :

$$2xe^{-9x^2} \leqslant \Phi(x) \leqslant 2xe^{-x^2}$$

Par croissances comparées, les deux fonctions encadrantes ont limite nulle en $+\infty$. D'après le **théorème de convergence par encadrement**, il en résulte que Φ admet une limite nulle en $+\infty$. ▲

Mise en œuvre : exercice 19.10.

Utiliser la formule de Taylor reste intégral

L'idée est d'utiliser la croissance de l'intégrale pour obtenir un encadrement de fonction par deux polynômes. On se ramène pour cela à encadrer le reste de Taylor de f en a, présenté sous forme «intégrale».
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I contenant a. D'après la **formule de Taylor reste intégral**, on sait que pour tout $x \in I$

$$f(x) = \underbrace{f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}_{T_n(x)} + \underbrace{\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt}_{R_n(x)}$$

❑ **Méthode 19.12.— Comment encadrer $f(x)$ par deux polynômes**
Pour encadrer $f(x)$ entre deux polynômes,
[1] Vous écrivez la formule de Taylor à un ordre convenable.
[2] À l'aide de son expression sous forme d'une intégrale, vous trouvez un encadrement de ce reste en utilisant la croissance de l'intégrale.
Warning : Prenez garde de mettre les bornes de l'intégrale dans le *bon sens* !

Exemple : montrons que $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$. On reconnaît ici le polynôme de Taylor de la fonction $f = \sin$ à l'ordre 4 en 0 : $T_4(x) = x - \frac{x^3}{6}$. Or d'après la **formule de Taylor reste intégral**, (comme $f^{(5)} = \cos$)

$$\sin(x) - T_4(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^4}{4!} f^{(5)}(t)\,dt = \int_0^x \frac{(x-t)^4}{4!}\cos(t)\,dt$$

Or par **croissance de l'intégrale**, comme $0 \leqslant \cos(t) \leqslant 1$ pour $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$,

$$0 \leqslant \int_0^x \frac{(x-t)^4}{4!}\cos(t)\,dt \leqslant \int_0^x \frac{(x-t)^4}{4!}\,dt = \left[-\frac{(x-t)^5}{5!}\right]_0^x$$

Autrement dit, $0 \leqslant \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^4}{4!}\cos(t)\,dt \leqslant \frac{x^5}{120}$. D'où l'on tire finalement que

$$\forall x \in [0, \pi/2], \quad x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

Mise en œuvre : exercice 19.12.

Vrai/Faux

	Vrai	Faux
1. Soit $(f,g) \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ si $f \leqslant g$ et $\displaystyle\int_I f = \int_I g$ alors $f = g$.	☐	☐
2. Soit $f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$, $(a,b) \in I^2$. Alors $\left\lvert \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \right\rvert \leqslant \int_a^b \lvert f(t)\rvert\,dt$.	☐	☐
3. Soit $(a,x) \in \mathbb{R}^2$, alors $\left\lvert \displaystyle\int_a^x \frac{\lvert x-t\rvert^n}{n!}\,dt \right\rvert = \frac{\lvert x-a\rvert^{n+1}}{(n+1)!}$.	☐	☐
4. Si $f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ et $a \in I$, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est toujours de classe $\mathcal{C}^1$ sur I même si f n'est pas dérivable sur I.	☐	☐
5. Soit $I = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-u^2}du$, le changement de variable $u = \varphi(t) = \sin(t)$, où $t \in [0,\pi]$ permet de calculer la valeur de I qui est $\frac{\pi}{4}$.	☐	☐
6. Si $f \in \mathcal{C}^0([a,\,b],\,\mathbb{R})$ et si $\displaystyle\int_a^b f = 0$ alors $f = 0$ sur $[a,\,b]$.	☐	☐
7. Si $f \in \mathcal{C}^0([a,\,b],\,\mathbb{R})$, les quantités $$\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a+k\frac{b-a}{n}) \text{ et } \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\frac{b-a}{n})$$ ont une limite quand n tend vers l'infini, en général différentes.	☐	☐
8. La suite $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$ est strictement croissante car sin l'est sur $[0,\pi/2]$.	☐	☐
9. La dérivée de la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_1^{2x} \frac{e^t}{t}\,dt$ est $x \mapsto \dfrac{e^{2x}}{2x}$.	☐	☐
10. Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$, alors la formule de Taylor avec reste intégral s'écrit : $f(1) = f(0) + f'(0) + \displaystyle\int_0^1 \frac{t^2 f''(t)}{2}\,dt$.	☐	☐

Énoncé des exercices

Calcul pratique de primitives et d'intégrales

Exercice 19.1 : Déterminer les primitives suivantes en précisant les intervalles de validité.

1. $F_1(x) = \displaystyle\int^x (t^2+1)e^{-t}\,dt.$
2. $F_2(x) = \displaystyle\int^x \frac{\ln t}{t+t(\ln t)^2}\,dt.$
3. $F_3(x) = \displaystyle\int^x \frac{dt}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}}.$
4. $F_4(x) = \displaystyle\int^x \frac{e^{2t}}{e^t+1}\,dt.$
5. $F_5(x) = \displaystyle\int^x \frac{t+1}{t^2-t+1}\,dt.$
6. $F_6(x) = \displaystyle\int^x \frac{t^4}{1+t^{10}}\,dt.$

Exercice 19.2 : Calculer les intégrales suivantes

1. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{3+\cos^2 t}\,dt$
2. $\displaystyle\int_0^1 t^2\sqrt{1-t^2}\,dt$
3. $\displaystyle\int_1^{e^{\pi}} \sin(\ln t)\,dt$
4. $\displaystyle\int_1^e t^2\ln t\,dt$
5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$
6. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(t)\,dt$

Propriétés de l'intégrale

Exercice 19.3 : $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ et T-périodique. Montrer : $\forall t_0 \in \mathbb{R}, \displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt.$

En déduire que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \int_{a+T}^{b+T} f(t)\,dt.$

Exercice 19.4 : Soit $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$. On suppose que f est continue et que g est continue par morceaux et positive sur $[a,b]$. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt = f(c)\int_a^b g(t)\,dt$$

Exercice 19.5 : Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et calculer sa limite lorsque :

1. $u_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+3(k/n)}$
2. $u_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt[n]{2^k}.$
3. $u_n = \left(\dfrac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}}.$

Exercice 19.6* : Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application continue strictement croissante telle que

$$f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 1$$

1. Montrer que si $t \in [0,1[$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f^n(t) = 0.$
2. Soit $\epsilon > 0$ et $\eta \in]0,1[$ tel que $1-\eta \leqslant \epsilon/2$. Montrer : $0 \leqslant \displaystyle\int_\eta^1 f^n(t)\,dt \leqslant \epsilon/2.$

Puis montrer que : $0 \leqslant \displaystyle\int_0^\eta f^n(t)\,dt \leqslant f^n(\eta)$. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f^n(t)\,dt.$

■ Étude de suites d'intégrales

Exercice 19.7 : On définit pour $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}$.

1. Calculer I_0, I_1 et I_2.
2. Prouver que la suite (I_n) est strictement monotone.
3. Montrer que (I_n) est convergente de limite 1.
4. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,dx = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx$
5. Établir $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx = 0$ et en déduire que $I_n = 1 - \dfrac{\ln 2}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$

Exercice 19.8 : Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et $a \in \mathbb{R}^+$, on note $I_n(a) = \displaystyle\int_0^a e^{-nx}\ln(n+x)\,dx$.

1. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}^\star, \ln n \leqslant \ln(n+x) \leqslant \ln n + x/n$.
2. Montrer que $a \mapsto I_n(a)$ est croissante et en déduire l'existence de $J_n = \displaystyle\lim_{a\to+\infty} I_n(a)$.
3. Montrer que $J_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n}$.

Exercice 19.9* : Soit $0 < a < b$ et $I_n = \displaystyle\int_a^b \cos\left(nt^2\right)\,dt$, où $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

■ Études de fonctions définies par une intégrale

Exercice 19.10 : Soit $f : \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}^{+\star}, \quad f(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et déterminer f'. Donner le tableau de variation de f et son signe.
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+\star}$ par $g(x) = f(x) - \ln x$. Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}^{+\star}$ en déduire son signe.
3. Étudier les limites $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Exercice 19.11* : Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par $f(x) = \displaystyle\int_1^x e^{-(xt)^2}\frac{dt}{t}$, montrer que f admet un maximum et calculer l'abscisse de ce maximum.

■ Formules de Taylor

Exercice 19.12 : 1. Montrer que pour tout réel $x \geqslant 0$, $\quad x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3\,(1+x)^3} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$.

2. Montrer que pour tout réel $x \geqslant 0$, $\quad 0 \leqslant \sqrt[3]{1+x} - 1 - \dfrac{x}{3} + \dfrac{x^2}{9} \leqslant \dfrac{5\,x^3}{81}$.

Exercice 19.13 : Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$.

1. Montrer que : $\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$, $|u_n(x) - \cos x| \leqslant \dfrac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
2. En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos x = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$.

■ Intégrales des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

Exercice 19.14 : Soit $f : I \to \mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ de classe $\mathcal{C}^1$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et

$$g : I \to \mathbb{C},\ x \mapsto ib + \int_a^x \frac{f'(t)}{f(t)}\,dt,$$

où $b \in \mathbb{R}$ et $f(a) = e^{ib}$.

1. Vérifier que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
2. Calculer g' en fonction de f' et $\overline{f}$ ($\overline{f}$ désigne le conjugué de f).
3. Soit $h : I \to \mathbb{C}$, $x \mapsto f(x)\exp(-g(x))$. Calculer h' et $h(a)$.
4. Montrer qu'il existe $\theta : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f = e^{i\theta}$.

■■ Indications

Ex. 19.2

1. *Poser* $u = \cos t$.
2. *Poser* $u = \sin t$.
3. *Poser* $u = \ln(t)$.

Ex. 19.3

Pour la première égalité, on dérive $x \mapsto \displaystyle\int_x^{x+T} f(t)\,dt$. *Pour l'autre, penser à Chasles.*

Ex. 19.8

1. *On utilisera* $\ln(1+x) \leqslant x$ *pour* $x \geqslant 0$.

Ex. 19.9

On appliquera le changement de variable $u = nt^2$ *et une intégration par parties.*

Ex. 19.11

On pourra faire le changement de variable $u = tx$.

Corrigé des vrai/faux

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
V	F	V	V	F	F	F	F	F	F

1. L'assertion est vraie ! Pour la démontrer, il suffit d'utiliser la propriété de définie-positivité de l'intégrale des fonctions continues, à la fonction continue et positive $g - f$.

2. C'est faux en général puisque les bornes ne sont pas toujours dans le bon sens ! Par contre, on peut toujours écrire $\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \int_{[a,b]\cup[b,a]} |f(t)|\,dt$.

3. Pour démontrer cette assertion, il n'est pas de meilleure façon que de distinguer deux cas, suivant que x est positif et négatif !

5. $\varphi(t) = \sin t$ n'est pas une bijection sur $[0, \pi]$. Par contre, on peut écrire si $t \in [0, \pi/2]$,

$$I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 t}\cos t\,dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2t}{t}\,dt$$

et finalement, on a par contre bien $I = \dfrac{\pi}{4}$.

6. C'est faux bien entendu, il faut que f soit positive (ou négative) !

7. C'est faux, les deux sommes sont égales à $\int_a^b f$.

8. Comme $\sin x \in [0, 1]$, $\sin^{n+1} x \leqslant \sin^n x$. L'inégalité est stricte dans $]0, \pi/2[$ et donc $I_{n+1} < I_n$.

9. C'est faux, c'est $x \mapsto \dfrac{e^{2x}}{x}$.

10. La formule de Taylor avec reste intégral s'écrit : $f(1) = f(0) + f'(0) + \int_0^1 f''(t)(1-t)\,dt$.

Erreurs classiques

- Oublier de transformer dt en $\varphi'(x)dx$ si $t = \varphi(x)$ dans un changement de variable.
- Oublier de changer les bornes au cours d'un changement de variable.
- Les sommes de Riemann indexées de 0 à n, de 1 à n, de 0 à $n-1$ ou de 1 à $n-1$ ont la même limite. Il faut le savoir.
- La fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est continue même si f n'est pas continue. Par contre, la continuité de f est obligatoire pour que F soit dérivable et elle est alors automatiquement $\mathcal{C}^1$.
- La dérivée de $x \mapsto \int_a^{\phi(x)} f(t)\,dt$ est $\phi'(x)f(\phi(x))$ et non $f(\phi(x))$.
- Éviter de mal écrire le reste intégral de Taylor. Ainsi, ne pas oublier que si f est de classe $\mathcal{C}^n$, dans l'intégrale, $f^{(n)}$ apparaît et $(x - t)$ est à la puissance $n - 1$.

Corrigé des exercices

Exercice 19.1

Comme indiqué dans la **méthode 8.5**, *on intègre par parties.*

1. La fonction $f_1 : x \mapsto (x^2+1)e^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Elle admet donc des primitives sur tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$. De plus

$$\begin{aligned}\int^x (t^2+1)e^{-t}\,dt &= \Big[-(t^2+1)e^{-t}\Big]^x + 2\int^x te^{-t}\,dt\\ &= \Big[-(1+t^2)e^{-t}\Big]^x + 2\Big[-te^{-t}\Big]^x + 2\int^x e^{-t}\,dt\\ &= (-x^2-2x-3)e^{-x}+C\end{aligned}$$

On met en œuvre la **méthode 19.2**.

2. La fonction $f_2 : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x+x\ln^2(x)}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$. Elle admet des primitives sur tout sous-intervalle de $\mathbb{R}^{+\star}$. Pour les déterminer, effectuons le changement de variable $u=\ln(t)$, de sorte que $du = \dfrac{dt}{t}$. Il vient

$$\int^x \frac{\ln t}{t+t(\ln t)^2}\,dt = \frac{1}{2}\int^{\ln(x)} \frac{2u}{1+u^2}du = \frac{1}{2}\Big[\ln(1+u^2)\Big]^{\ln(x)} = \frac{1}{2}\ln(1+\ln^2(x))+C$$

$u=\sqrt{t}$
$2du = \dfrac{dt}{\sqrt{t}}$

3. $f_3 : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x^3}}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$. Elle admet des primitives sur tout sous-intervalle. Pour les calculer, posons $u=\sqrt{t}$. Il vient

$$\int^x \frac{dt}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}} = \int^{\sqrt{x}} \frac{2du}{1+u^2} = 2\mathrm{Arctan}\,(\sqrt{x})+C$$

4. $f_4 : x \mapsto \dfrac{e^{2x}}{e^x+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Elle admet des primitives sur tout intervalle de $\mathbb{R}$. Avec le changement de variable $u=e^t$, il vient

$$\begin{aligned}\int^x \frac{e^{2t}}{e^t+1}\,dt &= \int^{e^x} \frac{udu}{1+u} = \int^{e^x}\left(1-\frac{1}{1+u}\right)du\\ &= \Big[u-\ln(|1+u|)\Big]^{e^x} = e^x-\ln(1+e^x)+C\end{aligned}$$

Le dénominateur ne s'annule pas.

5. $f_5 : x \mapsto \dfrac{x-1}{x^2-x+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$. On détermine ses primitives à l'aide de la **méthode 8.7** :

$$\int^x \frac{t+1}{t^2-t+1}\,dt = \frac{1}{2}\int^x \frac{2t+2}{t^2-t+1}\,dt + \frac{3}{2}\int^x \frac{dt}{t^2-t+1}$$

Comme $\displaystyle\int^x \frac{1}{t^2-t+1}\,dt = \int^x \frac{dt}{(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\Big[\text{Arctan}\,(\frac{2t-1}{\sqrt{3}})\Big]^x$ et $\displaystyle\int^x \frac{2t+2}{t^2-t+1}\,dt = \Big[\ln(t^2-t+1)\Big]^x$, il vient finalement

$$F_5(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) + \sqrt{3}\text{Arctan}\,(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}) + C$$

6. $f_6 : x \mapsto \dfrac{x^4}{1+x^{10}}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Cherchons ses primitives sur tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On commence par effectuer le changement de variable $u = t^5$. Il vient

$$\int^x \frac{t^4\,dt}{1+t^{10}} = \frac{1}{5}\int^{x^5} \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{5}\text{Arctan}\,(x^5) + C$$

▲

Exercice 19.2

1. Effectuons le changement de variable $u = \cos t$, de sorte que $-du = \sin(t)dt$

$$\int_0^\pi \frac{\sin t\,dt}{3+\cos^2 t} = \int_1^{-1} \frac{-du}{3+u^3} = \Big[\frac{1}{\sqrt{3}}\text{Arctan}\,(\frac{u}{\sqrt{3}})\Big]_{-1}^1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\text{Arctan}\,(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

2. En posant $t = \sin u$, il vient

$$\int_0^1 t^2\sqrt{1-t^2}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(u)\cos^2(u)\,du = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(2u)\,du$$
$$= \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(1-\cos(4u)\big)\,du = \frac{1}{8}\Big[u - \frac{1}{4}\sin(4u)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{16}$$

On applique la **méthode 8.6** *: pour intégrer on linéarise le produit*

$$\cos^2(u)\sin^2(u).$$

3. Posons tout d'abord $u = \ln(t)$, de sorte que $t = e^u$ et $dt = e^u\,du$. Il vient $\displaystyle\int_1^{e^\pi} \sin(\ln t)\,dt = \int_0^\pi \sin(u)\,e^u\,du$. Pour calculer cette dernière intégrale, appelons-la I, on va intégrer deux fois par parties. Il vient

$$I = \int_0^\pi \sin(u)\,e^u\,du = \Big[\sin(u)e^u\Big]_0^\pi - \int_0^\pi \cos(u)e^u\,du = -\Big[\cos(u)e^u\Big]_0^\pi$$
$$+ \int_0^\pi (-\sin(u))e^u\,du = [1+e^\pi] - I$$

On peut aussi passer en complexe et intégrer $u \mapsto e^{(1+i)u}$ et prendre ensuite la partie imaginaire, comme indiqué à la **méthode 8.9**.

Finalement, on en déduit que $I = \dfrac{1+e^\pi}{2}$.

4. Une intégration par parties s'impose

$$\int_1^e t^2\ln(t)\,dt = \Big[\frac{t^3}{3}\ln(t)\Big]_1^e - \int_1^e \frac{t^2}{3}\,dt = \Big[\frac{t^3}{3}\ln(t) - \frac{t^3}{9}\Big]_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9}.$$

5. Il s'agit d'une primitive usuelle ! $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \ln(1+\sqrt{2})$.

On peut aussi linéariser !

6. Nous allons procéder au changement de variable $u = \sin(t)$, il vient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(t)\,dt = \int_0^1 (1-u^2)du = \left[u - \frac{1}{3}u^3\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

▲

Exercice 19.3

En posant $G : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x+T} f(t)\,dt$, on a : $G'(x) = f(x+T) - f(x) = 0$. G est constante et vaut donc $G(0) = \displaystyle\int_0^T f(t)\,dt$. Puis : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ peut se décomposer en $\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\,dt + \int_{a+T}^{b+T} f(t)\,dt + \int_{b+T}^{b} f(t)\,dt$, soit encore $\displaystyle\int_{a+T}^{b+T} f(t)\,dt + \int_a^{a+T} f(t)\,dt - \int_b^{b+T} f(t)\,dt$, c'est-à-dire $\displaystyle\int_{a+T}^{b+T} f(t)\,dt$. ▲

Comme f est T-périodique son intégrale sur tout intervalle de longueur T est la même !

Exercice 19.4

Il s'agit d'une généralisation de l'**égalité de la moyenne**. Comme f est continue sur le segment $[a,b]$ elle est bornée et atteint ses bornes, il existe donc $(\alpha,\beta) \in [a,b]^2$ tel que

$$\forall t \in [a,b], \quad f(\alpha) \leqslant f(t) \leqslant f(\beta)$$

Comme par hypothèse g est positive, il s'ensuit que

$$\forall t \in [a,b], \quad f(\alpha)g(t) \leqslant f(t)g(t) \leqslant f(\beta)g(t)$$

Par **croissance de l'intégrale** il en résulte que

$$f(\alpha)\int_a^b g(t)\,dt \leqslant \int_a^b f(t)g(t)\,dt \leqslant f(\beta)\int_a^b g(t)\,dt$$

Notons $\nu = \displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$.

▸ Si $\nu = 0$, l'encadrement précédent montre que $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,dt = 0$. Tout est nul, l'égalité proposée est vérifiée.

▸ Si $\nu > 0$, l'encadrement précédent montre que $\dfrac{1}{\nu}\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,dt$ est une valeur intermédiaire entre $f(\alpha), f(\beta)$. D'après le **théorème des valeurs intermédiaires**, il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \dfrac{1}{\nu}\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,dt$. ▲

Exercice 19.5

1. Notons $f(t) = \dfrac{1}{1+3t}$. f est continue sur $[0,1]$. Notons $a_k = \dfrac{k}{n}$, pour $k \in [\![0,n]\!]$. De sorte que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) = \mathcal{R}_n(f)$. D'après le

théorème de convergence des sommes de Riemann , (u_n) est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 f(t)\,dt = \dfrac{\ln 4}{3}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. $u_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt[n]{2^k} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} 2^{\frac{k}{n}}$. On pose $a_k = \dfrac{k}{n}$, pour $k \in [\![0, n]\!]$. Ainsi $u_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(a_k) = \mathcal{R}_n(f)$, où $f : x \mapsto 2^x$. D'après le théorème de convergence des sommes de Riemann , (u_n) converge vers $\int\limits_0^1 f(t)\,dt = \dfrac{1}{\ln 2}$.

3. En passant au ln : $\ln(u_n) = \dfrac{1}{n}\ln\left(\prod\limits_{i=1}^{n}\left(1+\dfrac{i}{n}\right)\right) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\left(1+\dfrac{i}{n}\right)$.

Et comme : $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln u_n = \int_0^1 \ln(1+x)\,dx$, il reste à calculer cette intégrale.

On trouve $\int_0^1 \ln(1+x)\,dx = 2\ln 2 - 1$. En conclusion, $\lim u_n = \dfrac{4}{e}$. ▲

Exercice 19.6

1. Si $t \in [0, 1[$, $0 = f(0) \leqslant f(t) < f(1) = 1$ et : $\lim\limits_{n\to+\infty} f^n(t) = 0$.

Par croissance stricte de f.

2. Soit $\epsilon > 0$ et $\eta \in]0, 1[$ tel que $1 - \eta \leqslant \epsilon/2$. Pour tout $t \in [\eta, 1]$, on a : $0 \leqslant f(t) \leqslant 1$ et donc : $0 \leqslant \int_\eta^1 f^n(t)\,dt \leqslant \int_\eta^1 1\,dt = 1 - \eta \leqslant \epsilon/2$. Pour tout $t \in [0, \eta]$, on a par croissance de f : $0 \leqslant f^n(t) \leqslant f^n(\eta)$ et

$$0 \leqslant \int_0^\eta f^n(t)\,dt \leqslant \int_0^\eta f^n(\eta)\,dt = \eta f(\eta) \leqslant f^n(\eta)$$

Pour $\epsilon > 0$ fixé, soit $N \in \mathbb{N}$ un rang à partir duquel $f^n(\eta) \leqslant \epsilon/2$. On a

$$n \geqslant N \Rightarrow 0 \leqslant \int_0^1 f^n(t)\,dt \leqslant \epsilon$$

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 f^n(t)\,dt$ vaut 0. Cette technique est à retenir !

▲

Exercice 19.7

1. $I_0 = 1/2$, $I_1 = \ln 2$ et $I_2 = \dfrac{\pi}{4}$.

2. Soit $x \in [0, 1]$, alors $\dfrac{1}{1+x^n} \leqslant \dfrac{1}{1+x^{n+1}}$. Par croissance de l'intégrale, il s'ensuit que (I_n) est croissante. De plus, par définie-positivité de l'intégrale des fonctions continues sur un segment, (I_n) est strictement croissante.

Les bornes sont dans le bon sens.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [0, 1]$, on a $0 \leqslant 1 - \dfrac{1}{1+x^n} = \dfrac{x^n}{1+x^n} \leqslant x^n$. Par croissance de l'intégrale, il en résulte que $0 \leqslant 1 - I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. Par encadrement, il s'ensuit que $(I_n - 1)$ est convergente vers 0, et donc (I_n) converge vers 1.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Intégrons par parties. Posons

$$\left\| \begin{array}{rclrcl} u(x) & = & x & v'(x) & = & \dfrac{nx^{n-1}}{1+x^n} \\ u'(x) & = & 1 & v(x) & = & \ln(1+x^n) \end{array} \right.$$

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0,1]$.

Il vient :

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,dx = \frac{1}{n}\Big[x\,\ln(1+x^n)\Big]_0^1 - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx$$
$$= \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx$$

Inégalité bien connue !

5. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Pour tout $t \in \mathbb{R}^{+\star}$, on sait que $\ln(1+t) \leqslant t$ Par conséquent,

$$\forall x \in [0,1], \quad \ln(1+x^n) \leqslant x^n$$

Par croissance de l'intégrale, il s'ensuit que

$$\left|\int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx\right| \leqslant \int_0^1 x^n\,dx \leqslant \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Par comparaison, il en résulte que $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, pour tout $x \in [0,1]$ nous avons $\dfrac{1}{1+x^n} = 1 - \dfrac{x_n}{1+x^n}$. Par linéarité de l'intégrale, il en découle que

$$I_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx = 1 - \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

▲

Exercice 19.8

On applique aussi $\ln(1+x) \leqslant x$.

1. De l'égalité $\ln(n+x) = \ln n + \ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$, on déduit l'encadrement $\ln(n) \leqslant \ln(n+x) \leqslant \ln(n) + \frac{x}{n}$.

2. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ tel que $a \leqslant b$. Par positivité de l'intégrale, on a :

$$\begin{aligned} I_n(b) - I_n(a) &= \int_0^b e^{-nx}\ln(n+x)\,dx - \int_0^a e^{-nx}\ln(n+x)\,dx \\ &= \int_a^b e^{-nx}\ln(n+x)\,dx \geqslant 0 \end{aligned}$$

Par définition, ceci signifie que l'application $a \mapsto I_n(a)$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$. De plus, d'après la première question, on a l'encadrement :

$$\int_0^a e^{-nx}\,\ln(n)\,dx \leqslant I_n(a) \leqslant \int_0^a e^{-nx}\,\ln(n)\,dx + \frac{1}{n}\int_0^a xe^{-nx}\,dx$$

Or $\displaystyle\int_0^a e^{-nx}\,dx = \frac{1}{n}(1-e^{-na})$

et $\displaystyle\int_0^a xe^{-nx}\,dx = \left[-\frac{x}{n}\,e^{-nx}\right]_0^a + \frac{1}{n}\int_0^a e^{-nx}\,dx = -\frac{a}{n}e^{-na} + \frac{1}{n^2}(1-e^{-na})$

$$\leqslant \frac{1}{n^2}(1-e^{-na})$$

On en déduit l'encadrement suivant :

$$\frac{\ln n}{n}(1-e^{-na}) \leqslant I_n(a) \leqslant \frac{\ln n}{n}(1-e^{-na}) + \frac{1}{n^3}(1-e^{-na})$$

En particulier, $a \mapsto I_n(a)$ est une fonction croissante et majorée par $\dfrac{\ln n}{n} + \dfrac{1}{n^3}$.
D'après le **théorème de la limite monotone**, elle admet une limité quand a tend vers $+\infty$, notée, J_n.
De plus, par passage à la limite dans des inégalités, on obtient

$$\frac{\ln n}{n} \leqslant J_n \leqslant \frac{\ln n}{n} + \frac{1}{n^3}$$

3. On déduit aisément de l'encadrement ci-dessus que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n}{\ln n} J_n = 1$.
D'après la **caractérisation par les quotients** de l'équivalence, ceci revient précisément à dire que $J_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n}$. ▲

Exercice 19.9

Le changement de variable $u = nt^2$ permet de transformer (le faire) l'intégrale :

$$I_n = \frac{1}{2\sqrt{n}} \int_{na^2}^{nb^2} \frac{\cos u}{\sqrt{u}} du = \frac{1}{2\sqrt{n}} \left[\frac{\sin u}{\sqrt{u}}\right]_{na^2}^{nb^2} + \frac{1}{4\sqrt{n}} \int_{na^2}^{nb^2} \frac{\sin u}{u^{3/2}} du.$$

Nous procédons à une intégration par partie.

Le terme entre crochet tend vers 0 et il reste à calculer la limite de :

$$\frac{1}{4\sqrt{n}} \int_{na^2}^{nb^2} \frac{\sin u}{u^{3/2}} du.$$

Appelons J_n cette intégrale, on a : $|J_n| \leqslant \dfrac{1}{4\sqrt{n}} \displaystyle\int_{na^2}^{nb^2} \frac{du}{u^{3/2}}$.
On calcule sans aucune difficulté cette dernière intégrale et on en déduit que J_n tend vers 0 donc I_n aussi quand n tend vers $+\infty$. ▲

Exercice 19.10

1. L'intégrande $t \mapsto \dfrac{e^t}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$. D'après le **théorème fondamental du calcul intégral**, f est l'unique primitive de l'intégrande qui s'annule au point 1.
En particulier, f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et $\forall x > 0, \quad f'(x) = \dfrac{e^x}{x}$. Ainsi f est croissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$. Comme de plus $f(1) = 0$, nous en déduisons que $\forall x > 0, \quad f(x) > 0 \iff x > 1$.
2. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ comme somme de telles fonctions, de plus, $\forall x > 0, \quad g'(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$. Ainsi, g' est strictement positive sur $\mathbb{R}^{+\star}$. Par conséquent, g est croissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$. Comme de plus, g s'annule au point 1, il s'ensuit que $\forall x > 0, \quad g(x) > 0 \iff x > 1$. On en déduit le tableau de signes

x	0		1		$+\infty$
$f(x) - \ln(x)$		< 0	0	> 0	

3. Par comparaison, il en résulte que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. ▲

Exercice 19.11

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ car $u \mapsto \dfrac{e^{-u^2}}{u}$ y est continue.

Posons $u = tx$, on en déduit que : $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{e^{-u^2}}{u}\, du$.
Il est clair que si $x \geqslant 1$ alors $f(x) \geqslant 0$ et si $0 < x \leqslant 1$ alors $f(x) \leqslant 0$.
On en déduit, en utilisant la formule de dérivation d'une composée que :

$$f'(x) = 2x\frac{e^{-x^4}}{x^2} - \frac{e^{-x^2}}{x} = \frac{e^{-x^2}}{x}\left(2e^{-x^4+x^2} - 1\right)$$

Il est clair que comme $x \mapsto 2e^{-x^4+x^2} - 1$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, a pour valeur 1 en 0 et a pour limite -1 en $+\infty$, cette fonction change de signe une et une seule fois. On peut d'ailleurs trouver l'unique $x_0 > 0$ tel que $f'(x_0)$ soit nul. Il suffit de résoudre l'équation $-x^4 + x^2 = -\ln 2$ et de garder la valeur $x_0 = \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{1+4\ln 2}}{2}}$. On remarque enfin que f est croissante sur $]0, x_0]$ et décroissante sur $]x_0, +\infty[$. En x_0, f présente bien un maximum. Si x tend vers 0^+, $f(x)$ tend vers $-\infty$ et pourtant $f(0) = 0$. Cela provient du fait que la fonction intégrande est non bornée au voisinage de 0. ▲

Exercice 19.12

1. On applique la **méthode 19.12** à la fonction $f_1 : x \mapsto \ln(1+x)$. f_1 est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f_1(x) = \ln(1+x)$, $f_1'(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $f_1''(x) = \dfrac{-1}{(1+x)^2}$ et $f_1^{(3)}(x) = \dfrac{(-1)(-2)}{(1+x)^3}$. Ainsi, la **formule de Taylor avec reste intégral** pour f_1 à l'ordre 2, s'écrit

$$f_1(x) = x - \frac{x^2}{2} + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2!} f_1^{(3)}(t)\, dt = x - \frac{x^2}{2} + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{(1+t)^3}\, dt$$

Par croissance de l'intégrale.

Soit $x \geqslant 0$ et $t \in [0, x]$, fixés. Alors $\dfrac{(x-t)^2}{(1+x)^3} \leqslant \dfrac{(x-t)^2}{(1+t)^3} \leqslant (x-t)^2$. Il en résulte que $\dfrac{x^3}{3\,(1+x)^3} \leqslant \ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2} \leqslant \dfrac{x^3}{3}$.

2. La fonction $f_2 : x \mapsto \sqrt[3]{1+x}$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^+$. Ses premières dérivées donnent $f_2(x) = (1+x)^{\frac{1}{3}}$, $f_2'(x) = \frac{1}{3}(1+x)^{\frac{-2}{3}}$, $f_2''(x) = \frac{-2}{9}(1+x)^{\frac{-5}{3}}$, $f_2^{(3)}(x) = \frac{10}{27}(1+x)^{\frac{-8}{3}}$. Soit $x \geqslant 0$ fixé. La **formule de Taylor** en 0 à l'ordre 2, avec reste intégral donne

$$f_2(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5}{27}\int_0^x \frac{(x-t)^2}{(1+t)^{\frac{8}{3}}}\, dt$$

Comme pour tout $t \in [0, x]$ on a $0 \leqslant \dfrac{(x-t)^2}{(1+t)^{\frac{8}{3}}} \leqslant (x-t)^2$, par croissance de l'intégrale, il s'ensuit que $0 \leqslant \sqrt[3]{1+x} - 1 - \dfrac{x}{3} + \dfrac{x^2}{9} \leqslant \dfrac{5\,x^3}{81}$. ▲

Exercice 19.13

Sur $\mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \cos t$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ donc de classe $\mathcal{C}^{(2n+1)}$ sur tout intervalle $[0, x] \cup [x, 0]$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$. Appliquons la **formule de Taylor avec reste intégral** à l'ordre $2n$. On écrit :

$$\cos(x) = u_n(x) + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}(\cos t)^{(2n+1)}\, dt$$

Comme les dérivées successives de cos sont toutes bornées par 1, on peut écrire

$$\begin{aligned} |\cos(x) - u_n(x)| &\leqslant \left| \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} \cos^{(2n+1)}(t)\, dt \right| \\ &\leqslant \int_{[0,x]\cup[x,0]} \left| \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} \cos^{(2n+1)}(t) \right| dt \\ &\leqslant \int_{[0,x]\cup[x,0]} \frac{|x-t|^{2n}}{(2n)!}\, dt \leqslant \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

On ne connaît pas le signe de x. Avec la notation $\int_{[0,x]\cup[x,0]}$ les bornes 0 et x sont remises dans le bon sens !

2. Comme pour tout x réel fixé, $|x|^{2n+1} = o((2n+1)!)$ au voisinage de $n = +\infty$, la suite $u_n(x)$ tend vers $\cos(x)$. ▲

Exercice 19.14

1. Comme $f(I)$ ne contient pas 0 et que $t \mapsto \dfrac{f'(t)}{f(t)}$ est continue, $g \in \mathcal{C}^1(I)$.

2. On a immédiatement : $g' = \dfrac{f'}{f} = f' \times \overline{f}$.

3. Soit $h : I \to \mathbb{C}$, $x \mapsto f(x)\exp(-g(x))$. On peut écrire :

$$h'(x) = (f'(x) - f(x)g'(x))\exp(-g(x)) = 0,\ h(a) = f(a)e^{-ib} = 1$$

C'est le théorème du relèvement !

4. h est constante et égale à 1 d'où $f = \exp(g)$. Comme f est à valeurs dans $\mathbb{U}$, g est à valeurs dans $i\mathbb{R}$. $\exists \theta : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f = e^{i\theta}$. ▲

Corrigé

Chapitre 20

Dénombrement

UN MATHÉMATICIEN

Blaise Pascal est un philosophe mystique mais aussi un très grand mathématicien. Incroyablement précoce, il écrit dès l'âge de seize ans un ouvrage sur les courbes. Il s'intéresse à la combinatoire pour résoudre des problèmes de probabilités dont il discutait dans des courriers avec Pierre de Fermat. Pascal est également un écrivain et un philosophe de talent comme le montrent ses œuvres principales, *Les Pensées* et *Les Provinciales*.

Un peu d'histoire

Depuis l'Antiquité, on se pose des problèmes de dénombrement. On trouve des références dans l'Antiquité chez Hipparque, au Moyen Âge en Inde chez Bhaskara et chez Michael Stiefel à la Renaissance. Le célèbre triangle de Pascal qui donne les coefficients binomiaux se rencontre dans l'œuvre du savant chinois Yang Hui dès le XIIIe siècle.

Ce n'est cependant qu'avec Pascal et Fermat, dans le cadre des balbutiements du calcul des probabilités, que l'on met en lumière des résultats fondés. Le premier publie un ouvrage en 1653 un *Traité du triangle arithmétique* dans lequel sont présentées de nombreuses propriétés des coefficients binomiaux. Dès cette époque, ces deux savants comprennent l'importance des dénombrements dans l'étude des probabilités.

Objectifs

les incontournables

- Reconnaître et dénombrer des listes, combinaisons et permutations.
- Savoir calculer le cardinal d'une réunion ou d'un produit cartésien.

et plus si affinités

- Sésoudre des problèmes de dénombrement plus théoriques.
- Utiliser des dénombrements pour calculer des sommes.

Résumé de cours

Cardinal d'un ensemble fini

Notation : *si $n \in \mathbb{N}^*$, on note $[\![1, n]\!]$ l'intervalle d'entiers défini par $[\![1, n]\!] = \{1, \ldots, n\}$.*

Définition : Ensemble fini, cardinal d'un ensemble fini —. *Soit E un ensemble non vide. On dit que E est un* **ensemble fini** *s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et une bijection de E dans $[\![1, n]\!]$. Dans ce cas, l'entier n est unique et appelé* **cardinal** *de E. On le note* Card (E). *Par convention, l'ensemble vide est fini et de cardinal* 0.

Notation : *le cardinal d'un ensemble E se note également $|E|$ ou $\#E$.*

Théorème 20.1.— Cardinal des parties —. Soit E un ensemble fini et A une partie de E. Alors :

- A est un ensemble fini et Card $(A) \leqslant$ Card (E) ;
- $A = E$ si et seulement si Card $(A) =$ Card (E).

Proposition 20.2.— Soit f une application de E dans F, où E et F sont deux ensembles finis.

- Si f est injective, alors Card $(E) \leqslant$ Card (F).
- Si f est surjective, alors Card $(E) \geqslant$ Card (F).
- Si f est bijective, alors Card $(E) =$ Card (F).

Théorème 20.3.— Soit E et F deux ensembles finis **de même cardinal**, et f une application de E dans F. Alors, les propriétés suivantes sont **équivalentes** :

$$\Updownarrow \begin{array}{l} \bullet \ f \text{ est injective} \\ \bullet \ f \text{ est surjective} \\ \bullet \ f \text{ est bijective.} \end{array}$$

Théorème 20.4.— Cardinal d'un produit cartésien de deux ensembles finis —. Soit E et F deux ensembles finis. Alors $E \times F$ est un ensemble fini et :

$$\boxed{\text{Card } (E \times F) = \text{Card } (E) \times \text{Card } (F)}$$

Corollaire 20.5.— Soit $E_1, \ldots, E_p$ des ensembles finis. Alors $E_1 \times \cdots \times E_p$ est un ensemble fini et :

$$\boxed{\text{Card } (E_1 \times \cdots \times E_p) = \text{Card } (E_1) \times \cdots \times \text{Card } (E_p)}$$

Théorème 20.6.— Cardinal d'une réunion de deux ensembles finis—. Soit E et F deux ensembles finis. Alors $E \cup F$ est un ensemble fini et :

$$\boxed{\text{Card } (E \cup F) = \text{Card } (E) + \text{Card } (F) - \text{Card } (E \cap F)}$$

Corollaire 20.7.— Si E et F sont deux ensembles finis et **disjoints** ($E \cap F = \emptyset$), alors :

$$\boxed{\text{Card } (E \cup F) = \text{Card } (E) + \text{Card } (F)}$$

Corollaire 20.8.— Soit E un ensemble fini, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n parties de E deux à deux disjointes et dont la réunion est égale à E. Alors :

$$\boxed{\text{Card } (E) = \text{Card } (A_1) + \text{Card } (A_2) + \cdots + \text{Card } (A_n).}$$

Remarque : en particulier, si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont n parties de E deux à deux disjointes, de cardinal commun p et dont la réunion est égale à E, alors E est un ensemble fini et Card $(E) = np$. Ce résultat est connu sous le nom du **lemme des bergers** (pour compter le nombre de moutons dans son troupeau, un berger allongé dans l'herbe peut compter le nombre de pattes et diviser par 4).

Vocabulaire : *Une famille $(A_i)_{i \in I}$ de parties de E deux à deux disjontes et dont la réunion est égale à E est appelée une* ***partition*** *de E.*

Théorème 20.9.— Nombre d'applications entre deux ensembles finis —. Soit E et F deux ensembles finis. On note $n = \text{Card } (E)$ et $p = \text{Card } (F)$. Alors l'ensemble $\mathcal{F}(E, F)$ des applications de E dans F est fini, de cardinal p^n.

Corollaire 20.10.— Nombre de parties d'un ensemble fini —. Soit E un ensemble fini de cardinal n. Alors, l'ensemble $\mathscr{P}(E)$ des parties de E est un ensemble fini, de cardinal 2^n.

■ Listes d'éléments de E

Définition : *Soit E un ensemble fini. Une* ***p-liste d'éléments de*** *E est un p-uplet d'éléments de E, c'est-à-dire un élément de la forme $(x_1, \ldots, x_p)$, où $x_1, \ldots, x_p$ sont des éléments de E.*

Remarque : une p-liste de E est donc un élément de E^p. L'ordre des éléments compte et il peut y avoir des répétitions.

Théorème 20.11.— Nombre de p-listes —. Soit E un ensemble fini de cardinal n et $p \in \mathbb{N}^*$. Le nombre de p-listes de E est égal à n^p.

Théorème 20.12.— Nombre de p-listes d'éléments distincts —. Soit E un ensemble fini de cardinal n et $p \in [\![1, n]\!]$. Le nombre de p-listes de E d'éléments **distincts** de E est égal à $\dfrac{n!}{(n-p)!}$.

Théorème 20.13.— Nombre d'injections —. Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$. Le nombre d'applications injectives d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n est $\dfrac{n!}{(n-p)!}$.

Définition : Permutation —. *Soit E un ensemble fini. Une* ***permutation*** *de E est une bijection de E dans lui-même.*

Théorème 20.14.— Nombre de permutations —. Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. Le nombre de permutations de E dans lui-même est $n!$.

Remarque : il existe donc $n!$ bijections de E dans E, lorsque Card $(E) = n$.

■ Combinaisons d'éléments de E

Définition : *Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$, et $p \in \mathbb{N}$. On appelle* ***p-combinaison de*** *E toute partie de E à p éléments.*

Théorème 20.15.— Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$, et $p \in \mathbb{N}$. Le nombre de p-combinaisons de E est égal à $\binom{n}{p}$.

Remarque : pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![0, n]\!]$, il y a donc $\frac{n!}{p!(n-p)!}$ parties à p éléments dans un ensemble à n éléments.

Théorème 20.16.— Règles de calcul sur les coefficients binomiaux —. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

- $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$
- $\forall p \in [\![0, n]\!], \ \dbinom{n}{n-p} = \dbinom{n}{p}$
- $\forall p \in [\![1, n]\!], \ \dbinom{n}{p} = \dfrac{n}{p}\dbinom{n-1}{p-1}$
- $\forall p \in [\![1, n-1]\!], \ \dbinom{n}{p} = \dbinom{n-1}{p} + \dbinom{n-1}{p-1}$ **(formule de Pascal)**
- $\forall (x, y) \in \mathbb{C}^2, \ (x+y)^n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^p y^{n-p}$ **(formule du binôme de Newton)**

Méthodes

Principe multiplicatif ou principe du berger

Méthode 20.1.— Comment dénombrer à l'aide du principe multiplicatif
Lorsque le dénombrement d'un ensemble se décompose en une succession d'étapes indépendantes, on compte le nombre de possibilités offertes à chaque étape et les nombres de possibilités se multiplient. Plus précisément, si le dénombrement d'un ensemble E se décompose en k étapes indépendantes alors le cardinal de E est égal à

$$n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k$$

où n_j est le nombre de possibilités à l'étape j. C'est le principe multiplicatif. Dans le raisonnement, on utilise des « et » qui permettent de construire les différentes étapes du dénombrement.

Exemple : combien de menus différents peut-on composer avec 3 entrées, 2 plats et 4 desserts ? Pour constituer un menu, on choisit une entrée, un plat et un dessert (entrée **et** plat **et** dessert).

- choix de l'entrée $\rightsquigarrow$ 3 possibilités.
- choix du plat $\rightsquigarrow$ 2 possibilités.
- choix du dessert $\rightsquigarrow$ 4 possibilités.

Au total, il y a donc $3 \times 2 \times 4 = 24$ menus possibles.

Exemple : déterminer le cardinal de l'ensemble des nombres à cinq chiffres ne contenant aucun 9. Il y a 8 possibilités (les chiffres de 1 à 8) pour le premier chiffre et 9 possibilités pour les quatre suivants (les chiffres de 0 à 8). Par conséquent, il y a $8 \times 9^4 = 52\,488$ nombres de cinq chiffres ne contenant aucun 9.

Exemple : à l'aide du principe multiplicatif, retrouver le nombre d'injections d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n (**théorème 20.13**).
Notons $E = \{a_1, \ldots, a_p\}$ et F un ensemble de cardinal n. Pour former une injection f de E dans F, il y a n possibilités pour choisir $f(a_1)$. Il y a ensuite $n-1$ possibilités pour $f(a_2)$ (toutes sauf $f(a_1)$), $n-2$ pour $f(a_3)$ et ainsi de suite jusqu'à $n-p+1$ choix possibles pour $f(a_p)$. Au total, il y a donc $n \times (n-1) \times \cdots (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$ injections de E dans F d'après le principe multiplicatif.

Exemple : déterminer le nombre de surjections de $E = [\![1, n+1]\!]$ dans $F = [\![1, n]\!]$, où $n \in \mathbb{N}^*$. Une application de E dans F est surjective si et seulement si c'est une bijection entre $n-1$ éléments de E et $n-1$ éléments de F et que l'élément restant de F admet pour antécédents les deux éléments restants de E. Il y a n possibilités pour choisir un tel élément de F et $\binom{n+1}{2}$ choix possibles pour ses deux antécédents. Enfin, on sait qu'il y a $(n-1)!$ bijections entre deux ensembles de cardinal $n-1$. Ainsi, il y a $n \times \binom{n+1}{2} \times (n-1)! = n\frac{(n+1)!}{2!(n-1)!}(n-1)! = \frac{n(n+1)!}{2}$ surjections de E dans F.

Mise en œuvre : la plupart des exercices !

■ Passage au complémentaire

> ❑ **Méthode 20.2.— Comment dénombrer en passant au complémentaire**
> Pour déterminer le cardinal d'une partie A d'un ensemble E, il est parfois plus simple de trouver le cardinal de son complémentaire $\overline{A}$. On a alors $\text{Card}\ (A) = \text{Card}\ (E) - \text{Card}\ (\overline{A})$.
> Dans un énoncé, la présence de « au moins un » doit inciter à passer au complémentaire (« aucun »).

Exemple : combien y a-t-il de mots (ayant un sens ou non) de 3 lettres avec au moins un w ?
Il y a $26 \times 26 \times 26$ mots de 3 lettres (26 possibilités pour chaque lettre) et $25 \times 25 \times 25$ mots de 3 lettres ne contenant pas de w (25 possibilités pour chaque lettre). Le passage au complémentaire permet facilement de conclure : il y a $26^3 - 25^3 = 1\,951$ mots de 3 lettres avec au moins un w.

Mise en œuvre : exercice 20.4, exercice 20.11, exercice 20.14.

■ Utilisation d'une réunion d'ensembles deux à deux disjoints

> ❑ **Méthode 20.3.— Comment dénombrer à l'aide d'une réunion d'ensembles deux à deux disjoints**
> Pour dénombrer un ensemble, on est parfois amené à le décomposer en une réunion de parties deux à deux disjointes, chacune étant facile à dénombrer (**corollaire 20.8**). Plus précisément, si $E = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ avec $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$, alors :
>
> $$\text{Card}\ (E) = \text{Card}\ (A_1) + \text{Card}\ (A_2) + \cdots + \text{Card}\ (A_n).$$
>
> Dans le raisonnement, on utilise des « ou » pour séparer les différentes possibilités. C'est un raisonnement par disjonction des cas (voir chapitre **logique**).
> La présence dans un énoncé de « au plus » (ou au « moins ») se prête particulièrement à cette méthode, en utilisant des parties définies à l'aide de « exactement ». Par exemple, au plus 2 signifie exactement 0 ou exactement 1 ou exactement 2.

Exemple : combien y a-t-il de carrés dans un quadrillage de 3 cases sur 3 ?
Dans un tel quadrillage, un carré peut être de côté 1, 2 ou 3 (1 **ou** 2 **ou** 3). Il y a 9 carrés de côté 1, 4 carrés de côté 2 et un seul carré de côté 3. Finalement, on a au total $9 + 4 + 1 = 14$ carrés dans ce quadrillage.

Exemple : démontrer la formule de Pascal à l'aide d'un dénombrement.
Soit E un ensemble à n éléments, et F une partie de E à p éléments. On sait qu'il y a $\binom{n}{p}$ parties de E à p éléments. Nous allons compter ces parties d'une autre manière, en considérant un élément a de E. Les sous-ensembles de E à p éléments se partagent en deux sous-ensembles **disjoints** : ceux qui contiennent a et ceux qui ne contiennent pas a.

- Le premier de ces ensembles a pour cardinal $\binom{n-1}{p-1}$. En effet, pour former une partie de E à p éléments dont a, on choisit $p-1$ éléments autres que a parmi les $n-1$ éléments distincts de a.

- Le second de ces ensembles a pour cardinal $\binom{n-1}{p}$: pour former une partie de E à p éléments ne contenant pas a, on choisit ces p éléments parmi les $n-1$ éléments de E distincts de a.

Le nombre total de parties de E à p éléments est donc $\binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$. Ainsi, $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$.

Exemple : combien y a-t-il de mots (ayant un sens ou non) de 3 lettres avec au plus un w ?
Un mot de 3 lettres avec au plus un w a un seul w, ou bien aucun. Tout d'abord, il y a $25 \times 25 \times 25$ mots de 3 lettres sans w (25 possibilités pour chaque lettre). Pour former un mot de 3 lettres avec un seul w, il y a 25 possibilités pour chacune des deux lettres autres que w, une seule possibilité pour w, qui peut occuper une des 3 places du mot, soit $3 \times 25 \times 25$ mots. Au total, on obtient $25^3 + 3 \times 25^2 = 17\,500$ mots de 3 lettres avec au plus un w.

Exemple : à l'aide de la **méthode 20.3**, retrouver le nombre d'injections d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n (**théorème 20.13**).
Soit E un ensemble de cardinal $p \in \mathbb{N}^*$, F un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$, avec $p \leqslant n$. Considérons une partie A de F à p éléments. On note $\mathcal{I}_A$ l'ensemble des injections de E dans F qui ont pour image A. L'ensemble des injections de E dans F est la réunion disjointe des ensembles $\mathcal{I}_A$, où $A \subset F$. Par ailleurs, tout élément f de $\mathcal{I}_A$ peut être vu comme une bijection de E dans A (Card E = Card A). Par conséquent, Card $\mathcal{I}_A = p!$. Comme il y a $\binom{n}{p}$ possibilités pour former la partie A, on en déduit que l'ensemble des injections de E dans F a pour cardinal $p! \times \binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!}$.

Mise en œuvre : exercice 20.4.

■ Reconnaître et dénombrer les objets

❑ Méthode 20.4.— Comment reconnaître les objets à dénombrer

Lorsque l'on cherche à résoudre un problème de dénombrement, il faut essayer de se ramener à des objets connus du cours : listes, listes d'éléments distincts, permutations, combinaisons. Pour les reconnaître, on doit se demander si l'ordre intervient, et s'il peut y avoir des répétitions.

- On utilise les listes lorsque l'on choisit successivement des éléments dans un ensemble, avec d'éventuelles répétitions (**ordre, répétitions possibles**).
- On utilise les listes d'éléments distincts lorsque l'on choisit successivement des éléments dans un ensemble, sans répétition possible (**ordre, pas de répétition**).
- On utilise les permutations lorsque l'on choisit successivement tous les éléments d'un ensemble (**ordre, pas de répétition**).
- On utilise les combinaisons lorsque l'on choisit simultanément certains objets d'un ensemble (**pas d'ordre, pas de répétition**).

Cette méthode, associée à la suivante, permet d'effectuer des dénombrements usuels.

❑ Méthode 20.5.— Comment dénombrer les objets de référence

Lorsque l'on a reconnu des objets de référence, on applique les résultats du cours :

- le nombre de p-listes d'un ensemble de cardinal n est n^p ;
- le nombre de p-listes d'éléments distincts d'un ensemble de cardinal n est $\frac{n!}{(n-p)!}$;
- le nombre de permutations d'un ensemble de cardinal n est $n!$;
- le nombre de p-combinaisons d'un ensemble de cardinal n est $\binom{n}{p}$.

Exemple : on tire au hasard trois boules d'une urne qui en contient 10, numérotées de 1 à 10.

- Si l'on tire les boules successivement et avec remise, un tirage peut être vu comme une 3-liste de l'ensemble $[\![1, 10]\!]$ (ordre, répétitions éventuelles). Dans ce cas, il y a donc $10^3 = 1\,000$ tirages possibles (**théorème 20.11**).
- Si l'on tire les boules successivement et sans remise, un tirage peut être vu comme une 3-liste d'éléments distincts de l'ensemble $[\![1, 10]\!]$ (ordre, pas de répétition). Il y a, dans ce cas, $\frac{10!}{(10-3)!} = 10 \times 9 \times 8 = 720$ tirages possibles (**théorème 20.12**).
- Si l'on tire simultanément les trois boules, un tirage peut être vu comme une combinaison de trois boules choisies parmi 10 (pas d'ordre, pas de répétition). Dans ce cas, il y a $\binom{10}{3} = \frac{10!}{7!3!} = 120$ tirages possibles (**théorème 20.15**).

Exemple : dans une finale olympique du 100 mètres, combien y a-t-il de podiums possibles ?
Dans une finale du 100 mètres, il y a 8 coureurs (8 couloirs) et seuls les trois premiers à l'arrivée constituent le podium. Un podium peut donc être vu comme une 3-liste d'éléments distincts de l'ensemble des coureurs (pas de répétiton possible et l'ordre compte évidemment). Par conséquent, il y a $\frac{8!}{(8-3)!} = 8 \times 7 \times 6 = 336$ podiums possibles.

Exemple : on considère trois urnes numérotées de 1 à 3, et 5 boules numérotées de 1 à 5. On range au hasard ces boules dans les trois urnes. Combien y a-t-il de manières différentes de les ranger ?
Un rangement de ces boules peut être vu comme une 5-liste $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$, où, pour $k \in [\![1, 5,]\!]$, α_k désigne l'urne dans laquelle on a déposé la boule k ($\alpha_k \in \{1, 2, 3\}$). Ainsi, le nombre de façons de ranger ces 5 boules est le nombre de 5-listes de $\{1, 2, 3\}$, c'est-à-dire $5^3 = 125$.

Exemple : sur une étagère, on range au hasard les n tomes d'une encyclopédie.
Combien y a-t-il de manières différentes de les ranger ? Parmi ces rangements, combien permettent de retrouver les tomes 1 et 2 côte à côte et dans cet ordre ?
• Un rangement est clairement une permutation de ces n tomes. Il y en a $n!$ au total.
• Pour ranger les tomes 1 et 2 côte à côte et dans cet ordre, on commence par placer le tome 1, il y a $n - 1$ possibilités (toutes sauf la dernière). Une fois ce tome placé, il n'y a pas le choix pour le tome 2, qui est nécessairement à droite à côté du tome 1. Enfin, il reste à placer les $n - 2$ tomes restants sur les $n - 2$ places restantes, soit $(n - 2)!$ possibilités (on est ramené au point précédent, avec $n - 2$ livres). Finalement, on obtient $(n - 1) \times (n - 2)! = (n - 1)!$ rangements.

Exemple : combien y a-t-il d'anagrammes (ayant un sens ou non) du mot TARATATA ?
Une anagramme de TARATATA est un mot quelconque obtenu à l'aide des lettres de TARATATA.

Notons que les lettres ne jouent pas ici le même rôle puisque, par exemple, permuter deux A dans ce mot donne évidemment le même mot. Le mot TARATATA contient huit lettres dont trois T, quatre A et un R. Pour former une anagramme de ce mot, on choisit successivement :

- 3 positions parmi les 8 possibles pour placer les T, soit $\rightsquigarrow \binom{8}{3} = 56$ possibilités ;
- 4 positions parmi les 5 restantes pour les A, soit $\rightsquigarrow \binom{5}{4} = 5$ possibilités ;
- 1 position pour le R qui ne peut aller que sur l'unique place restante, soit $\rightsquigarrow$ 1 possibilité !

Par conséquent, il y a $56 \times 5 \times 1 = 280$ anagrammes du mot TARATATA.
On peut évidemment retrouver ce résultat en commençant par placer les A ou le R.

Exemple : les caractères de l'écriture Braille, destinée aux aveugles, sont formés de points en relief obtenus en piquant une feuille de papier. Pour chaque caractère, on dispose d'un rectangle de deux points de large sur trois points de haut. Pour former un caractère, on pique au moins l'un de ces six points. Combien de caractères Braille peut-on constituer ?

Pour former un caractère, il y a deux possibilités pour chaque point : piqué ou non piqué. Cela donne $2^6 = 64$ possibilités (c'est le nombre de 6-listes d'un ensemble à 2 éléments). Mais nous avons compté (en trop) le rectangle sans aucun point piqué, qui n'est pas un caractère. Au total, on peut donc former 63 caractères.

Mise en œuvre : la quasi-totalité des exercices !

■ Principe des tiroirs

❑ Méthode 20.6.— Comment appliquer le principe des tiroirs
D'après la **proposition 20.2**, une application de E dans F, avec $\text{Card}\ (E) > \text{Card}\ (F)$ ne peut pas être injective : il existe donc deux éléments qui ont la même image. Ce résultat est connu sous le nom imagé de **principe des tiroirs** : si l'on range cinq dossiers dans quatre tiroirs, alors nécessairement un tiroir contient au moins deux dossiers. Ce principe, qui paraît évident, permet de démontrer des résultats qui ne le sont pas toujours.

Exemple : dans un village de 700 habitants, deux personnes (au moins) ont les mêmes initiales. En effet, pour former les initiales d'une personne, il y a $26 \times 26 = 676$ possibilités (26 possibilités pour la première lettre du prénom, 26 pour celle du nom). Le principe des tiroirs assure qu'à partir de 677 habitants, deux personnes (au moins) possèdent les mêmes initiales. C'est à plus forte raison vrai pour 700 habitants.

Mise en œuvre : exercice 20.8.

Vrai/Faux

	Vrai	Faux
1. Le nombre de sous-ensembles de $[\![1,5]\!]$ est 32.	☐	☐
2. Le nombre de permutations de $[\![1,5]\!]$ est 120.	☐	☐
3. Le nombre d'applications injectives de $[\![1,4]\!]$ dans $[\![1,6]\!]$ est 6^4.	☐	☐
4. Une application surjective de $[\![1,8]\!]$ dans $[\![9,16]\!]$ est bijective.	☐	☐
5. Le nombre de quintés possibles dans une course de 20 partants est 20^5.	☐	☐
6. Le nombre de rangements possibles de quatre dossiers dans six tiroirs est 6^4.	☐	☐
7. Il y a 190 façons possibles de choisir deux personnes dans un groupe de 20.	☐	☐
8. On peut former 5^{26} mots de cinq lettres différents.	☐	☐
9. Le nombre d'anagrammes du mot *debout* est le nombre de permutations de ses lettres.	☐	☐
10. Le nombre d'anagrammes du mot *assis* est le nombre de permutations de ses lettres.	☐	☐

Énoncé des exercices

Urnes et dés

Exercice 20.1 : Une urne contient 15 boules numérotées de 1 à 15. Les boules numérotées de 1 à 5 sont blanches, les boules numérotées de 6 à 15 sont noires.

1. On tire simultanément cinq boules de l'urne.
   a. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
   b. Combien de tirages donnent 2 boules blanches et 3 boules noires ?
2. On tire successivement 5 boules de l'urne sans remise.
   a. En tenant compte de l'ordre, combien y a-t-il de tirages possibles ?
   b. Combien de tirages donnent 2 boules blanches et 3 boules noires dans un ordre quelconque ?

Exercice 20.2 : Soit $n, k \in \mathbb{N}$ tels que $2 \leqslant k \leqslant n$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n.

1. On tire simultanément k boules de l'urne.
   a. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
   b. Soit $p \in [\![k, n]\!]$. Combien y a-t-il de tirages pour lesquels p est le plus grand numéro tiré ?
2. On tire successivement et sans remise k boules de l'urne.
   a. En tenant compte de l'ordre, combien y a-t-il de tirages possibles ?
   b. Combien y a-t-il de tirages commençant par la boule 1 ?
3. On tire successivement et avec remise k boules de l'urne.
   a. En tenant compte de l'ordre, combien y a-t-il de tirages possibles ?
   b. Combien y a-t-il de tirages durant lesquels 2 numéros exactement sont apparus ?

Exercice 20.3* : On lance quatre fois un dé. On appelle « tirage » la suite de ces 4 lancers.

1. Combien y a-t-il de tirages différents ?
2. Combien y a-t-il de tirages avec exactement deux numéros différents ?
3. Combien y a-t-il de tirages avec exactement trois numéros différents ?

Exercice 20.4* : On lance 3 dés à six faces, discernables les uns des autres (par exemple trois dés de couleur différente).

1. Déterminer le nombre total de tirages.
2. Déterminer nombre de tirages contenant au moins un six.
3. Déterminer le nombre de tirages contenant au moins deux faces identiques.
4. Déterminer le nombre de tirages tels que la somme des trois dés soit paire.
5. Déterminer le nombre de tirages vérifiant les conditions **2** et **3**.
6. Déterminer le nombre de tirages vérifiant les conditions **3** et **4**.

Dénombrements divers

Exercice 20.5 : Dans un lycée de 1 200 élèves, 652 pratiquent une activité sportive, 327 jouent d'un instrument de musique et 453 ne font ni sport, ni musique. Déterminer le nombre d'élèves sportifs et musiciens.

Exercice 20.6 : On dispose de 12 mouchoirs identiques, qui ne diffèrent que par leur couleur : 5 sont bleus, 4 sont verts et 3 sont rouges. On forme une pile constituée de tous ces mouchoirs.

1. Combien peut-on former de piles différentes ?
2. Dans combien de ces dispostions retrouve-t-on les mouchoirs rouges au-dessus de la pile ?

Exercice 20.7 : Nombre d'immatriculations
En France, chaque véhicule possède une immatriculation composée de sept caractères : deux lettres, un tiret, trois chiffres, un tiret et deux lettres. Par exemple, BY-337-MA. Les lettres I, O et U ne sont pas utilisées du fait de leur ressemblance avec 1, 0 et V. Par ailleurs, les séries SS et WW ne sont pas utilisées dans le bloc de gauche et la série SS n'est pas utilisée dans le bloc de droite. Enfin, la série de chiffres démarre à 001. Selon ces données, combien d'immatriculations différentes peut-on attribuer ?

Exercice 20.8 : À Bordeaux, y a-t-il deux personnes au moins qui ont le même nombre de cheveux ? *Données : une personne a au plus 200 000 cheveux et, lors du dernier recensement, Bordeaux comptait 239 157 habitants.*

Exercice 20.9* : Loto Foot®7
Au Loto Foot®7, le joueur remplit une grille dans laquelle il indique ses pronostics pour 7 matchs de football à venir. Pour chacun des matchs, il peut cocher une des 3 cases au choix :

- $\boxed{1}$ pour une victoire de l'équipe qui reçoit ;
- $\boxed{N}$ pour un match nul ;
- $\boxed{2}$ pour une victoire de l'équipe qui se déplace.

1. De combien de façons différentes un joueur peut-il remplir la grille ?
2. Combien existe-t-il de grilles dans lesquelles tous les pronostics sont faux ?
3. Combien existe-t-il de grilles avec exactement trois pronostics corrects ?
4. Pour gagner, il faut avoir trouvé au moins 6 pronostics exacts. Quel est le nombre de grilles gagnantes ?

Exercice 20.10 : On appelle mot toute suite de lettres, qu'elle ait un sens ou non.
Déterminer le nombre de mots :
1. de quatre lettres ;
2. de quatre lettres distinctes ;
3. de quatre lettres distinctes ayant une seule voyelle ;
4. de quatre lettres distinctes ayant une seule voyelle et dont les 3 consonnes ne sont pas côte à côte.

Exercice 20.11* : Grilles de mots croisés
Une grille de mots croisés est un tableau rectangulaire à n lignes et p colonnes, constitué de $n \times p$ cases dont certaines sont noircies et d'autres pas.
1. Dans cette question, on s'intéresse aux grilles à 6 lignes et 4 colonnes avec 4 cases noircies.
   a. Combien de grilles différentes peut-on former ?
   b. Parmi ces grilles, combien d'entre-elles ont :
      - exactement deux coins noircis ?
      - au moins un coin noirci ?
      - exactement une case noircie par colonne ?
      - exactement une case noircie par colonne et au plus une case noircie par ligne ?
2. On s'intéresse maintenant aux grilles à n lignes et p colonnes avec k cases noircies ($k \in [\![1, np]\!]$).

a. Combien de grilles différentes peut-on former ?

b. Parmi ces grilles, combien d'entre-elles ont :

- au plus une case noircie par colonne ?
- au plus une case noircie par colonne et au plus une case noircie par ligne ?

Exercice 20.12* : Dans une classe de 48 élèves, déterminer le nombre de façons de former 16 trinômes :

1. Lorsque les groupes sont numérotés ;

2. Lorsque les groupes ne sont pas numérotés.

Exercice 20.13* : Combien y a-t-il de carrés dans un quadrillage de n cases sur n ?

Exercice 20.14* : Un peu de poker

On considère un jeu de 52 cartes réparties en 4 couleurs ♣, ♡, ♠, ◇. Chacune de ces couleurs est constituée de 13 hauteurs : du 2 au 10, valet, dame, roi, as. Dans ce jeu de 52 cartes, on choisit simultanément 5 cartes. Ces cinq cartes sont appelées une « main ».

1. Déterminer le nombre total de mains.

2. Déterminer le nombre de mains qui contiennent un carré (4 cartes de même hauteur).

3. Déterminer le nombre de mains qui contiennent au moins un trèfle.

4. Déterminer le nombre de mains qui contiennent un brelan d'as (trois as exactement).

5. Déterminer le nombre de « full » (un brelan et une paire).

6. Déterminer le nombre de mains qui contiennent une double paire (2 cartes d'une même hauteur et 2 autres cartes de même hauteur sans carré ni full).

7. Déterminer le nombre de mains qui contiennent exactement un roi et un cœur.

8. Déterminer le nombre de « quintes » (5 cartes qui se suivent, sans être de la même couleur).

9. Déterminer le nombre de « couleurs » (cinq cartes de la même couleur qui ne se suivent pas).

■ Plus théorique...

Exercice 20.15* : Soit n et p deux entiers naturels non nuls. Déterminer le nombre d'applications strictement croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$.

Exercice 20.16* : Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer la somme des cardinaux de toutes les parties de E.

2. Soit A un sous-ensemble de E de cardinal p. Déterminer le nombre de parties de E qui contiennent exactement un élément de A.

3. Calculer le cardinal de $F = \{(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2\}$.

4. Calculer le cardinal de $G = \{(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2 \mid A \subset B\}$.

5. Calculer le cardinal de $H = \{(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2 \mid A \cap B = \emptyset\}$.

Exercice 20.17* : À l'aide d'un dénombrement, montrer que $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Exercice 20.18* : Soit k, p, n des entiers naturels tels que $p \leqslant k \leqslant n$.

1. À l'aide d'un dénombrement, montrer que $\binom{n-p}{k-p}\binom{n}{p} = \binom{n}{k}\binom{k}{p}$.

2. En déduire la valeur des sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{p=0}^{k} \binom{n-p}{k-p}\binom{n}{p} \; ; \qquad S_2 = \sum_{k=p}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{k}{p}.$$

Exercice 20.19 : Nombre de dérangements**

Soit E un ensemble fini de cardinal n. On dit qu'une bijection f de E dans lui-même est un dérangement lorsqu'elle n'admet aucun point fixe ($f(x) \neq x$ pour tout $x \in E$). On note D_n le nombre de dérangements de E. Par convention, $D_0 = 1$.

1. Calculer D_1 et D_2.

2. Montrer que $n! = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k$.

3. En déduire que $D_n = (-1)^n \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k!$.

Indications

Ex. 20.2

Listes, combinaisons ou permutations ?

Ex. 20.5

Que vaut le cardinal d'une réunion ?

Ex. 20.8

Principe des tiroirs !

Ex. 20.13

On peut repérer un carré du quadrillage par son coin supérieur gauche (par exemple).

Ex. 20.19

*Pour la question 3, on pourra utiliser l'***exercice 20.18**.

Corrigé des vrai/faux

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
V	V	F	V	F	V	V	F	V	F

1. D'après le **corollaire 20.10**, il y a $2^5 = 32$ parties de $[\![1, 5]\!]$.
2. Il y a $5! = 120$ permutations de $[\![1, 5]\!]$ d'après le **théorème 20.14**.

3. D'après le **théorème 20.13**, le nombre d'injections de $[\![1, 4]\!]$ dans $[\![1, 6]\!]$ est $\frac{6!}{4!} = 6 \times 5 = 30$.

4. C'est vrai d'après le **théorème 20.3** : une application surjective (ou injective) entre deux ensembles finis de même cardinal est aussi bijective.

5. Un quinté est une 5-liste d'éléments distincts (l'ordre compte et il n'y a pas de répétition). Pour 20 partants, il y en a donc $\frac{20!}{15!} = 20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16$.

6. Un rangement peut être vu comme une 4-liste de l'ensemble des tiroirs (six possibilités pour ranger chacun des quatre dossiers). Il y a donc 6^4 rangements possibles.

7. Choisir deux personnes dans un groupe de 20, c'est choisir une partie à deux éléments d'un ensemble à 20 éléments. On sait qu'il y en a au total $\binom{20}{2} = \frac{20 \times 19}{2} = 190$.

8. Un mot de cinq lettres est une 5-liste de $\{A, \ldots, Z\}$. Il y en a 26^5 au total.

9. C'est vrai car les lettres de ce mot sont toutes distinctes. Il y a donc $6! = 720$ anagrammes du mot *debout*.

10. Comme les lettres de ce mot ne sont pas distinctes, c'est faux. Permuter deux s de ce mot donne le même mot ! Il y a $5! = 120$ permutations des lettres de ce mot. Pour obtenir le nombre d'anagrammes, il faut ensuite diviser $5!$ par le nombre de permutations des trois s, soit $3! = 6$. Il y a donc $\frac{120}{6} = 20$ anagrammes du mot *assis*. On peut aussi raisonner comme dans le dernier exemple de la **méthode 20.5**.

❑ **Erreurs classiques**

- Confondre les listes et les combinaisons. Dans un ensemble fini, une p-combinaison est une partie à p éléments : pas d'ordre, pas de répétition possible. En revanche, dans une p-liste les éléments sont ordonnés et ils peuvent être répétés (sauf dans le cas d'une p-liste d'éléments distincts).

- Écrire systématiquement $\text{Card}\ (A \cup B) = \text{Card}\ (A) + \text{Card}\ (B)$ pour calculer le cardinal d'une réunion de deux ensembles finis. Cette formule ne fonctionne que dans le cas où A et B sont disjoints ($A \cap B = \emptyset$). Dans le cas général, on applique le **théorème 20.6** :

$$\text{Card}\ (A \cup B) = \text{Card}\ (A) + \text{Card}\ (B) - \text{Card}\ (A \cap B).$$

Corrigé des exercices

Exercice 20.1

1.

a. On choisit simultanément cinq boules parmi 15 : il y a $\binom{15}{5}$ tirages possibles.

Choix simultané : pas d'ordre, pas de répétition.

b. Pour dénombrer les tirages qui donnent 2 boules blanches et 3 boules noires, on décrit les étapes qui mènent à la réalisation d'un tel tirage :

- On choisit 2 boules blanches parmi les 5, $\rightsquigarrow \binom{2}{5}$ possibilités
- On choisit 3 boules blanches parmi les 10 $\rightsquigarrow \binom{10}{3}$ possibilités

Le principe multiplicatif donne donc $\binom{5}{2} \times \binom{10}{3} = 1\,200$ tirages.

2.

Tirage ordonné sans remise : liste d'éléments distincts.

a. On choisit cinq boules parmi 15 de façon ordonnée et sans répétition : il y a $\frac{15!}{10!} = 15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11$ tirages possibles.

b. On choisit deux boules blanches parmi les 5 et trois boules noires parmi les 10, ce qui donne $\binom{5}{2} \times \binom{10}{3}$ possibilités. Il faut ensuite multiplier par toutes les permutations obtenues à l'aide de ces cinq boules : il y en a 5!. Au total, il y a $5! \times \binom{5}{2} \times \binom{10}{3} = 120 \times 10 \times 120$ tirages. ▲

Exercice 20.2

1.

Tirage simultané : combinaison.

a. Un tel tirage est une combinaison de k boules parmi n. Il y a donc $\binom{n}{k}$ tirages possibles.

b. La boule p étant fixée, on choisit les $k-1$ autres boules parmi les boules numérotées de 1 à $p-1$. Il y a $\binom{p-1}{k-1}$ possibilités pour ce choix ; d'où $\binom{p-1}{k-1}$ tirages.

2.

Tirage ordonné sans remise : liste d'éléments distincts.

a. Un tel tirage est k-liste d'éléments distincts de l'ensemble des n boules. Il y a donc $\frac{n!}{(n-k)!}$ tirages possibles.

b. La boule 1 étant choisie, il y a $n-1$ possibilités pour la deuxième, $n-2$ pour la troisième, …, $n-k+1$ pour la k-ième. Au total, il y a ainsi $\frac{(n-1)!}{(n-k)!}$ tirages possibles.

3.

Tirage ordonné avec remise : liste.

a. Un tel tirage est une k-liste d'un ensemble à n éléments. Il y a donc n^k tirages possibles.

b. On commence par choisir deux numéros i et j entre 1 et n, ce qui donne $\binom{n}{2}$ possibilités. Pour chacun des k tirages, on choisit une boule parmi ces deux numéros, puis on exclut les deux séries de tirages qui ne donnent que des i ou que des j ; soit $2^k - 2$ possibilités. Par conséquent, on obtient $\binom{n}{2}(2^k - 2) = n(n-1)(2^{k-1} - 1)$ tirages au total. ▲

$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

Exercice 20.3

Ordre et répétition.

1. Un tirage peut être vu comme une 4-liste de $[\![1, 6]\!]$: il y en a $6^4 = 1\,296$.

2. Un tirage avec exactement deux numéros différents peut prendre deux formes :

- trois fois le même numéro et un numéro différent ;

- deux fois deux numéros identiques.

Dans le premier cas, on choisit le numéro qui apparaît trois fois (6 possibilités), la position de ce numéro dans le tirage ($\binom{4}{3}$ choix), et enfin le numéro qui n'apparaît qu'une fois (5 possibilités). Ce numéro se trouve alors à l'unique position restante. Il y a donc $6 \times \binom{4}{3} \times 5 = 120$ tirages de ce type.

Cette fois, les deux numéros jouent le même rôle.

Dans le second cas, on choisit les deux numéros qui apparaissent ($\binom{4}{2}$ possibilités), deux positions dans le tirage pour l'un d'entre eux ($\binom{6}{2}$ possibilités), l'autre numéro se place alors sur les deux positions restantes du tirage. Il y a ainsi $\binom{6}{2} \times \binom{4}{2} = 90$ tirages possibles.

Méthode 20.3

Ainsi, il y a $120 + 90 = 210$ tirages avec exactement deux numéros différents.

3. Dans un tirage avec exactement trois numéros différents, un numéro apparaît deux fois et deux autres une fois seulement. On commence par choisir le numéro qui apparaît deux fois (6 possibilités) et les positions de ce numéro dans le tirage ($\binom{4}{2}$ possibilités). On choisit ensuite 2 numéros parmi les cinq restants ($\binom{5}{2}$ possibilités) et une position pour l'un deux (2 possibilités), l'autre prenant nécessairement la seule position restante. On obtient $6 \times \binom{4}{2} \times \binom{5}{2} \times 2 = 720$ tirages avec exactement trois numéros différents. ▲

Exercice 20.4

Ordre, répétition possible.

1. Un tirage peut-être vu comme une 3-liste de $[\![1, 6]\!]$, on sait qu'il y en a au total $6^3 = 216$.

Méthode 20.2

2. Un tirage sans aucun six est une 3-liste de $[\![1, 5]\!]$ (cinq possibilités pour chacun des dés, toutes sauf 6), il y en a 5^3. En passant au complémentaire, on obtient $6^3 - 5^3 = 91$ tirages avec au moins un 6.

Liste d'éléments distincts.

3. On passe de nouveau au complémentaire. Le nombre de tirages avec trois faces différentes est $\frac{6!}{(6-3)!} = 6 \times 5 \times 4 = 120$. Il y a ainsi $6^3 - 120 = 96$ tirages avec au moins deux faces identiques.

Méthode 20.3

4. La somme des faces est paire dans deux cas disjoints et complémentaires : les trois faces sont paires ou deux sont impaires et la dernière paire. Dans le premier cas, un tirage est une 3-liste de $\{2, 4, 6\}$: il y en a $3^3 = 27$. Dans le second cas, on choisit un dé portant une face paire (3 choix) et un numéro sur ce dé (3 possibilités : 2, 4 ou 6), puis un numéro impair sur les deux dés restants (3×3 choix). Au total, il y a $3^3 + 3^4 = 108$ tirages pour lesquels la somme des dés est paire.

C'est de nouveau la **méthode 20.3**.

5. On distingue cette fois trois cas disjoints et complémentaires : un 6 et deux faces identiques, deux 6 et une autre face qui n'est pas un 6, et enfin trois 6. Dans le premier cas, on choisit un dé qui portera le 6 (3 choix), puis une valeur différente de 6 portée par les deux autres dés (5 choix), il y a donc 15 tirages de ce type. Dans le second cas, on choisit un dé parmi les trois pour porter un numéro différent de 6 et on a 5 faces possibles pour ce dé, soit 3×5 tirages (les deux autres dés portent forcément six). Enfin, il n'y a évidemment qu'un tirage donnant trois six. Finalement, on obtient $15 + 15 + 1 = 31$ tirages avec au moins un 6 et au moins deux faces identiques.

Encore la **méthode 20.3** *!*

6. On utilise encore trois cas disjoints et complémentaires : 2 faces paires identiques et une troisième paire mais différente, 3 faces paires identiques, 2 faces impaires identiques et une face paire. Dans le premier cas, on choisit le dé qui portera la valeur différente (3 choix), une valeur sur ce dé (3 choix), puis une valeur différente sur les deux dés restants (2 possibilités). Il y a donc

$3 \times 3 \times 2$ tirages de ce type. Dans le deuxième cas, il suffit de choisir la valeur paire commune pour les trois dés, soit 3 tirages. Dans le troisième cas, on choisit un dé qui portera la valeur paire et cette valeur (3×3 choix), puis la valeur impaire commune pour les deux autres dés (3 choix), soit $3 \times 3 \times 3$ tirages. Ainsi, il y a $18+3+27 = 48$ tirages avec au moins deux faces identiques et une somme paire. ▲

Exercice 20.5

Notons E l'ensemble des élèves, S l'ensemble des élèves sportifs et M l'ensemble des élèves musiciens. D'après l'énoncé, Card $E = 1\,200$, Card $S = 652$, Card $M = 327$ et Card $(E \setminus (S \cup M)) = 453$. On a

On cherche Card $(M \cap S)$.

$$\begin{aligned}\text{Card } (E \setminus (S \cup M)) &= \text{Card } E - \text{Card } (S \cup M)\\ &= \text{Card } E - \text{Card } S - \text{Card } M + \text{Card } (S \cap M),\end{aligned}$$

donc Card $(S \cap M) = 453 - 1\,200 + 652 + 327 = 232$.
Il y a donc 232 élèves sportifs et musiciens. ▲

Exercice 20.6

1. Dans cet exercice, les mouchoirs de même couleur jouent le même rôle puisqu'ils sont identiques. Pour former une pile, on commence par choisir 5 positions parmi les 12 possibles pour placer les mouchoirs bleus, soit $\binom{12}{5}$ possibilités. On choisit ensuite pour les mouchoirs verts 4 positions parmi les 7 restantes : $\binom{7}{4}$ possibilités. Il n'y a alors plus qu'une seule possibilité de placer les mouchoirs rouges aux trois places restantes. Finalement, le nombre total de piles différentes est :

Voir les questions sur les anagrammes !

$$\binom{12}{5} \times \binom{7}{4} \times 1 = \frac{12!}{5!7!} \times \frac{7!}{4!3!} = 11 \times 5 \times 9 \times 8 \times 7 = 27\,720.$$

2. Il n'y a qu'une seule possibilité de placer les trois mouchoirs rouges au-dessus de la pile puisque ceux-ci sont indiscernables. On choisit ensuite 5 places parmi les 9 restantes pour les mouchoirs bleus, ce qui laisse $\binom{9}{5}$ possibilités. Les mouchoirs rouges et bleus étant placés, il n'y a plus qu'une seule façon de disposer les mouchoirs verts (indiscernables). Ainsi, les mouchoirs rouges se retrouvent au-dessus dans $\binom{9}{5} = 126$ piles. ▲

On peut évidemment choisir de placer les mouchoirs verts, soit $\binom{9}{4} = \binom{9}{5}$ possibilités.

Exercice 20.7

Pour former une immatriculation, on choisit successivement deux lettres, trois chiffres et deux lettres. Les deux premières lettres constituent une 2-liste de l'alphabet privé de I, O et U, et on retire les séries SS et WW. Il y a donc $23^2 - 2$ possibilités. C'est la même configuration pour les deux lettres de droite, sauf que l'on exclut cette fois uniquement la série SS : $23^2 - 1$ possibilités. Enfin, il y a 999 choix pour les chiffres du milieu. On obtient $(23^2 - 2) \times 999 \times (23^2 - 1) = 527 \times 999 \times 528$ immatriculations possibles. ▲

277 977 744 immatriculations possibles.

Exercice 20.8

C'est le **principe des tiroirs** ! Comme une personne a au plus 200 000 cheveux, on peut répartir les habitants d'une ville selon leur nombre de cheveux, dans 200 001 tiroirs (toutes les possibilités de 0 à 200 000). Dans une ville d'au moins 200 002 habitants (ce qui est le cas de Bordeaux), on est assuré que deux personnes (au moins) ont le même nombre de cheveux. ▲

Méthode 20.6

Corrigé

Exercice 20.9

Théorème 20.11

1. Le joueur a 3 possibilités pour chacun des 7 matchs : une grille peut être vue comme une 7−liste de l'ensemble $\{1, N, 2\}$. Il y a donc 3^7 grilles possibles.

Théorème 20.11

2. Pour que tous les pronostics soient faux, il faut avoir choisi une des deux mauvaises réponses pour chacun des 7 matchs, ce qui laisse 2 possibilités à chaque fois. On obtient donc 2^7 grilles.

3. Pour former une grille avec exactement trois réponses exactes, on commence par choisir 3 matchs parmi les 7 où le pronostic sera exact, ce qui laisse $\binom{7}{3}$ possibilités. Pour ces 3 matchs, le joueur donne la bonne réponse (une seule possibilité). Pour les 4 autres matchs, il donne un mauvais pronostic (2 possibilités pour chacun de ces 4 matchs). Au total, il y a $\binom{7}{3} \times 2^4$ grilles avec exactement trois pronostics exacts.

Dans ce cas, au moins 6 signifie 6 ou 7.

4. Pour gagner, le joueur doit avoir donné les 7 bons pronostics (1 seule possibilité) ou exactement 6 bons pronostics. Pour avoir exactement 6 bons pronostics, le raisonnement est le même qu'à la question précédente, en remplaçant 3 par 6 : il y a $\binom{7}{6} \times 2 = 14$ grilles avec exactement 6 bons pronostics. En conclusion, il y a $14 + 1 = 15$ grilles gagnantes. ▲

Exercice 20.10

Théorème 20.11

1. Pour former un mot de 4 lettres, on choisit 4 lettres parmi les 26 de l'alphabet, avec d'éventuelles répétitions. Un mot peut donc être vu comme une 4-liste de l'ensemble $\{A, \ldots, Z\}$, il y en a 26^4 au total.

Théorème 20.12

2. Un mot de 4 lettres distinctes peut être vu comme une 4-liste d'éléments distincts de l'ensemble $\{A, \ldots, Z\}$, il y en a au total $\frac{26!}{(26-4)!} = 26 \times 25 \times 24 \times 23$.

3. Pour former un mot avec une seule voyelle, on commence par choisir une voyelle parmi les 6, soit 6 possibilités. Il y a ensuite 4 possibilités pour choisir la place de cette voyelle. On complète alors avec 3 consonnes choisies parmi 20, sans répétition ($20 \times 19 \times 18$ possibilités). Le nombre de mots est donc $6 \times 4 \times 20 \times 19 \times 18$.

4. Former un tel mot équivaut à former un mot de 4 lettres distinctes, avec une voyelle sur l'une des deux places centrales. On choisit donc 1 voyelle parmi les 6 (6 possibilités), que l'on dispose sur l'une des deux positions centrales (2 possibilités). On complète en plaçant 3 consonnes choisies parmi 20, sans répétition ($20 \times 19 \times 18$ possibilités). Au total, on obtient $6 \times 2 \times 20 \times 19 \times 18$ mots. ▲

Exercice 20.11

1.

a. Une grille est entièrement déterminée par la position de ses cases noires, il suffit donc de choisir simultanément 4 cases noires parmi les 24 cases de la grille, ce qui donne $\binom{24}{4}$ grilles différentes.

b. • Pour former une grille avec exactement deux coins noircis, on commence par choisir 2 coins parmi 4, ce qui laisse $\binom{4}{2} = 6$ possibilités. On choisit ensuite 2 cases parmi les 20 qui ne sont pas des coins, soit $\binom{20}{2} = 190$ possibilités. Il y a donc $6 \times 190 = 1\,140$ grilles avec exactement deux coins noircis.
• Pour former une grille sans coin noirci, on choisit 4 cases noires parmi les 20 cases qui ne sont pas des coins, soit $\binom{20}{4}$ grilles. Le nombre de grilles avec

au moins un coin noirci est donc $\binom{24}{4} - \binom{20}{4}$, soit

$$\frac{24!}{20!\,4!} - \frac{20!}{16!\,4!} = 23 \times 22 \times 21 - 15 \times 19 \times 17.$$

• Pour former une grille avec exactement une case noircie par colonne, on choisit successivement 1 case parmi les 6 de chacune des colonne (6 possibilités à chaque fois). Au total, cela donne $6 \times 6 \times 6 \times 6 = 6^4$ grilles avec exactement une case noircie par colonne.
• Pour former une grille avec exactement une case noircie par colonne et par ligne, on commence par choisir 1 case parmi les 6 de la première colonne (6 possibilités). On choisit ensuite 1 case parmi les 5 de la deuxième colonne qui ne sont pas dans la ligne de la première case noire (5 possibilités). On continue en choisissant 1 case parmi les 4 de la troisième colonne qui ne sont pas dans les lignes des deux premières cases noires (4 possibilités). On termine en choisissant 1 case parmi les 3 de la quatrième colonne qui ne sont pas dans les lignes des trois premières cases noires (3 possibilités). Au total, il y a $6 \times 5 \times 4 \times 3$ grilles.

2.

a. Comme plus haut, une grille est entièrement déterminée par la position de ses cases noires. Il suffit de choisir simultanément k cases noires parmi les np cases de la grille, ce qui donne $\binom{np}{k}$ grilles différentes.

b. • Pour former une grille avec au plus une case noircie par colonne, on choisit successivement k colonnes parmi les p de la grille (soit $\binom{p}{k}$ possibilités), puis une case parmi les n dans chacune de ces k colonnes (n^k possibilités). Au total, il y a $\binom{p}{k} \times n^k$ grilles.
• Pour former une grille avec exactement une case noircie par colonne et par ligne, on commence par choisir k colonnes parmi les p de la grille ($\binom{p}{k}$ possibilités). On choisit ensuite 1 case parmi les n de la première colonne choisie (n possibilités), 1 case parmi les $n-1$ de la deuxième colonne qui ne sont pas dans la ligne de la première case noire ($n-1$ possibilités), 1 case parmi les $n-2$ de la troisième colonne qui ne sont pas dans la ligne des deux premières cases noires ($n-2$ possibilités), et ainsi de suite jusqu'à choisir 1 case parmi les $n-k+1$ de la k-ième colonne qui ne sont pas dans la ligne des $k-1$ premières cases noires ($n-k+1$ possibilités). Au total, on obtient $\binom{p}{k} \times n(n-1) \times \cdots \times (n-k+1)$ grilles. ▲

Exercice 20.12

1. Pour former le groupe 1, on choisit simultanément 3 élèves parmi les 48, soit $\binom{48}{3}$ possibilités. On choisit ensuite simultanément 3 élèves parmi les 45 restants pour former le groupe 2. On continue ainsi jusqu'au groupe 16, obtenu en choisissant simultanément 3 élèves parmi les 3 restants. Le nombre total de trinômes lorsque les groupes sont numérotés est donc :

$$\binom{48}{3} \times \binom{45}{3} \times \cdots \binom{3}{3} = \frac{48!}{3!45!} \times \frac{45!}{3!42!} \times \cdots \times \frac{6!}{3!3!} \times \frac{3!}{3!0!} = \frac{48!}{3!^{16}}.$$

2. On utilise la question précédente. On peut associer à chaque liste de 16 trinômes non numérotés 16! listes de trinômes numérotés, que l'on obtient

en permutant les 16 trinômes. D'après la question précédente, le nombre de façons de constituer 16 trinômes non numérotés est $\dfrac{48!}{(16!) \times 3!^{16}}$. ▲

Exercice 20.13

Dans ce quadrillage, un carré peut être de côté $1, 2, \ldots, n$. Il y a clairement $n \times n$ carrés de côté 1 et un seul carré de côté n. Cherchons maintenant le nombre de carrés de côté k, où $k \in [\![2, n-1]\!]$. On peut repérer un carré de côté k par sa case supérieure gauche.

- La case supérieure gauche d'un carré de côté 2 peut occuper toutes les lignes sauf la dernière, toutes les colonnes sauf la dernière. Il y a donc $(n-1)^2$ carrés de côté 2 dans le quadrillage.
- La case supérieure gauche d'un carré de côté 3 peut occuper toutes les lignes sauf les deux dernières et toutes les colonnes sauf les deux dernières : il y a $(n-2)^2$ carrés de côté 3 dans le quadrillage.
- Ainsi de suite : pour $k \in [\![1, n]\!]$, le quadrillage compte $(n-(k-1))^2$ carrés de côté k.

Méthode 20.3

Par conséquent, le nombre total de carrés dans le quadrillage est :

$$n^2 + (n-1)^2 + \cdots + 2^2 + 1^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

▲

Exercice 20.14

1. On choisit simultanément 5 cartes parmi 52, le nombre total de mains est donc $\binom{52}{5} = 2\,598\,960$.

4 cartes de même hauteur et une carte d'une autre hauteur.

2. On choisit la hauteur pour former le carré : 13 possibilités. Une fois cette hauteur choisie, il n'y a qu'un carré possible et on complète la main avec une carte choisie parmi les 48 restantes. On obtient ainsi $13 \times 48 = 624$ mains avec un carré.

Méthode 20.2

3. On passe au complémentaire en dénombrant les mains qui ne contiennent pas de trèfle. Ces mains sont obtenues en choisissant 5 cartes parmi les 39 qui ne sont pas des trèfles, soit $\binom{39}{5}$ possibilités. En passant au complémentaire, il y a donc $\binom{52}{5} - \binom{39}{5} = 2\,023\,203$ mains avec au moins un trèfle.

Principe multiplicatif.

4. Pour obtenir 3 as, on en choisit 3 parmi 4, d'où $\binom{4}{3} = 4$ possibilités. Pour chacune d'elles, il faut ensuite 2 cartes prises parmi les 48 qui ne sont pas des as : $\binom{48}{2} = 1\,128$ possibilités. On obtient au total $\binom{4}{3} \times \binom{48}{2} = 4\,512$ mains.

5. Une fois choisie la hauteur de la carte (13 possibilités), il y a $\binom{4}{3}$ façons de former un brelan. Pour compléter la main, on forme alors une paire. Pour cela, il reste 12 possibilités pour la hauteur de la carte et, pour chaque hauteur, $\binom{4}{2}$ paires possibles.

6. Pour former une main contenant une double paire, on commence par choisir 2 hauteurs parmi les 13 disponibles pour les 2 paires, soit $\binom{13}{2}$ possibilités. On choisit ensuite 2 cartes parmi les 4 de la première hauteur ($\binom{4}{2}$ possibilités) puis 2 cartes parmi les 4 de la seconde hauteur ($\binom{4}{2}$ possibilités). Enfin, on complète la main avec une carte parmi les 44 qui ne sont pas des deux hauteurs précédentes. Ainsi, il y a $\binom{13}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{4}{2} \times 44 = 78 \times 6 \times 6 \times 44 = 123\,552$ mains avec une double paire sans carré ni full.

7. Il faut distinguer deux cas :

• Si le roi est le roi de cœur (1 possibilité !), on complète la main avec 4 cartes parmi les 36 restantes (ni roi ni cœur). Dans ce cas, il y a $\binom{36}{4}$ possibilités.

• Si le roi n'est pas le roi de cœur, on choisit un roi parmi les autres (3 possibilités), puis un cœur parmi 12 (toutes sauf le roi) et enfin 3 cartes parmi les 36 restantes (ni roi ni cœur), soit $\binom{36}{3}$ possibilités.

Au total, il y a $1 \times \binom{36}{4} + 3 \times 12 \times \binom{36}{3} = \binom{36}{4} + 36 \times \binom{36}{3} = 315\,945$ mains avec un roi et un cœur.

Bien noter la différence entre les questions 5 et 6. Contrairement au full, les deux hauteurs pour les paires jouent le même rôle (choix simultané).

Méthode 20.3

8. Pour déterminer le nombre de quintes, on détermine le nombre total de suites et on enlève le nombre de suites de même couleur (« quintes flush »). Tout d'abord, il y a 10 possibilités (de l'as au 10) pour choisir la carte la plus basse de la suite. Ensuite, il y a 4^5 suites commençant par un as (4 possibilités pour l'as et 4 pour chacune des cartes suivantes). Au total, on obtient 10×4^5 suites. Pour former une quinte flush, il y a 4 possibilités si elle commence par un as (cœur, carreau, pique, trèfle), donc 4×10 quintes flush au total. Finalement, on obtient $10 \times 4^5 - 40 = 10\,200$ quintes.

Pour une suite, l'as peut être carte basse ou carte haute.

9. Une couleur étant choisie (4 possibilités), il y a $\binom{13}{5}$ mains possibles dans cette couleur ; soit $4 \times \binom{13}{5}$ mains d'une même couleur. De nouveau, il faut retrancher les 40 quintes flush. On obtient $4 \times \binom{13}{5} - 40 = 5\,108$ mains. ▲

Exercice 20.15

Une application strictement croissante de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ est injective (voir le chapitre **applications**). Une injection f de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ a une image de cardinal p. Il y a $\binom{n}{p}$ possibilités pour l'ensemble image. À chacun de ces ensembles images, correspond une seule application strictement croissante (celle qui vérifie $f(1) < f(2) < \cdots < f(p)$). On en déduit que le nombre de fonctions strictement croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ est $\binom{n}{p}$. ▲

Toute application strictement monotone de E dans F est injective.

Exercice 20.16

1. On sait que, pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, il y a $\binom{n}{p}$ parties de E à p éléments. La somme des cardinaux de ces parties est égale à $p\binom{n}{p}$. Par conséquent, la somme des cardinaux de toutes les parties de E est égale à :

$$S = \sum_{p=0}^{n} p\binom{n}{p} = \sum_{p=1}^{n} p\binom{n}{p}.$$

Le terme d'indice 0 de la somme est nul.

Comme $p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$, on a :

$$S = \sum_{p=1}^{n} n\binom{n-1}{p-1} = n\sum_{p=0}^{n-1}\binom{n-1}{p} = n2^{n-1}.$$

Changement d'indice, puis **théorème 20.16**.

2. Soit a un élément de A. Le cardinal de l'ensemble $E \setminus A$ est $n - p$. Pour former une partie de E à k éléments ($k \in [\![1, n]\!]$) contenant seulement a comme élément de A, il y a $\binom{n-p}{k-1}$ possibilités (on choisit les $k - 1$ éléments restants dans $E \setminus A$). Le nombre d'ensembles contenant seulement a comme élément de A est donc :

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n-p}{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-p}{k} = \sum_{k=0}^{n-p}\binom{n-p}{k} = 2^{n-p},$$

$\binom{n-p}{k} = 0$ pour $k > n - p$

Corrigé

la dernière égalité résultant du **théorème 20.16**. Pour le choix de l'élément a de A, il y a p possibilités. Ainsi, le nombre de sous-ensembles de E contenant exactement un élément de A est $p2^{n-p}$.

Théorème 20.10

3. On sait que Card $(\mathscr{P}(E)) = 2^n$. Pour former un élément (A, B) de F, il y a 2^n possibilités pour A et autant pour B. Ainsi, le cardinal de F est $2^n \times 2^n = 4^n$ (ou encore Card $(F) =$ Card $(\mathscr{P}(E) \times \mathscr{P}(E)) =$ (Card $\mathscr{P}(E))^2 = (2^n)^2 = 4^n$).

Théorème 20.6

4. Pour former un élément (A, B) de G, on commence par choisir un ensemble $B \subset E$ de cardinal $k \in [\![0, n]\!]$: il y a $\binom{n}{k}$ possibilités. Ensuite, A doit être une partie de B : il y a 2^k possibilités. On obtient finalement :

$$\text{Card } (G) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k,$$

d'où Card $(G) = (2+1)^n = 3^n$ d'après la **formule du binôme de Newton**.

5. H peut s'écrire $H = \{(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2 \mid A \subset \overline{B}\}$. Se donner une partie B de E équivaut à se donner son complémentaire $\overline{B}$. L'ensemble H a donc le même cardinal que celui de la question précédente : Card $(H) = 3^n$. ▲

Exercice 20.17

$A \cup B = E$ et $A \cap B = \emptyset$

Rappelons que $\binom{2n}{n}$ est le nombre de parties à n éléments d'un ensemble E à $2n$ éléments. Pour compter ces parties, on partage E en deux sous-ensembles A et B disjoints à n éléments. Pour former une partie de E à n éléments, on choisit k éléments ($k \in [\![0, n]\!]$) dans A (soit $\binom{n}{k}$ possibilités) et $n-k$ éléments dans B (soit $\binom{n}{n-k}$ possibilités). Comme $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$, on obtient donc :

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$$

▲

Exercice 20.18

1. Considérons un ensemble E_n à n éléments. Dénombrons l'ensemble $\mathcal{F}$ des couples de parties (A, B) de E_n qui vérifient Card $A = k$, Card $B = p$ et $B \subset A$.

• Pour dénombrer $\mathcal{F}$, on peut procéder par étapes en choisissant d'abord A une partie de E_n à k éléments, puis en trouvant une partie B de A à p éléments. D'après le principe multiplicatif, on obtient Card $\mathcal{F} = \binom{n}{k}\binom{k}{p}$.

• Pour dénombrer $\mathcal{F}$, on peut également commencer par choisir une partie B de E_n à p éléments, puis lui rajouter une partie $(A \setminus B)$ à $k-p$ éléments choisis dans $E_n \setminus B$. En ce cas, le principe multiplicatif donne Card $\mathcal{F} = \binom{n-p}{k-p}\binom{n}{p}$.

Finalement, on a bien établi que $\binom{n-p}{k-p}\binom{n}{p} = \binom{n}{k}\binom{k}{p}$.

$\binom{n}{k}$ ne dépend pas de p.

2. D'après la question précédente, on a :

$$S_1 = \sum_{p=0}^{k} \binom{n-p}{k-p}\binom{n}{p} = \sum_{p=0}^{k} \binom{n}{k}\binom{k}{p} = \binom{n}{k} \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} = 2^k \binom{n}{k}$$

car $\displaystyle\sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} = 2^k$. De même, toujours d'après la question **1**,

$$S_2 = \sum_{k=p}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{p} = \sum_{k=p}^{n}(-1)^k\binom{n-p}{k-p}\binom{n}{p} = \binom{n}{p}\sum_{k=p}^{n}(-1)^k\binom{n-p}{k-p}$$

$\binom{n}{p}$ ne dépend pas de k.

$$= \binom{n}{p}\sum_{j=0}^{n-p}(-1)^{j+p}\binom{n-p}{j} = \binom{n}{p}(-1)^p\sum_{j=0}^{n-p}(-1)^j\binom{n-p}{j}.$$

Changement d'indice : $j = k - p$

Comme $\displaystyle\sum_{k=0}^{s}(-1)^k\binom{s}{k} = \begin{cases} 0 & \text{si } s \in \mathbb{N}^\star \\ 1 & \text{si } s = 0 \end{cases}$, on en déduit que

$$S_2 = \begin{cases} (-1)^n & \text{si } p = n \\ 0 & \text{si } 0 \leqslant p < n \end{cases}.$$

▲

Exercice 20.19

1. Il n'y a qu'une bijection d'un ensemble à un élément dans lui-même : l'identité. Ce n'est pas un dérangement, donc $D_1 = 0$. Il y a deux bijections d'un ensemble à deux éléments dans lui-même : l'identité et l'application qui échange les deux éléments. Seule cette dernière est un dérangement, donc $D_1 = 1$.

2. Soit f une bijection de E dans lui-même. On suppose que f a k points fixes ($k \in [\![0, n]\!]$). Il y a $\binom{n}{k}$ possibilités pour choisir ces éléments. Une fois ces éléments choisis, f est un dérangement sur les $n-k$ éléments de E restants. Il y a donc $\binom{n}{k}D_{n-k}$ permutations ayant k points fixes. On sépare alors les bijections de E dans E selon leur nombre de points fixes. Comme le nombre total de ces bijections est $n!$, on en déduit que :

Méthode 20.3

$$n! = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D_{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}D_{n-k} = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}D_j.$$

3. Notons $\alpha_n = (-1)^n\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k!$. D'après la question **2**, on a :

$$\alpha_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}\binom{n}{k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}D_j = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{n+k}\binom{n}{k}\binom{k}{j}D_j.$$

Comme $\begin{cases} 0 \leqslant k \leqslant n \\ 0 \leqslant j \leqslant k \end{cases} \iff \begin{cases} 0 \leqslant j \leqslant n \\ j \leqslant k \leqslant n \end{cases}$, on en déduit que :

$$\alpha_n = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n}(-1)^{n+k}\binom{n}{k}\binom{k}{j}D_j = \sum_{j=0}^{n}(-1)^nD_j\sum_{k=j}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{j}.$$

Or, d'après l'**exercice 20.18**,

$$\sum_{k=j}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{j} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \in [\![0, n-1]\!] \\ (-1)^n & \text{si } j = n \end{cases}.$$

Par conséquent, l'égalité précédente s'écrit $\alpha_n = D_n$, c'est-à-dire :

$$D_n = (-1)^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k!.$$

Dans la somme précédente, seul le terme d'indice $j = n$ est non nul, il vaut D_n.

▲

Chapitre 21

Probabilités sur un univers fini

UN MATHÉMATICIEN

Jacques Bernoulli est le plus ancien d'une famille de mathématiciens suisses. Il s'intéresse à tous les domaines des mathématiques. Il étudie de nombreuses courbes au moyen d'une théorie toute nouvelle : le calcul différentiel. À la fin de sa vie, il s'intéresse aux probabilités et rédige un ouvrage publié après sa mort dans lequel il étudie le jeu de pile ou face, ce qui explique que son nom soit donné à une épreuve ne prenant que deux valeurs, 0 et 1.

Un peu d'histoire

Les tous premiers calculs de probabilités, avaient trait à des lancers de pièces de monnaie, on disait à l'époque pile ou croix, ou à des jetés de dés. Le premier livre dans le domaine est celui qu'a écrit le fantasque médecin et mathématicien Jérôme Cardan dont le but était de faire connaître les meilleures stratégies pour gagner aux dés.

Il estime que, moralement, un jeu doit être équitable, ce qui pour lui signifie que la mise de chacun est proportionnelle à sa probabilité de gagner. Mis en équation, son affirmation revient à dire que l'espérance de gain de chacun des deux joueurs est nulle. Son ouvrage est peu connu et c'est en 1657, près d'un siècle plus tard, que Christian Huygens introduit la notion d'espérance.

Objectifs

les incontournables

- Identifier et modéliser l'expérience aléatoire.
- Traduire ensemblistement l'énoncé.
- Utiliser les propriétés classiques des probabilités.
- Mettre en œuvre les formules des probabilités totales, des probabilités composées et de Bayes.

et plus si affinités

- Utiliser la formule des probabilités totales pour obtenir une relation de récurrence entre les termes d'une suite de probabilités.

Résumé de cours

Le langage des probabilités

Expériences et événements aléatoires

Définition : *Une* ***expérience aléatoire*** *est une expérience dont on ne peut prédire avec certitude le résultat. L'étude d'une expérience aléatoire commence par la description des résultats possibles, appelés* ***éventualités****. L'ensemble des résultats possibles est appelé* ***univers des possibles****. On le note généralement* Ω.

Définition : *Un* ***événement aléatoire*** *est un événement qui peut se produire ou non, suivant le résultat de l'expérience aléatoire. On le représente par l'ensemble des éventualités qui le réalisent. Il s'agit donc d'une partie de* Ω, $A \in \mathscr{P}(\Omega)$. *À la suite d'une expérience aléatoire, on dira que l'****événement A est réalisé*** *si le résultat* ω *de cette expérience est élément de* A.

Vocabulaire : Ω *est l'événement certain,* $\emptyset$ *est l'événement impossible.*

Liens avec les opérations ensemblistes

L'identification entre les événements aléatoires et les parties de Ω permet d'utiliser les opérations élémentaires ensemblistes pour traduire certains événements, ainsi :

- l'événement (A *ou* B), appelé **disjonction de** A **et** B, est modélisé par la réunion $A \cup B$;
- l'événement (A *et* B), appelé **conjonction de** A **et** B, est modélisé par l'intersection $A \cap B$;
- l'événement $\overline{A}$, appelé **contraire de** A, est modélisé par le complémentaire de A $\complement_\Omega A$.

Le fait que la réalisation de A entraîne celle de B ($A \Rightarrow B$) se traduit simplement par $A \subset B$.

Événements incompatibles, système complet d'événements

Définition : *Deux* ***événements*** $(A, B) \in \mathscr{P}(\Omega)^2$ *sont dits* ***incompatibles*** *lorsqu'il est impossible qu'ils soient réalisés simultanément, c'est-à-dire si* $A \cap B = \emptyset$.

Définition : *Une famille finie* $(A_i)_{i \in I}$ *d'événements forme un* ***système complet d'événements*** *(SCE) si les* A_i *sont deux à deux incompatibles et recouvrent* Ω, *soit :*

- $\displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$
- $\forall (i, j) \in I^2,\ i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$

Variables aléatoires

Les variables aléatoires permettent d'attribuer une valeur aux éventualités.

Définition : *On appelle* ***variable aléatoire*** *sur* Ω *toute application* $X : \Omega \to E$ *définie sur l'univers* Ω *et à valeurs dans un ensemble* E.

Notation : *L'ensemble des valeurs possibles pour* X *est fini et sera noté* $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. *Ici* $(X = x_i)$ *désigne l'événement* $X^{-1}(\{x_i\}) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_i\}$. *Plus généralement, si* $A \in \mathscr{P}(E)$, *on note* $(X \in A)$ *ou encore* $\{X \in A\}$ *l'événement* $X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$.

Vocabulaire :

- *Lorsque* $E \subset \mathbb{R}$, *on dit que* X *est une* ***variable aléatoire réelle*** *(v.a.r.)*
- *Lorsque* $E \subset \mathbb{C}$, *on dit que* X *est* ***variable aléatoire complexe****.*
- *Lorsque* $E \subset \mathbb{R}^d$ *on dit que* X *est une* ***variable aléatoire vectorielle****.*

■ Espace probabilisé fini

Probabilité sur un ensemble fini

Définition : *Soit Ω un ensemble fini, non vide. On appelle* ***probabilité*** *sur Ω toute application $P : \mathscr{P}(\Omega) \to [0,1]$ qui vérifie les deux propriétés suivantes :*

$(\mathbb{P}_1)$	$P(\Omega) = 1$
$(\mathbb{P}_2)$	***Si*** *A et B sont incompatibles,* ***alors*** $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

On dit alors que (Ω, P) est un ***espace probabilisé fini****, et pour tout événement $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, on appelle* ***probabilité de*** *A le nombre $P(A) \in [0,1]$.*

Probabilité uniforme sur un ensemble fini

Théorème-Définition 21.1.— On considère une expérience aléatoire pour laquelle l'univers des possibles Ω est un ensemble fini, non vide et $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ une partie de Ω.
La **probabilité uniforme** pour que l'événement A soit réalisé à l'issue de l'expérience aléatoire est donnée par :

$$\boxed{P(A) = \frac{\text{Card } (A)}{\text{Card } (\Omega)} = \frac{\textit{nombre de cas favorables}}{\textit{nombre de cas possibles}}}$$

Le procédé qui à tout événement A de Ω associe sa probabilité $P(A)$ définit une probabilité sur Ω appelée **probabilité uniforme**.

Propriétés des probabilités finies

Théorème 21.2.— Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soit A et B des événements. Alors

- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$
- $A \subset B \Rightarrow P(A) \leqslant P(B)$

Remarque : $P(\Omega) = 1$ donc $P(\emptyset) = 0$.

Vocabulaire : *un événement B est dit* ***négligeable*** *pour la probabilité P lorsque $P(B) = 0$.*

Théorème 21.3.— Formule d'additivité finie —. Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille d'événements **deux à deux incompatibles**, alors

$$\boxed{P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)}$$

Remarque : en particulier, une probabilité sur $\Omega = \{w_1, \ldots, \omega_n\}$ est donc entièrement déterminée par la distribution des probabilités des événements élémentaires $\big(P\{\omega_i\}\big)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. Plus précisément :

Théorème 21.4.— Soit $\Omega = \{w_1, \ldots, \omega_n\}$ un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^\star$ et $(p_1, \ldots, p_n)$ un n-uplet de nombres réels positifs. Pour qu'il existe une probabilité $P : \mathscr{P}(\Omega) \to [0,1]$ telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $P(\{\omega_i\}) = p_i$ il faut et il suffit que $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$.

■ Conditionnement

Probabilité conditionnelle de A sachant B

Définition : *Soit (Ω, P) un espace probabilisé et B un événement non négligeable c'est-à-dire tel que $P(B) > 0$. Pour tout événement $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, on définit la* ***probabilité conditionnelle de A sachant B*** *par :*

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

Notation : *On note aussi $P_B(A)$ la probabilité de A sachant B.*

Proposition 21.5.— Soit (Ω, P) un espace probabilisé et B un événement non négligeable. L'application $\begin{array}{rccl} P_B : & \mathscr{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ & A & \mapsto & P_B(A) \end{array}$ qui à tout événement $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ associe la probabilité conditionnelle de A sachant B, est une probabilité sur Ω.

Remarque : la probabilité P_B vérifie donc toutes les propriétés des probabilités déjà établies.

Corollaire 21.6.— Soit (Ω, P) un espace probabilisé. Pour tous événements A, B tels que $P(B) > 0$,

$$\boxed{P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)}$$

Corollaire 21.7.— Inversion des conditionnements —. Soit (Ω, P) un espace probabilisé. Pour tous événements A et B tels que $P(A), P(B) > 0$,

$$\boxed{P(A \,|\, B) = \frac{P(A) \times P(B \,|\, A)}{P(B)}}$$

Formule des probabilités composées

Plus généralement pour calculer la probabilité de l'intersection d'une famille finie d'événements, nous disposons de la :

Proposition 21.8.— Formule des probabilités composées —. Soit (Ω, P) un espace probabilisé et $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille d'événements tels que $P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$. Alors

$$\boxed{P\Big(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\Big) = P(A_1) \times P(A_2|A_1) \times \cdots \times P(A_n \,|\, A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})}$$

Formule des probabilités totales

Théorème 21.9.— Formule des probabilités totales —. Soit (Ω, P) un espace probabilisé et $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ un système complet d'événements non négligeables. Pour tout événement $B \in \mathscr{P}(\Omega)$,

$$\boxed{P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \times P(B \,|\, A_i)}$$

Formule de Bayes

Théorème 21.10.— Formule de Bayes —. Soit (Ω, P) un espace probabilisé et $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ un système complet d'événements non négligeables.
Pour tout événement B non négligeable, et pour tout $j \in [\![1, n]\!]$,

$$\boxed{P(A_j \mid B) = \frac{P(A_j) \times P(B \mid A_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i) \times P(B \mid A_i)}}$$

■ Indépendance en probabilité

Indépendance de deux événements

Définition : *Soit (Ω, P) un espace probabilisé. Deux événements A et B sont* ***indépendants pour la probabilité*** *P lorsque*

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$$

En particulier, si $P(B) > 0$, A et B sont indépendants si et seulement si $P_B(A) = P(A)$.

Proposition 21.11.— Soit (Ω, P) un espace probabilisé, A, B des événements indépendants pour P, alors les événements A et $\overline{B}$ sont indépendants.

Indépendance mutuelle de plusieurs événements

Définition : *Soit (Ω, P) un espace probabilisé et $(A_1, \ldots, A_n) \in \mathscr{P}(\Omega)^n$ une famille d'événements. On dit que les événements sont* ***mutuellement indépendants*** *si :*

$$\boxed{\textit{pour tous } i_1, \ldots, i_k \in [\![1, n]\!], \quad P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \times \cdots \times P(A_{i_k})}$$

Proposition 21.12.— Soit (Ω, P) un espace probabilisé et $(A_1, \ldots, A_n) \in \mathscr{P}(\Omega)^n$ une famille d'événements **mutuellement indépendants**. Toute *sous-famille* $(A_{i_1}, \ldots, A_{i_k})$ $(k \leqslant n)$ est formée d'événements **mutuellement indépendants**.

Proposition 21.13.— Soit (Ω, P) un espace probabilisé et $(A_1, \ldots, A_n) \in \mathscr{P}(\Omega)^n$ une famille d'événements **mutuellement indépendants**.
Soit $(B_1, \ldots, B_n) \in \mathscr{P}(\Omega)^n$ une famille d'événements telle que : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $B_i = A_i$ ou $B_i = \overline{A}_i$.
Alors les événements $B_1, \ldots, B_n$ sont mutuellement indépendants.

Méthodes

Bien aborder un exercice de probabilité

Si l'objet de la théorie des probabilités est l'aléatoire, la résolution d'un exercice de probabilité ne doit rien au hasard ! Dans un problème classique, l'énoncé fournit toutes les indications utiles à la construction du modèle, à condition de savoir le décrypter !

Modélisation d'une expérience aléatoire

Méthode 21.1.— Comment construire le bon modèle

On peut distinguer trois types d'exercice.

- Les différents résultats de l'expérience aléatoire sont équiprobables (comme lorsqu'on «tire au hasard»). L'univers des possibles doit être muni de la probabilité uniforme. Dans ce cas, la description complète de Ω est incontournable.
  - On décrit les résultats possibles de l'expérience aléatoire (éventualités). Il faut s'efforcer de simplifier au maximum afin de se ramener à un modèle connu : couples, listes, listes d'éléments distincts, permutations, combinaisons, ...
  - On définit alors l'univers des possibles Ω, comme l'ensemble de ces éventualités.

  Le calcul des probabilités passera notamment par des dénombrements à commencer par le calcul de $\mathrm{Card}\ (\Omega)$.
- Les résultats de l'expérience aléatoire se répartissent en plusieurs cas $A_1, \ldots, A_n$ qui s'excluent les uns les autres. Il s'agit d'un système complet d'événements.
  - On identifie clairement ces événements en choisissant des notations adaptées.
  - Un arbre des possibles permet de visualiser le déroulement de l'expérience aléatoire.

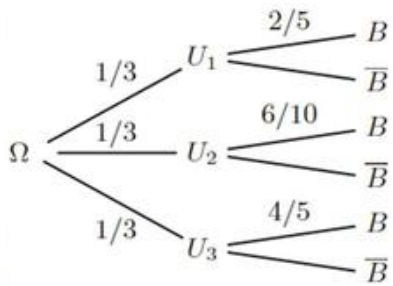
  Le calcul des probabilités passera certainement par la **formule des probabilités totales** (**méthode 21.8**).
- L'expérience aléatoire consiste en une succession d'épreuves. À chaque étape, les différents résultats possibles constituent un SCE.
  - On décrit en français ces événements en choisissant des notations claires car ils permettront de décrire à l'aide d'opérations ensemblistes élémentaires (réunion, intersection, différence ou complémentaire) tous les événements de l'énoncé.
  - La réalisation d'un arbre (s'il reste de taille raisonnable) est recommandée.

  Le calcul des probabilités passera certainement par les formules du cours **probabilités totales**, **probabilités composées**, etc.

Exemple : les 28 tomes d'une encyclopédie sont *rangés au hasard* sur une étagère. On s'intéresse à la probabilité qu'ils soient rangés dans le bon ordre.
Un résultat possible de cette expérience aléatoire est une liste de 28 nombres compris entre 1 et

28, c'est-à-dire une permutation de $[\![1,28]\!]$. Ω est donc l'ensemble des permutations de $[\![1,28]\!]$. Comme les livres sont rangés au hasard, on munit Ω de la **probabilité uniforme**. Il sera donc utile de calculer son cardinal : Card $\Omega = 28!$.
Notons A l'événement «les 28 tomes apparaissent dans l'ordre sur l'étagère». Comme Card $(A) = 1$, la probabilité que tous les tomes soient rangés dans le bon ordre est $p = \frac{1}{28!}$.

Exemple : trois urnes contiennent des boules noires et blanches. L'urne $\mathcal{U}_1$ contient 3 noires et 2 blanches, $\mathcal{U}_2$ contient 4 noires et 6 blanches, $\mathcal{U}_3$ contient 1 noire et 4 blanches. On choisit une urne au hasard et on y pioche une boule. On cherche la probabilité d'obtenir une boule blanche. Il y a trois cas, suivant l'urne dans laquelle s'effectue le prélèvement. On note pour $i = 1,2,3$, U_i l'événement «le prélèvement a lieu dans $\mathcal{U}_i$» et B l'événement «la boule prélevée est blanche». Comme on choisit l'urne au hasard, $P(U_1) = P(U_2) = P(U_3) = \frac{1}{3}$, (U_1, U_2, U_3) est un système complet d'événements non négligeables.



On calcule alors $P(B)$ au moyen de la **formule des probabilités totales théorème 21.9**

$$P(B) = P(U_1)P(B\,|\,U_1) + P(U_2)P(B\,|\,U_2) + P(U_3)P(B\,|\,U_3) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5} + \frac{6}{10} + \frac{4}{5}\right) = \frac{3}{5}.$$

Exemple : on effectue une suite de lancers d'une pièce (parfaitement équilibrée) à pile ou face. On s'intéresse à la probabilité que face apparaisse pour la première fois au quatrième lancer.
On note P_k l'événement «On a obtenu pile au $k^{\text{ième}}$ lancer» et F_k l'événement «On a obtenu face au $k^{\text{ième}}$ lancer.» L'événement A «On a obtenu face pour la première fois au quatrième lancer» peut se traduire par

$$A = P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap F_4.$$

Les résultats obtenus aux différents lancers étant mutuellement indépendants, il s'ensuit que

$$P(A) = P(P_1) \times P(P_2) \times P(P_3) \times P(F_4).$$

Finalement, la pièce étant équilibrée, $P(P_1) = P(P_2) = P(P_3) = P(F_4) = \dfrac{1}{2}$, et donc $P(A) = \dfrac{1}{16}$.

Décryptage du sujet
Une fois construit le modèle, vous devez traduire les données et les questions de l'énoncé en hypothèses ensemblistes.

> ❑ **Méthode 21.2.— Comment traduire ensemblistement les données de l'énoncé**
> - Un événement s'écrit comme réunion d'événements lorsqu'il peut être défini en français à l'aide des mots clés «ou», «au moins», «il existe».
> - Un événement s'écrit comme intersection lorsqu'il peut être défini en français à l'aide des mots clés «et», «tout, tous, toutes», «chaque, chacun, chacune».
> - L'inclusion ensembliste $A \subset B$ traduit ensemblistement le fait que la réalisation de A entraîne celle de B.

Exemple : on prélève successivement n boules d'une urne composée de boules noires et blanches.

L'événement A «au moins une boule blanche est prélevée» peut se traduire comme la réunion

$$A = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n$$

où B_k est l'événement «la $k^{\text{ième}}$ boule prélevée est de couleur blanche».

> ❑ **Méthode 21.3.— Comment reconnaître un système complet d'événements**
> Un système complet d'événements correspond à une discussion exclusive de cas. Autrement dit, l'univers des possibles se partage en plusieurs cas $A_1, A_2, \ldots, A_n$ qui s'excluent les uns les autres : soit A_1 est réalisé, soit A_2 est réalisé, ..., soit A_n est réalisé. Ainsi, tout événement élémentaire est réalisé par exactement un des A_i.

Exemple : si A est un événement quelconque $(A, \overline{A})$ forme un SCE.

Mise en œuvre : exercice 21.10

> ❑ **Méthode 21.4.— Comment repérer des événements indépendants**
> - Par définition, deux événements sont indépendants lorsque $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Si de plus B est non négligeable, ceci revient à dire que $P(A \mid B) = P(A)$. Autrement dit, A et B sont indépendants lorsque le fait de savoir que B est réalisé ne présage en rien de la réalisation de A (et inversement).
> - Plus généralement, une famille finie d'événements non négligeables est mutuellement indépendante lorsque tout événement de la famille est indifférent à la réalisation de n'importe quels autres (et non pas seulement de n'importe quel autre !) événements de la famille.

Exemple : une urne contient des boules noires et blanches en proportion donnée. On effectue N tirages d'une boule, en notant sa couleur puis en la remettant dans l'urne après chaque tirage. On note pour $n \in [\![1, N]\!]$, B_n l'événement «une boule blanche est prélevée au $n^{\text{ième}}$ tirage». Comme les tirages s'effectuent avec remise, la famille d'événements (B_n) est mutuellement indépendante. Plus généralement, les résulats obtenus lors d'épreuves indépendantes (lancers successifs à pile ou face, tirages avec remise dans une urne de composition connue, etc.) forment une famille d'événements mutuellement indépendants.

■ Calcul des probabilités

Calculer la probabilité d'un événement

C'est la question centrale de tout exercice de probabilité, aussi les méthodes sont-elles nombreuses ! Lorsque Ω est muni de la probabilité uniforme, par définition cela revient à dénombrer A et de conclure à l'aide de la formule classique

$$\boxed{P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \frac{\text{Card } (A)}{\text{Card } (\Omega)}}$$

Dans ce cas, toutes les techniques classiques du dénombrement seront utiles !
De manière plus générale, pour calculer $P(A)$ on peut souvent appliquer directement les formules du

cours **formule des probabilités totales** et **formule des probabilités composées**. Sinon, on exprime A à partir d'autres événements dont on connaît les probabilités au moyen d'opérations ensemblistes : réunion, intersection, complémentaire et d'utiliser les propriétés générales des probabilités.

Calculer la probabilité d'une réunion

> ❑ **Méthode 21.5.— Comment calculer la probabilité d'une réunion d'événements**
>
> ▸ **Union d'événements deux à deux incompatibles**
>
> - Si A et B sont des événements incompatibles, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
> - Plus généralement, d'après le **théorème 21.3** la formule ci-dessus se généralise au cas d'une famille finie d'événements deux à deux incompatibles.
>
> ▸ **Union quelconque d'événements**
>
> - Si A et B sont des événements quelconques, la **formule de Poincaré** donne $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
> - Pour une famille finie d'événements quelconques $A = \bigcup_i A_i$, on peut passer au complémentaire et calculer plutôt $P(\overline{A}) = P(\bigcap_i \overline{A_i})$.

Mise en œuvre : exercice 21.5

Remarque : la formule de Poincaré se généralise au cas d'une famille finie d'événements quelconques, **exercice 21.4**.

Calculer une probabilité conditionnelle

Les probabilités conditionnelles permettent de prendre en compte une information partielle dans le calcul des probabilités.
Étant donné deux événements A, B tels que B est non négligeable, on a par définition

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

En pratique, il n'est pas nécessaire de connaître au préalable $P(A \cap B)$ pour calculer $P(A \mid B)$:

> ❑ **Méthode 21.6.— Comment calculer une probabilité conditionnelle**
>
> $\boxed{1}$ On suppose que B est réalisé. En ce cas, l'univers des possibles est changé puisqu'il se restreint à B ! A ne sera donc réalisé qu'au travers de $A \cap B$.
> $\boxed{2}$ On calcule la probabilité de cet événement dans le nouveau modèle.

Remarque : lorsque A et B sont indépendants, alors $P(A \mid B) = P(A)$.

Exemple : on tire une carte au *hasard* d'un jeu de 32 cartes. L'ensemble des résultats possibles est muni de la probabilité uniforme. Considérons les événements A «la carte est une figure» et B «la carte est de couleur rouge». Calculons $P(A \mid B)$. On suppose donc que B est réalisé : désormais, l'univers des possibles est B. Il est muni de la probabilité uniforme car le tirage se fait au hasard

$$P(A \mid B) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \frac{\text{Card } (A \cap B)}{\text{Card } (B)} = \frac{1}{2}$$

Calculer la probabilité d'une intersection

Pour le calcul de la probabilité d'une intersection, le bon cas est celui d'une famille d'événements mutuellement indépendants. Dans le cas contraire, on a recours aux probabilités conditionnelles.

Méthode 21.7.— Comment calculer la probabilité d'une intersection

- **Intersection d'événements (mutuellement) indépendants**
  - Si A et B sont des événements indépendants, alors $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.
  - Plus généralement, d'après le **théorème 21.12** la formule ci-dessus se généralise au cas d'une famille finie d'événements mutuellement indépendants.
- **Intersection d'événements quelconques**
  - Si A et B sont des événements tels que $P(B) > 0$, alors $P(A \cap B) = P(B)P(A \mid B)$.
  - Soit $A_1, \ldots, A_n$ une famille finie d'événements tels que $A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}$ est non négligeable, la **formule des probabilités composées** donne

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2|A_1) \times \cdots \times P(A_n \mid A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$

Mise en œuvre : exercice 21.7

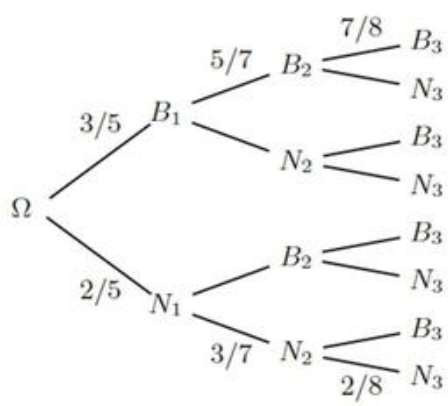
Remarque : lorsque cela est possible, la construction d'un arbre est particulièrement utile en ce cas. Dans ce cas, la **formule des probabilités composées** dit que la probabilité d'un chemin est le produit des probabilités des branches qui le réalisent.

Exemple : trois urnes contiennent des boules blanches et noires : $\mathcal{U}_1$ contient 2 blanches et 3 noires, $\mathcal{U}_2$ contient 4 blanches et 2 noires, $\mathcal{U}_3$ contient 6 blanches et 1 noire. On effectue trois tirages successifs selon le protocole suivant.

- on tire une boule de $\mathcal{U}_1$, on note sa couleur, on met cette boule dans l'urne $\mathcal{U}_2$,
- on tire une boule de $\mathcal{U}_2$, on note sa couleur, on remet cette boule dans l'urne $\mathcal{U}_3$,
- on tire une boule de $\mathcal{U}_3$ et on note sa couleur.

On calcule la probabilité pour que les trois boules tirées soient de la même couleur. Notons B_i (resp. N_i) l'événement «la $i^{\text{ième}}$ boule tirée est blanche (resp. noire)». On cherche la probabilité de $(N_1 \cap N_2 \cap N_3) \cup (B_1 \cap B_2 \cap B_3)$. On peut représenter les tirages successifs dans un arbre.
D'après la formule des probabilités composées, il vient d'une part :

$$\begin{aligned} P(N_1 \cap N_2 \cap N_3) &= P(N_1) \times P_{N_1}(N_2) \times P_{N_1 \cap N_2}(N_3) \\ &= \frac{3}{5} \times \frac{3}{7} \times \frac{2}{8} = \frac{9}{140}. \end{aligned}$$



et d'autre part :

$$\begin{aligned} P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) &= P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) \times P_{B_1 \cap B_2}(B_3) \\ &= \frac{2}{5} \times \frac{5}{7} \times \frac{7}{8} = \frac{35}{140}. \end{aligned}$$

Nb : on vérifie *a posteriori* que les conditionnements sont bien définis, *i.e.* $P(B_1 \cap B_2) > 0$ et $P(N_1 \cap N_2) > 0$

Finalement par additivité de la probabilité, nous obtenons

$$P\big((N_1 \cap N_2 \cap N_3) \cup (B_1 \cap B_2 \cap B_3)\big) = P(N_1 \cap N_2 \cap N_3) + P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \frac{9+35}{140} = \frac{11}{35}.$$

Calculer une probabilité à l'aide de la formule des probabilités totales

> ❑ **Méthode 21.8.— Comment utiliser la formule des probabilités totales**
> Pour calculer la probabilité de B à l'aide de la formule des probabilités totales,
> $\boxed{1}$ Repérez un système complet d'événements $A_1, \ldots, A_n$.
> $\boxed{2}$ Calculez les probabilités de ces événements $P(A_1), \ldots, P(A_n)$ pour vérifier qu'il s'agit d'événements non négligeables.
> $\boxed{3}$ Concluez à l'aide du **théorème 21.9** que
>
> $$P(B) = P(A_1) \times P(B \mid A_1) + \cdots + P(A_n) \times P(B \mid A_n)$$

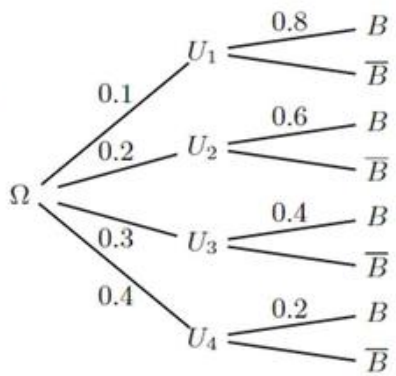
Remarque : là encore, la réalisation d'un arbre des possibles est particulièrement utile !

Mise en œuvre : exercice 21.12

Exemple : quatre urnes contiennent des boules blanches et noires. $\mathcal{U}_1$ contient 4 blanches et 1 noire, $\mathcal{U}_2$ contient 3 blanches et 2 noires, $\mathcal{U}_3$ contient 2 blanches et 3 noires, $\mathcal{U}_4$ contient 1 blanche et 4 noires. On effectue un tirage selon le protocole suivant :

- On choisit une urne. On suppose que la probabilité de choisir l'urne $\mathcal{U}_i$ vaut $\frac{i}{10}$.
- On pioche alors au hasard une boule.

On détermine la probabilité d'obtenir une boule blanche.



Dans cette expérience, **tout est conditionné par le choix de l'urne**. Notons pour $i \in [\![1,4]\!]$, U_i l'événement «le tirage se fait dans l'urne $\mathcal{U}_i$».

Remarquons tout d'abord que (U_1, U_2, U_3, U_4) forme une système complet d'événements non négligeables.

Notons enfin B l'événement «la boule tirée est blanche».

D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(B) &= P(U_1)P(B\,|U_1) + P(U_2)P(B\,|U_2) + P(U_3)P(B\,|U_3) + P(U_4)P(B\,|U_4) \\ &= \frac{1}{50} \times (4+6+6+1) = \frac{17}{50}. \end{aligned}$$

Calculer la probabilité des causes

Après avoir utilisé la formule des probabilités totales, il est fréquent de s'intéresser à la probabilité des causes. Il s'agit de mettre en œuvre le **corollaire 21.7** ou plus généralement la **formule de Bayes** (**théorème 21.10**).

❑ **Méthode 21.9.— Comment utiliser la formule de Bayes**
Soit $A, A_1, \ldots, A_n, B$ des événements non négligeables. On suppose que $(A_1, \ldots, A_n)$ est un système complet d'événements.

- Pour calculer la probabilité de A sachant B connaissant la probabilité de B sachant A, on utilise la formule d'inversion des conditionnements, **corollaire 21.7**

$$P(A \mid B) = \frac{P(A)P(B \mid A)}{P(B)}$$

- Sachant que B est réalisé, la probabilité que A_j en soit la cause est donnée par la formule de Bayes, **théorème 21.10**.

$$P(A_j \mid B) = \frac{P(A_j) \times P(B \mid A_j)}{P(A_1)P(B \mid A_1) + \cdots + P(A_n)P(B \mid A_n)}$$

Mise en œuvre : exercice 21.10

Exemple : reprenons l'exemple précédent. On suppose que la boule tirée est blanche. Quelle est la probabilité pour qu'elle provienne de l'urne $\mathcal{U}_1$?
Avec les notations précédentes, ceci revient à calculer la probabilité conditonnelle de U_1 sachant que la boule tirée est blanche, *i.e* $P_B(U_1)$. Appliquons la formule de **Bayes**. Il vient

$$P(U_1|B) = \frac{P(U_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(U_1) \times P(B|U_1)}{P(B)} = \frac{50}{17} \times \frac{1}{10} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{17}$$

■ Étude d'une suite de probabilités

Déterminer une formule de récurrence

❑ **Méthode 21.10.—** On effectue une succession d'épreuves aléatoires, comme une suite de lancers d'une pièce à pile ou face. On s'intéresse à la probabilité $p_n = P(B_n)$ de voir se réaliser le résultat B_n lors de la $n^{\text{ième}}$ épreuve. On obtient une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n à l'aide de la formule des probabilités totales pour un système complet d'événements correspondant aux résultats possibles à l'issue de la $n^{\text{ième}}$ épreuve.

Mise en œuvre : exercice 21.13

Vrai/Faux

	Vrai	Faux
1. Si A et B sont incompatibles, alors ils sont indépendants.	☐	☐
2. Si A et B sont incompatibles, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.	☐	☐
3. Si A, B, C sont des événements, $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B \cap C)$.	☐	☐
4. Si $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$, alors $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, $P(A \cap C) = P(A)P(C)$ et $P(B \cap C) = P(B)P(C)$.	☐	☐
5. Si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, $P(A \cap C) = P(A)P(C)$ et $P(B \cap C) = P(B)P(C)$, alors $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$.	☐	☐
6. Si A et B sont indépendants et non négligeables,, alors $P(A \mid B) = P(A)P(B)$.	☐	☐
7. Un univers fini Ω est toujours muni de la probabilité uniforme.	☐	☐
8. Soit A un événement tel que $0 < P(A) < 1$, alors pour tout événement C, $P(C) = P(A)P(C \mid A) + \big(1 - P(A)\big)P(C \mid \overline{A})$.	☐	☐
9. Si A et B sont non négligeables, alors $\dfrac{P(A)}{P(B)} = \dfrac{P(A \mid B)}{P(B \mid A)}$.	☐	☐
10. Si A et B sont deux événements, alors $P(A \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cap B)$.	☐	☐

Énoncé des exercices

Propriétés des probabilités

Exercice 21.1 : Soit A, B, C trois événements d'un même espace probabilisé (Ω, P). Exprimer ensemblistement en fonction de A, B, C les événements suivants :

1. A_1 «l'un au moins des trois événements se réalise» ;
2. A_2 «un et un seul des trois événements se réalise» ;
3. A_3 «deux au moins des trois événements se réalisent» ;
4. A_4 «deux exactement des trois événements se réalisent» ;
5. A_5 «aucun des trois ne se réalise» ;
6. A_6 «deux au plus au plus se réalisent».

Exercice 21.2 : Soit A, B des événements d'un même espace probabilisé (Ω, P).

1. Soit C l'événement «soit A, soit B se réalise». Traduire ensemblistement C.
2. Montrer que $P(C) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$.

Exercice 21.3 : Soit A, B des événements d'un même espace probabilisé (Ω, P). On suppose que $P(A) = P(B) = \dfrac{3}{4}$. Déterminer un encadrement de $P(A \cap B)$ et $P(A \cup B)$.

Exercice 21.4* : Formule de Poincaré —. Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini, $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille finie quelconque d'événements. Montrer que :

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} P\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right)$$

Probabilités classiques

Exercice 21.5 : On considère un jeu de 32 cartes et on tire au hasard 5 cartes de ce jeu.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir un carré ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins deux rois ?

Exercice 21.6 : Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. On tire trois fois de suite une boule avec remise. Quelle est la probabilité d'obtenir trois nombres

1. dans un ordre strictement croissant ?
2. dans un ordre croissant au sens large ?

Exercice 21.7 : Une urne contient 15 boules : une noire, 5 blanches et 9 rouges.

1. On tire simultanément et au hasard trois boules de cette urne. Calculer la probabilité des événements suivants :
   a. A «le tirage est tricolore»
   b. B «parmi les boules tirées figurent exactement une noire et au moins une rouge»
   c. C «les trois boules tirées sont de la même couleur»
2. On suppose que le tirage s'effectue successivement avec remise. Déterminer les probabilités des événements A, B et C définis ci-dessus.

Exercice 21.8 : Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n.

1. On prélève en une fois une «poignée aléatoire» de p boules de l'urne (avec $p \in [\![0, n]\!]$).

a. Soit $k \in [\![p, n]\!]$. Calculer la probabilité de l'événement A_k «le plus grand numéro de la poignée est k».

b. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k-1}{p-1} = \binom{n}{p}$.

2. On tire successivement et sans remise p boules de l'urne. Déterminer la probabilité pour que la $p^{\text{ième}}$ boule tirée ait un numéro supérieur aux $p-1$ numéros précédents.

■ Indépendance et probabilité

Exercice 21.9 : Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ un entier naturel non nul. On effectue n lancers indépendants d'une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir pile est p, avec $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois pile ?

2. Quelle est la probabilité qu'au cours de ces n lancers face ne soit jamais suivi de pile.

■ Probabilités conditionnelles

Exercice 21.10 : Une compagnie d'assurance automobile a classé ses assurés en trois classes d'âges : moins de 25 ans, de 25 ans à 50 ans, plus de 50 ans. Le tableau ci-dessous fournit deux informations la proportion d'assurés appartenant à chaque classe et la probabilité qu'un assuré, d'une classe donnée déclare au moins un accident au cours de l'année.

Classe	proportion	probabilité
moins de 25 ans	0,25	0,12
de 25 à 50 ans	0,53	0,06
plus de 50 ans	0,22	0,09

1. Un assuré est tiré au hasard dans le fichier de la compagnie. Quelle est la probabilité qu'il ait déclaré au moins un accident au cours de l'année ?

2. Quelle est la probabilité qu'un assuré ayant déclaré au moins un accident au cours de l'année soit agé d'au plus 25 ans ?

3. Quelle est la probabilité pour qu'un assuré agé de 25 ans ou plus ait au moins un accident au cours de l'année ?

4. Quelle est la probabilité qu'un assuré n'ayant déclaré aucun accident soit âgé de 25 à 50 ans ?

Exercice 21.11 : Dans une usine, on fabrique des composants électroniques sur trois machines. Les machines M_1, M_2 et M_3 produisent respectivement 50%, 30% et 20% des composants.
Le qualiticien de l'usine estime que

- 2% des composants fabriqués par la machine M_1 sont défectueux,
- 3% des composants fabriqués par la machine M_2 sont défectueux,
- 5% des composants fabriqués par la machine M_3 sont défectueux.

1. Quelle est la probabilité qu'un composant pris au hasard à la sortie de l'usine soit défectueux ?

2. Quelle est la probabilité d'obtenir une pièce défectueuse provenant de M_1 ? Les événements «la pièce est défectueuse» et «la pièce provient de M_1» sont-ils indépendants ?

3. Un composant est défectueux. Quelle est la probabilité pour qu'il provienne de M_1 ?

Exercice 21.12 : On dispose de deux dés A et B. Le dé A a quatre faces rouges et deux faces blanches. Le dé B a deux faces rouges et quatre faces blanches. On lance une pièce de monnaie telle que la probabilité d'obtenir pile soit de 1/3.

- Si on obtient pile on décide de jouer uniquement avec le dé A.
- Si on obtient face on décide de jouer uniquement avec le dé B.

1. Calculer la probabilité d'obtenir rouge au premier coup.
2. On a obtenu rouge aux deux premiers coups. Calculer la probabilité d'obtenir rouge au troisième coup.
3. On a obtenu rouge aux n premiers coups ($n \in \mathbb{N}^\star$). Calculer la probabilité p_n d'avoir utilisé le dé A.

■ Suites de probabilités

Exercice 21.13* : Au moment où chacun possède un tiers du marché de téléphonie mobile, trois opérateurs A, B, C décident de mettre sur le marché un nouveau type de forfait annuel. À la fin de l'année, l'évolution des parts de marché se fait de la façon suivante :

- Les clients de la compagnie A se répartissent indifféremment entre A, B et C l'année suivante.
- Les clients de la compagnie B restent toujours fidèles à cette compagnie.
- Les clients de la compagnie C seront l'année suivante clients de A avec une probabilité $1/12$, de B avec une probabilité $7/12$ et de C avec la probabilité $1/3$.

On note pour $n \in \mathbb{N}$, a_n, b_n et c_n les probabilités pour qu'à l'issue de la $n^{\text{ième}}$ année, un consommateur décide de s'abonner chez A, B ou C pour l'année suivante.
1. Déterminer une relation de récurrence entre a_n, b_n, c_n et a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}.
2. En déduire l'expression de a_n, b_n, c_n en fonction de n et déterminer la limite de ces suites.

D'après HEC

Exercice 21.14* : Une particule se déplace à chaque seconde d'un sommet à l'autre du triangle (ABC) selon le protocole suivant :

- Lorsqu'à un instant donné, elle se situe en A, elle se fixe à l'instant suivant en B avec la probabilité $0,75$ et en C avec la probabilité $0,25$.
- Lorsqu'à un instant donné, elle se situe en B, elle se fixe à l'instant suivant en A avec la probabilité $0,75$ et à C avec la probabilité $0,25$.
- Si à un instant donné, elle se trouve en C, elle ira systématiquement en B à l'instant suivant.

On désigne par a_n, b_n et c_n les probabilités qu'à l'instant n, la particule se situe en A, B ou C.
1. Déterminer des relations de récurrence entre $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ et a_n, b_n, c_n.
2. En déduire l'existence d'une matrice carrée d'ordre 3, notée M telle que $(a_{n+1}\ b_{n+1}\ c_{n+1})^T = M \times (a_n\ b_n\ c_n)^T$ puis que $(a_n\ b_n\ c_n)^T = M^n \times (a_0\ b_0\ c_0)^T$.
3. Soit P la matrice $\begin{pmatrix} 12 & 3 & 1 \\ 16 & -1 & -1 \\ 7 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et calculer $P^{-1} \times M \times P$.
4. En déduire l'expression en fonction de n, de M^n puis de a_n, b_n et c_n.
5. Calculer les limites quand n tend vers l'infini des probabilités a_n, b_n et c_n.

D'après HEC

Exercice 21.15* : Modèle Galton-Watson
On s'intéresse à la survie d'une espèce pour laquelle un individu admet 3 descendants avec la probabilité $\frac{1}{8}$, 1 ou 2 descendants avec la probabilité $\frac{3}{8}$ et aucun descendant avec la probabilité $\frac{1}{8}$, indépendamment de ses congénères.

À l'instant initial, on suppose que la population est composée d'un seul individu. Par conséquent, l'espèce s'éteindra au bout de la première génération avec une probabilité de $x_1 = \frac{1}{8}$.

1. Déterminer la probabilité x_2 pour que l'espèce ait disparu à l'issue de la 2e génération.

2. On note pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$ x_n la probabilité qu'à l'issue de la n-ième génération l'espèce ait totalement disparu. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie

$$x_1 = \frac{1}{8} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^\star,\ x_{n+1} = \frac{1}{8}x_n^3 + \frac{3}{8}x_n^2 + \frac{3}{8}x_n + \frac{1}{8}.$$

3. Étudier la suite (x_n) et montrer qu'elle converge vers $-2+\sqrt{5}$. Interpréter ce résultat.

Indications

Ex. 21.9

1. *À l'aide, des événements P_k (resp. F_k) «on a obtenu pile (resp. face) au $k^{\text{ième}}$ lancer »pour $k \in [\![1, n]\!]$, décrivez l'événement «au cours des n lancers, pile est apparu au moins une fois »ainsi que son contraire !*

2. *Vous pourrez décrire l'événement «au cours des n lancers, face n'est jamais suivi de pile » en discutant suivant le rang d'apparition du premier face à l'aide des P_k et F_k.*

Ex. 21.13

1. *On pourra appliquer la* **méthode 21.10**.

2. *On cherchera une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 pour (a_n) et (c_n).*

Ex. 21.15

3. *Il s'agit d'une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$.*

Corrigé des vrai/faux

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F	V	F	F	F	F	F	V	V	F

1. Si A et B sont à la fois incompatibles et indépendants, alors $0 = P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, ce qui revient à dire que l'un des deux événements est négligeable ! En général, deux événements indépendants ne sont pas incompatibles !
2. C'est la propriété d'additivité de la probabilité P.
3. Pour montrer que la formule $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B \cap C)$ est fausse, considérons par exemple l'expérience suivante : on lance un dé (honnête) et on note A l'événement «le résultat est inférieur à 4», B l'événement «le résultat est un nombre impair» et C l'événement «le résultat est un diviseur de 6».
On vérifie aisément que $A \cup B \cup C = \Omega = [\![1, 6]\!]$ et donc que $PA \cup B \cup C) = 1$ tandis que $P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B \cap C) = \dfrac{4}{6} + \dfrac{3}{6} + \dfrac{3}{6} - \dfrac{2}{6} = \dfrac{8}{6}$!
Nb : Il existe une formule générale, appelée **formule de Poincaré**, (**exercice 21.4**) pour calculer la probabilité d'une réunion finie quelconque d'événements. Appliquée à la réunion des trois événements A,B et C cette formule donne :

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

4. Reprenons l'exemple du lancer d'un dé et notons $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ et $C = \{1, 2, 4, 5\}$. Clairement $P(A \cap B \cap C) = P(\{2\}) = 1/6$ et $P(A) \times P(B) \times P(C) = 1/2 \times 1/2 \times 4/6 = 1/6$ de sorte que $P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$. Pourtant, A et B ne sont pas indépendants puisque $P(A \cap B) = 1/3$ tandis que $P(A) \times P(B) = 1/4$.
5. Lançons deux dés et notons A l'événement «on obtient 6 au premier lancer» , B l'événement «on obtient 6 au deuxième lancer» et enfin C l'événement «les résultats obtenus aux deux lancers sont égaux».
Alors $P(A) = P(B) = P(C) = 1/6$ et $P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = P(\{(6, 6)\}) = 1/36$, de sorte que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, $P(A \cap C) = P(A)P(C)$ et $P(B \cap C) = P(B)P(C)$. Pourtant $P(A \cap B \cap C) = P(\{(6, 6)\}) = 1/36$, tandis que $P(A) \times P(B) \times P(C) = 6^{-3}$.
6. Ne confondez pas $P(A \mid B)$ et $P(A \cap B)$!
7. Pour définir une probabilité sur $\Omega = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, il suffit de donner les probabilités des événements élémentaires $p_i = P(X = x_i)$, de sorte que les p_i sont positifs et de somme 1. Par exemple, on définit une probabilité sur $\Omega = \{1, 2, 3\}$ en posant $p_1 = \frac{1}{6}, p_2 = \frac{1}{2}, p_3 = \frac{1}{3}$.
8. On a en effet $(A, \overline{A})$ est un SCE non négligeables et la formule des probabilités totales s'applique.
9. Ce n'est autre qu'une refomulation de la Formule de Bayes.
10. D'après le **théorème 21.2**, on a plutôt $P(A \cap \overline{B}) = P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$.

❑ **Erreurs classiques**

- Ne pas confondre indépendance mutuelle et indépendance deux à deux ! voir les exemples donnés dans le Vrai/Faux (**4,5**).
- Ne pas confondre indépendance et incompatibilité : si A et B sont deux événements incompatibles et non négligeables, alors ils ne peuvent pas être indépendants.
- Ne pas confondre $P(A \mid B)$ et $P(A \cap B)$!

Corrigé des exercices

Exercice 21.1

On met en œuvre la **méthode 21.2**

1. $A_1 = A \cup B \cup C$.
2. $A_2 = (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$.
3. $A_3 = (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
4. $A_4 = (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C)$.
5. $A_5 = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$.
6. $A_6 = A_5 \cup A_2 \cup A_4$. ▲

Exercice 21.2

1. L'événement «soit A, soit B» se traduit par $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
2. La réunion ci-dessus étant disjointe, l'additivité de P et le **théorème 21.2** donnent $P(C) = P(A \setminus B) + P(B \setminus A) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$. ▲

Exercice 21.3

Pour déterminer un encadrement de ces probabilités, on peut utiliser la propriété de croissance de la probabilité P (**théorème 21.2**).
On a d'une part $A \subset A \cup B \subset \Omega$. Par **croissance de** P, il s'ensuit que $\frac{3}{4} \leqslant P(A \cup B) \leqslant 1$. D'autre part, d'après la **formule de Poincaré** (**théorème 21.2**), on a $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{3}{2} - P(A \cup B)$. Comme $\frac{3}{4} \leqslant P(A \cup B) \leqslant 1$, il vient $\frac{1}{2} \leqslant P(A \cap B) \leqslant \frac{3}{4}$. ▲

Exercice 21.4

Lorsque $n = 3$, la formule de Poincaré est explicitée à la page 635.

La démonstration sera par récurrence sur $n \geqslant 2$. Notons pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $\mathcal{P}(n)$ la propriété :

La formule de Poincaré est vraie pour toute famille de n événements.

- **Initialisation :** Si $n = 2$, cela découle directement du **théorème 21.2**.
- **Hérédité :** Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On suppose que toute famille finie de n événements, satisfait la formule de **Poincaré**. Soit $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+1}$ une famille de $n+1$ événements. On montre que

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\Big) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n+1} P\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right).$$

Notons $B = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, et appliquons le **théorème 21.2**. Il vient :

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\Big) = P\big(B \cup A_{n+1}\big) = P(A_{n+1}) + P(B) - P(B \cap A_{n+1}). \qquad (21.1)$$

Comme B et $B \cap A_{n+1} = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1})$ sont chacun réunion de n événements, nous pouvons leur appliquer l'hypothèse de récurrence, nous obtenons successivement :

On observe que $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n+1$ et $i_k < n+1$ revient à dire que $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n$.

Le terme correspondant à $k = n+1$ est nul !

$$\begin{aligned}
P(B) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}), \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n+1 \\ i_k < n+1}} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}), \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n+1 \\ i_k < n+1}} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}), \\
P(B \cap A_{n+1}) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k} \cap A_{n+1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_{k+1} \leqslant n+1 \\ i_{k+1} = n+1}} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k} \cap A_{i_{k+1}}) \\
&= \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^{k} \sum_{\substack{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n+1 \\ i_k = n+1}} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})
\end{aligned}$$

Finalement réinjectons les expressions de $P(B)$ et $P(B \cap A_{n+1})$ dans (21.1), il vient :

$$\begin{aligned}
P\Big(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\Big) &= P(A_{n+1}) + \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n+1 \\ i_k < n+1}} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \\
&\quad - \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^{k} \sum_{\substack{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n+1 \\ i_k = n+1}} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \\
&= P(A_{n+1}) + \sum_{k=1}^{n} P(A_k) + \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n+1 \\ i_k < n+1}} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \\
&\quad + \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n+1 \\ i_k = n+1}} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} P(A_k) + \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n+1} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n+1} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}).
\end{aligned}$$

• **Conclusion :** Par récurrence, nous avons démontré que la **formule de Poincaré** est valide pour toute famille finie d'événements. ▲

OUF !

Méthode 21.1

Exercice 21.5

Un résultat possible est une «main» constituée de 5 cartes que l'on peut modéliser sous la forme d'une partie à 5 éléments du jeu de 32 cartes. Comme le tirage se fait au hasard, Ω est muni de la probabilité uniforme. On calcule Card $(\Omega) = \binom{32}{5} = 201\,376$.

1. Soit A l'événement «la main contient un carré». Pour dénombrer A, on décrit les étapes qui mènent à la réalisation d'un carré.

- choix de la hauteur du carré $\rightsquigarrow \binom{8}{1}$ possibilités.
- choix de 4 cartes à la hauteur du carré $\rightsquigarrow \binom{4}{4}$ possibilités.
- choix de la dernière carte $\rightsquigarrow \binom{28}{1}$ possibilités.

Au total, il y a $\binom{8}{1} \times \binom{28}{1}$ façons différentes de construire un carré. D'où $P(A) = \dfrac{224}{201\,376} = \dfrac{1}{899} \approx 0,0011$.

2. Soit B l'événement «la main contient au moins deux rois». On peut obtenir B comme réunion des événements «la main contient exactement 2 (resp. 3,4) rois», mais il sera plus efficace ici de dénombrer le complémentaire de B. En effet l'événement contraire $\overline{B}$, «la main contient au plus un roi», est la réunion des deux événements R_0 «la main contient aucun roi» et R_1 «la main contient exactement 1 roi». Dénombrons R_0 :

Méthode 21.2

- choix de 5 cartes qui ne sont pas des rois $\rightsquigarrow \binom{28}{5}$ possibilités.

Dénombrons R_1 :

- choix d'un roi $\rightsquigarrow \binom{4}{1}$ possibilités ;
- choix de 4 cartes qui ne sont pas des rois $\rightsquigarrow \binom{28}{4}$ possibilités.

D'où Card $(\overline{B}) = \binom{28}{5} + 4 \times \binom{28}{4} = 180\,180$ et donc Card $(B) = 21\,196$. D'où $P(B) = \dfrac{757}{7192} \approx 0,1052$. ▲

Exercice 21.6

Méthode 21.1

On effectue trois tirages successifs avec remise dans une urne contenant 10 boules numérotées. Un résultat possible est une liste (n_1, n_2, n_3) de trois entiers compris entre 1 et 10. Par conséquent, l'univers des possibles est l'ensemble des triplets d'entiers entre 1 et 10 : $\Omega = [\![1, 10]\!]^3$. Comme les événements élémentaires sont équiprobables, Ω est muni de la probabilité uniforme : Card $(\Omega) = 10^3 = 1000$.

1. Soit A l'événement «les trois nombres sont rangés dans l'ordre strictement croissant». Autrement dit, $A = \{(n_1, n_2, n_3) \in [\![1, 10]\!]^3 \mid n_1 < n_2 < n_3\}$. Pour dénombrer A, on remarque que n_1, n_2, n_3 sont nécessairement deux à deux distincts et on met en œuvre le principe du berger **méthode 20.1** :

- on choisit une partie à 3 éléments de $[\![1, 10]\!]$ $\rightsquigarrow \binom{10}{3}$ possibilités ;
- on les range par ordre strictement croissant $\rightsquigarrow 1$ possibilité.

Finalement, il y a autant de listes strictement croissantes de 3 entiers choisis entre 1 et 10 que de parties à 3 éléments dans $[\![1, 10]\!]$, à savoir $\binom{10}{3} = 120$. Il en résulte que $P(A) = \dfrac{\text{Card } (A)}{\text{Card } (\Omega)} = \dfrac{120}{1000} = 0,12$

2. Soit B l'événement «les trois nombres sont rangés dans l'ordre croissant». Autrement dit, $B = \{(n_1, n_2, n_3) \in [\![1, 10]\!]^3 \mid 1 \leqslant n_1 \leqslant n_2 \leqslant n_3 \leqslant 10\}$. À

toute suite croissante de trois entiers compris entre 1 et 10, on va associer (de façon bijective) une suite strictement croissante d'entiers entre 1 et 12.

Cette technique se généralise et permet de dénombrer l'ensemble des listes croissantes de p entiers compris entre 1 et n, **exercice 20.15**.

Soit (n_1, n_2, n_3) une liste croissante d'entiers entre 1 et 10, alors $(n_1, n_2 + 1, n_3 + 2)$ est une suite strictement croissante d'entiers compris entre 1 et 12. Inversement, si (m_1, m_2, m_3) est une suite strictement croissante d'entiers entre 1 et 12, alors $(m_1, m_2 - 1, m_3 - 2)$ est une liste croissante d'entiers compris entre 1 et 10.
Ainsi, il y a autant de 3-listes croissantes d'entiers entre 1 et 10 que de 3-listes strictement croissantes d'entiers compris entre 1 et 12. Or par un raisonnement analogue à celui de la **1.**, on vérifie que ce nombre coïncide aussi avec le nombre de parties à 3 éléments dans $[\![1, 12]\!]$, à savoir $\binom{12}{3} = 220$. Il en découle finalement que $P(B) = \dfrac{220}{1000} = 0,22$. ▲

Exercice 21.7

1. $\mathcal{U} = \{n_1, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, r_9\}$. Un résultat possible est une partie à 3 éléments, soit une combinaison de 3 boules de l'urne. Comme les événements élémentaires sont équiprobables, Ω est équipé de la probabilité uniforme : Card $(\Omega) = \binom{15}{3} = 455$.

Méthode 21.1

a. Soit A l'événement «le tirage est tricolore». Pour dénombrer A, on décrit les étapes qui mènent à la réalisation d'un tirage tricolore :

- choix d'une boule noire $\rightsquigarrow \binom{1}{1}$ possibilité ;
- choix d'une boule blanche $\rightsquigarrow \binom{5}{1}$ possibilités ;
- choix d'une boule rouge $\rightsquigarrow \binom{9}{1}$ possibilités.

Finalement, il y a 45 tirages différents qui mènent à la réalisation de A, par suite $P(A) = \dfrac{45}{455} = \dfrac{9}{91} \approx 0,0989$.

b. Soit B l'événement «parmi les boules tirées figurent la noire et au moins une rouge». Pour dénombrer B, on discute suivant le nombre exact de boules rouges. Notons B_1 (resp B_2) l'événement «parmi les boules tirées figurent la noire et exactement une (resp. deux) rouge(s)» de sorte que B s'écrit comme la réunion disjointe $B = B_1 \cup B_2$. En outre, on observe que $B_1 = A$. Dénombrons B_2 :

La troisième boule est forcément blanche : le tirage est tricolore !

- choix d'une boule noire $\rightsquigarrow \binom{1}{1}$ possibilité ;
- choix de deux boules rouges $\rightsquigarrow \binom{9}{2}$ possibilités.

Finalement, il y a 36 tirages différents qui mènent à la réalisation de B_2. Par additivité du cardinal, il en résulte que Card $(B) = 81$, d'où l'on tire que $P(B) = \dfrac{81}{455} \approx 0,1780$.

c. Soit C l'événement «les trois boules tirées sont de la même couleur». Pour dénombrer C on discute suivant la couleur du tirage. On note C_N (resp. C_B, C_R) les événements «les trois boules prélevées sont de couleur noire (resp. blanche, rouge)», de sorte que $C = C_N \cup C_B \cup C_R$. Or

$$\text{Card } (C_N) = \binom{1}{3} = 0, \text{Card } (C_B) = \binom{5}{3} = 10, \text{Card } (C_R) = \binom{9}{3} = 84$$

Par additivité du cardinal, il en résulte que Card $(C) = 94$, d'où l'on tire que $P(C) = \dfrac{94}{455} \approx 0,2065$.

Le protocole a changé, on change donc de modèle !

2. On suppose que le tirage s'effectue désormais successivement et avec remise. Dans ce cas, un résultat possible est une 3-liste d'éléments de $\mathcal{U}$. $\Omega = \mathcal{U}^3$. Comme les événements élémentaires sont équiprobables, on munit Ω de la probabilité uniforme : Card $(\Omega) = 15^3 = 3375$.

a. Dénombrons A pour ce nouveau modèle.

- choix de la boule noire $\rightsquigarrow$ 1 possibilité ;
- choix de la boule blanche $\rightsquigarrow$ 5 possibilités ;
- choix de la boule rouge $\rightsquigarrow$ 9 possibilités ;
- choix d'un ordre pour le tirage $\rightsquigarrow$ $3! = 6$ possibilités.

Finalement, Card $(A) = 270$ et par suite $P(A) = \dfrac{270}{3375} = \dfrac{2}{25} = 0,08$.

b. On a $B = B_1 \cup B_2$ avec les notations précédentes. On a déjà Card $(B_1) =$ Card $(A) = 270$. Dénombrons B_2 :

- choix de la boule noire $\rightsquigarrow$ 1 possibilité ;
- choix deux boules rouges $\rightsquigarrow$ 9^2 possibilités ;
- choix de la place de la noire dans le tirage $\rightsquigarrow$ 3 possibilités.

Finalement, Card $(B_2) = 243$, d'où l'on tire successivement Card $(B) = 513$ et $P(B) = \dfrac{513}{3375} = \dfrac{19}{125} = 0,152$.

c. Avec les mêmes notations que dans la question précédente : $C = C_N \cup C_B \cup C_R$. On a

$$\text{Card } (C_N) = 1,\ \text{Card } (C_B) = 5^3 = 125 \text{ et Card } (C_R) = 9^3 = 729.$$

D'où il vient Card $(C) = 855$ puis $P(C) = \dfrac{855}{3375} = \dfrac{19}{75} \approx 0,2533$. ▲

Remarque : pour traiter la question **2.**, on peut aussi observer que les trois tirages ayant lieu avec remise, ces expériences aléatoires sont indépendantes.

Exercice 21.8

Pour bien démarrer, on commence par cerner le type d'exercice à l'aide de la **méthode 21.1**.

$\mathcal{U} = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$

1. En relevant le numéro des boules prélevées, un résultat possible apparaît comme une partie $\{n_1, n_2, \ldots, n_p\}$ à p éléments de l'intervalle d'entiers $[\![1, n]\!]$. Par conséquent Ω est l'ensemble des p-combinaisons d'éléments de $[\![1, n]\!]$. Comme le tirage se fait de façon aléatoire, Ω est muni de la probabilité uniforme : Card $(\Omega) = \binom{n}{p}$.

a. Soit $k \in [\![p, n]\!]$. Dénombrons les poignées de p boules dont le plus grand numéro est k.

- choix de la boule portant le numéro k $\rightsquigarrow$ 1 possibilité.
- choix de $p-1$ autres de numéro inférieur à $k-1$ $\rightsquigarrow$ $\binom{k-1}{p-1}$ possibilités.

Finalement, Card $(A_k) = \binom{k-1}{p-1}$, d'où l'on tire $P(A_k) = \dfrac{\text{Card } (A_k)}{\text{Card } (\Omega)} = \dfrac{\binom{k-1}{p-1}}{\binom{n}{p}}$.

b. On observe que pour toute poignée de p boules prélevée dans $\mathcal{U}$, le plus grand numéro est soit p soit $p+1$, ... soit n. Autrement dit, $A_p, A_{p+1}, \ldots, A_n$ est un système complet d'événements. Par additivité de la probabilité,

Méthode 21.3

$$1 = P(\Omega) = P\left(A_p \cup A_{p+1} \cup \cdots \cup A_n\right) = P(A_p) + P(A_{p+1}) + \cdots + P(A_n)$$

Les A_k sont 2 à 2 disjoints et $\bigcup A_k = \Omega$.

En remplaçant les $P(A_k)$ par les expressions obtenues à la première question, il vient $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k-1}{p-1} = \binom{n}{p}$.

On peut aussi obtenir cette généralisation de la formule de Pascal par récurrence.

2. Dans cette question, on tire successivement et sans remise p boules de l'urne. Dans ce cas, un résultat élémentaire est une p-liste $(n_1, n_2, \ldots, n_p)$ d'entiers distincts de $[\![1, n]\!]$. En conséquence $\Omega = \{(n_1, n_2, \ldots, n_p) \mid n_i \neq n_j \text{ pour } i \neq j\}$. Comme les événements élémentaires sont équiprobables, Ω est muni de la probabilité uniforme : $\text{Card } (\Omega) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$.

On note B_p l'événement «la $p^{\text{ième}}$ boule tirée a un numéro supérieur aux $p-1$ numéros précédents». Dans notre modèle, $B_p = \{(n_1, n_2, \ldots, n_p) \in \Omega \mid n_p = \max\{n_1, \ldots, n_p\}\}$. Pour dénombrer B_p, nous allons discuter suivant la valeur de $\max\{n_1, n_2, \ldots, n_p\}$.

Comme le tirage se fait sans remise, $\max\{n_1, n_2, \ldots, n_p\} \in [\![p; n]\!]$.

Soit donc $k \in [\![p, n]\!]$ fixé. Dénombrons l'ensemble des p-listes d'entiers deux à deux distincts $(n_1, n_2, \ldots, n_p)$ et tels que $\max\{n_1, n_2, \ldots, n_p\} = k$:

- choix de $(n_1, \ldots, n_{p-1})$ comme liste d'entiers ;
  compris entre 1 et $k-1$, deux à deux distincts. $\rightsquigarrow \dfrac{(k-1)!}{(k-p)!}$ possibilités.
- choix de n_p égal à k $\rightsquigarrow$ 1 possibilité.

Par additivité du cardinal, il vient tout d'abord

$$\text{Card } (B_p) = \sum_{k=p}^{n} \frac{(k-1)!}{(k-p)!} = \sum_{k=p}^{n} (p-1)! \binom{k-1}{p-1}$$

On utilise ici la formule de Pascal généralisée, obtenue à la question **1.b**.

$$\begin{aligned} \text{Puis } P(B_p) &= \frac{\text{Card } (B_p)}{\text{Card } (\Omega)} = \sum_{k=p}^{n} \frac{(p-1)!(n-p)!}{n!} \binom{k-1}{p-1} \\ &= \frac{(p-1)!(n-p)!}{n!} \sum_{k=p}^{n} \binom{k-1}{p-1} = \frac{(p-1)!(n-p)!}{n!} \binom{n}{p} = \frac{1}{p} \end{aligned}$$

▲

Remarque : parmi les p boules prélevées le maximum apparaît de façon équiprobable à la 1re, la 2e ou la $p^{\text{ième}}$ place !!

Exercice 21.9

Méthode 21.1

Il s'agit d'une succession d'épreuves aléatoires. Les résultats de chaque épreuve forment une SCE. On note P_k (resp. F_k) l'événement «on a obtenu pile (resp. face) au $k^{\text{ième}}$ lancer» pour $k \in [\![1, n]\!]$.

1. Soit E l'événement «au cours des n lancers, pile est apparu au moins une fois». On a

$$E = P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_n \text{ et } \overline{E} = F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n$$

Probabilité de l'événement contraire.

Comme les lancers sont mutuellement indépendants, on a $\overline{E} = P(F_1) \times \cdots \times P(F_n) = q^n$, par suite $P(E) = 1 - q^n$.

2. Soit A l'événement «au cours des n lancers, face n'est jamais suivi de pile». Nous allons discuter suivant le rang d'apparition du premier face. Soit $k \in [\![1, n]\!]$.

- on note $A_k = P_1 \cap \cdots \cap P_{k-1} \cap F_k \cap \cdots \cap F_n$, l'événement «face n'est jamais suivi de pile et le premier face est apparu au k^{ième} lancer» ;
- on note $A_{n+1} = P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap \cdots \cap P_n$, l'événement «on n'a obtenu que des pile».

Les événements A_k sont deux à deux incompatibles et recouvrent A puisque $A = \bigcup_{k=1}^{n+1} A_k$. Par additivité finie des probabilités, il vient

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n+1} P(A_k)$$

Méthode 21.4

Or, les événements $P_1, P_2, \ldots, P_n$ étant mutuellement indépendants, on a

$$\begin{aligned} P(A_k) &= P(P_1) \cdots P(P_{k-1}) \cdot P(F_k) \cdots P(F_n) = p^{k-1} q^{n-k+1} \\ P(A_{n+1}) &= P(P_1) \cdots P(P_n) = p^n \end{aligned}$$

D'où, finalement, d'après l'**identité géométrique**

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n+1} p^{k-1} q^{n-k+1} = \sum_{k=0}^{n} p^k q^{n-k} = \begin{cases} \dfrac{p^{n+1} - q^{n+1}}{p - q} & \text{si } p \neq q \\ \dfrac{n+1}{2^n} & \text{si } p = q = 1/2 \end{cases}.$$

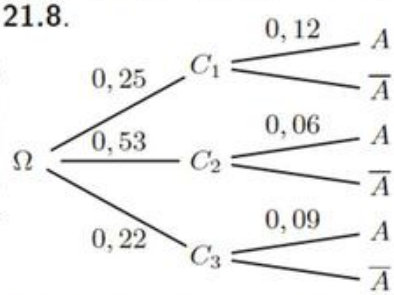
▲

Exercice 21.10

Méthode 21.1

On observe que dans cet énoncé, tout est conditionné par la classe d'âge de l'assuré. Nous mettons à l'œuvre la **méthode 21.8**.

Notons C_1,C_2, C_3 les trois classes d'âges rangées dans l'ordre croissant, et A l'événement «l'assuré déclare (au moins) un accident dans l'année». Un arbre des possibles permet de visualiser l'expérience aléatoire.



1. On applique la **formule des probabilités totales** pour le système complet d'événements non négligeables (C_1, C_2, C_3). Il vient

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|C_1)P(C_1) + P(A|C_2)P(C_2) + P(A|C_3)P(C_3) \\ &= 0,25 \times 0,12 + 0,53 \times 0,06 + 0,22 \times 0,09 = 0,0816 \end{aligned}$$

Prise en compte d'une information supplémentaire : on calcule une probabilité conditionnelle.

2. On sait que l'assuré a eu un accident au cours de l'année. On cherche la probabilité qu'il soit agé d'au plus 25 ans. On calcule donc $P(C_1|A)$, à l'aide de la **formule de Bayes** :

$$\begin{aligned} P(C_1|A) &= \frac{P(A|C_1)P(C_1)}{P(A|C_1)P(C_1)+P(A|C_2)P(C_2)+P(A|C_3)P(C_3)} \\ &\approx 0,3676 \end{aligned}$$

3. On calcule la probabilité pour qu'un assuré agé de 25 ans ou plus ait au moins un accident au cours de l'année, soit $P(A|C_2 \cup C_3)$. D'après les propriétés des probabilités :

C_2 et C_3 sont incompatibles.

$$\begin{aligned} P(A|C_2 \cup C_3) &= \frac{P\big(A \cap (C_2 \cup C_3)\big)}{P(C_2 \cup C_3)} = \frac{P\big((A \cap C_2) \cup (A \cap C_3)\big)}{P(C_2)+P(C_3)} \\ &= \frac{P(C_2)P(A|C_2)+P(C_3)P(A|C_3)}{P(C_2)+P(C_3)} = 0,0688 \end{aligned}$$

4. On cherche la probabilité pour qu'un assuré n'ayant déclaré aucun accident soit âgé de 25 à 50 ans, c'est-à-dire $P(C_2|\overline{A})$. On utilise la **formule d'inversion des conditionnements** :

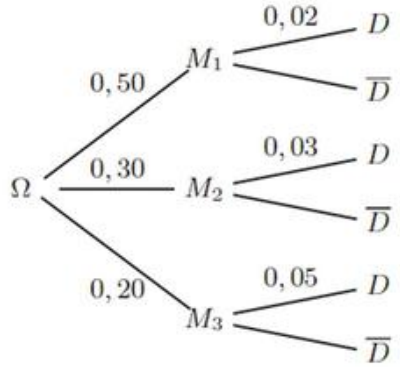
$$P(C_2|\overline{A}) = \frac{P(C_2)P(\overline{A}|C_2)}{P(\overline{A})} \approx 0,5424$$

▲

Exercice 21.11

Tout est conditionné par la machine qui produit le composant pris au hasard.

Notons M_1 (resp. M_2, M_3) l'événement «le composant est produit par la machine M_1 (resp. M_2, M_3), et D l'événement «le composant est défectueux». Un arbre des possibles permet de visualiser l'expérience aléatoire.



La **méthode 21.1** *préconise en ce cas l'utilisation de la* **méthode 21.8**.

1. On applique la **formule des probabilités totales** pour le système complet d'événements non négligeables (M_1, M_2, M_3). Il vient

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D|M_1)P(M_1)+P(D|M_2)P(M_2)+P(D|M_3)P(M_3) \\ &= 0,5 \times 0,02 + 0,3 \times 0,03 + 0,2 \times 0,05 = 0,029 \end{aligned}$$

2. On prélève un composant au hasard. On détermine la probabilité pour qu'il provienne de M_1 **et** qu'il soit défectueux. On calcule donc $P(M_1 \cap D)$. $P(M_1 \cap D) = P(M_1)P(D|M_1) = 0,5 \times 0,02 = 0,01$. Comme $P(M_1 \cap D) \neq P(M_1) \times P(D)$, M_1 et D ne sont pas indépendants pour la probabilité P.

Méthode 21.2

3. On sait que le composant prélevé est défectueux. On calcule la probabilité conditionnelle $P(M_1|D)$ à l'aide de la définition : $P(M_1|D) = \frac{P(M_1 \cap D)}{P(D)} = \frac{0,01}{0,029} \approx 0,3448$. ▲

Prise en compte d'une information supplémentaire.

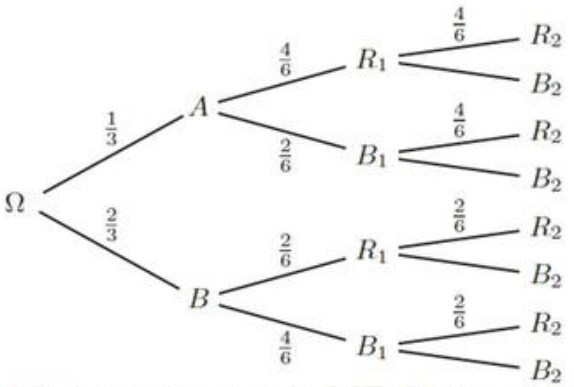
Corrigé

Exercice 21.12

Dans cette expérience aléatoire, tout est conditionné par le résultat du lancer à pile ou face.

Méthode 21.1

On note A (resp. B) l'événement «la pièce tombe sur pile (resp. face)», R_k (resp. B_k) l'événement «on obtient rouge (resp. blanc) au $k^{\text{ième}}$ lancer de dé». On peut représenter l'expérience aléatoire sous la forme d'un arbre.



1. D'après la **formule des probabilités totales** pour le SCE d'événements non négligeables (A, B), il vient

$$P(R_1) = P(A) \times P(R_1 \mid A) + P(B) \times P(R_1 \mid B) = \frac{4}{6}\,\frac{1}{3} + \frac{2}{6}\,\frac{2}{3} = \frac{4}{9} \approx 0,4444.$$

2. On sait que $R_1 \cap R_2$ est réalisé. On cherche $P(R_1 \cap R_2 \cap R_3 \mid R_1 \cap R_2)$. D'après la **formule des probabilités totales** pour le SCE d'événements non négligeables (A, B), il vient

$$\begin{aligned} P(R_1 \cap R_2) &= P(A)\ P(R_1 \cap R_2 \mid A) + P(B)\ P(R_1 \cap R_2 \mid B) \\ P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) &= P(A)\ P(R_1 \cap R_2 \cap R_3 | A) + P(B)\ P(R_1 \cap R_2 \cap R_3 | B) \end{aligned}$$

Méthode 21.6

Calculons les probabilités conditionnelles : on suppose tout d'abord que A est réalisé. En ce cas, les événements R_1, R_2, R_3 sont mutuellement indépendants et de même probabilité $\frac{2}{3}$. Par conséquent $P(R_1 \cap R_2 \mid A) = \left(\frac{2}{3}\right)^2$ et $P(R_1 \cap R_2 \cap R_3 \mid A) = \left(\frac{2}{3}\right)^3$. De même, en supposant cette fois que B est réalisé, on obtient $P(R_1 \cap R_2 \mid B) = \left(\frac{1}{3}\right)^2$ et $P(R_1 \cap R_2 \cap R_3 \mid B) = \left(\frac{1}{3}\right)^3$. Réinjectons ceci dans les **FPT** ci-dessus pour obtenir :

$$\begin{aligned} P(R_1 \cap R_2) &= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{6}{27} = \frac{2}{9} \\ P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) &= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{10}{81} \end{aligned}$$

Finalement $P(R_1 \mid R_1 R_2) = \dfrac{P(R_1 \cap R_2 \cap R_3)}{P(R_1 \cap R_2)} = \dfrac{5}{9} \approx 0,5555.$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On calcule $P(A \mid R_1 \cap \cdots \cap R_n)$ à l'aide la **formule de Bayes**. Tout d'abord, d'après la **formule des probabilités totales** pour le SCE non négligeables (A, B), on a :

Sous la condition que A ou B soit réalisé, les événements $R_1, R_2, \ldots, R_n$ sont mutuellement indépendants.

$$\begin{aligned} P(R_1 \cap \cdots \cap R_n) &= P(A)P(R_1 \cap \cdots \cap R_n \mid A) + P(B)P(R_1 \cap \cdots \cap R_n \mid B) \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{2^n}{3^{n+1}} + \frac{2}{3^{n+1}} = \frac{2^n + 2}{3^{n+1}} \end{aligned}$$

Finalement

$$P(A \mid R_1 \cap \cdots \cap R_n) = \frac{P(R_1 \cap \cdots \cap R_n \mid A)P(A)}{P(A)P(R_1 \cap \cdots \cap R_n \mid A) + P(B)P(R_1 \cap \cdots \cap R_n \mid B)}$$
$$= \frac{2^n}{2^n + 2}.$$

▲

Exercice 21.13

L'expérience aléatoire consiste ici en une succession d'épreuves aléatoires qui se répète chaque année. La **méthode 21.1** préconise en ce cas d'utiliser le SCE correspondant aux résultats possibles pour la $n^{\text{ième}}$ épreuve.

On note pour $n \in \mathbb{N}$, A_n, B_n et C_n les événements «à l'issue de la $n^{\text{ième}}$ année, le consommateur décide d'être client de A, B ou C».

Méthode 21.10

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. (A_n, B_n, C_n) forme un système complet d'événements. La **formule des probabilités totales** s'écrit

On vérifiera a posteriori que ces événements sont non négligeables.

$$\begin{aligned}
P(A_{n+1}) &= P(A_n)P(A_{n+1}|A_n) + P(B_n)P(A_{n+1}|B_n) + P(C_n)P(A_{n+1}|C_n)\\
P(B_{n+1}) &= P(A_n)P(B_{n+1}|A_n) + P(B_n)P(B_{n+1}|B_n) + P(C_n)P(B_{n+1}|C_n)\\
P(C_{n+1}) &= P(A_n)P(C_{n+1}|A_n) + P(B_n)P(C_{n+1}|B_n) + P(C_n)P(C_{n+1}|C_n)
\end{aligned}$$

Les hypothèses sur la loi d'évolution du marché, se traduisent par

Ce travail de traduction des hypothèses est essentiel !

$$\begin{array}{lll}
P(A_{n+1}|A_n) = \frac{1}{3} & P(B_{n+1}|A_n) = \frac{1}{3} & P(C_{n+1}|A_n) = \frac{1}{3}\\
P(A_{n+1}|B_n) = 0 & P(B_{n+1}|B_n) = 1 & P(C_{n+1}|B_n) = 0\\
P(A_{n+1}|C_n) = \frac{1}{12} & P(B_{n+1}|C_n) = \frac{7}{12} & P(C_{n+1}|C_n) = \frac{1}{3}
\end{array}$$

Il en résulte les relations de récurrence suivantes :

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{12}c_n;\ b_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + 1 \cdot b_n + \frac{7}{12}c_n;\ c_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}c_n$$

2.

• Commençons par établir une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 pour les suites (a_n) et (c_n). Soit $n \in \mathbb{N}$. En exploitant les relations entre a_{n+2}, c_{n+2}, a_{n+1}, c_{n+1}, a_n et c_n on obtient :

$$\begin{aligned}
a_{n+2} &= \tfrac{1}{3}a_{n+1} + \tfrac{1}{12}c_{n+1} = \tfrac{1}{3}a_{n+1} + \tfrac{1}{12}\left(\tfrac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}c_n\right)\\
&= \tfrac{1}{3}a_{n+1} + \tfrac{1}{36}a_n + \tfrac{1}{36}\left(12a_{n+1} - 4a_n\right) = \tfrac{2}{3}a_{n+1} - \tfrac{1}{12}a_n \text{ et de même}\\
c_{n+2} &= \tfrac{2}{3}c_{n+1} - \tfrac{1}{12}c_n
\end{aligned}$$

Les suites (a_n) et (c_n) sont des suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

• Déterminons l'expression de a_n et de c_n en fonction de n à l'aide de la **méthode 9.6**. L'équation caractéristique $r^2 - \frac{2}{3}r + \frac{1}{12} = 0$ admet pour racines simples $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{6}$. Par conséquent, il existe des constantes réelles $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \alpha\left(\frac{1}{2}\right)^n + \beta\left(\frac{1}{6}\right)^n,\ c_n = \gamma\left(\frac{1}{2}\right)^n + \delta\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

Les données initiales $a_0 = b_0 = c_0 = \dfrac{1}{3}$, puis $a_1 = \dfrac{5}{36}, c_1 = \dfrac{2}{9}$ permettent de déterminer les constantes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Après résolution, on obtient pour $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{12}\left(\frac{1}{6}\right)^n \text{ et } c_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

• Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Pour déterminer b_n, observons tout d'abord que pour tout entier $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a

$$b_{k+1} - b_k = \frac{1}{3}a_k + \frac{7}{12}c_k = \frac{3}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^k - \frac{5}{72}\left(\frac{1}{6}\right)^k$$

Ce calcul de somme fait seulement intervenir à gauche un **télescopage** *et à droite l'*__identité géométrique__*... appliquée deux fois !*

Ceci étant vrai pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ on obtient par sommation

$$\begin{aligned} b_n - b_0 &= \frac{3}{8}\frac{1-(1/2)^n}{1-(1/2)} - \frac{5}{72}\frac{1-(1/6)^n}{1-(1/6)} \\ &= \frac{3}{4}\left[1-(1/2)^n\right] - \frac{1}{12}\left[1-(1/6)^n\right] \end{aligned}$$

D'où $b_n = 1 - \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{12}\left(\frac{1}{6}\right)^n$.

Finalement, on obtient les limites de ces suites par opérations algébriques sur des suites convergentes : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 1$. L'opérateur B tend vers le monopôle ! ▲

Exercice 21.14

On note pour $n \in \mathbb{N}$, A_n, B_n et C_n les événements «à l'instant n, la particule se situe en A, B ou C».

La **méthode 21.1** *recommande d'appliquer ici la* **méthode 21.10**.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. (A_n, B_n, C_n) forme un système complet d'événements. La **formule des probabilités totales** s'écrit

$$\begin{aligned} P(A_{n+1}) &= P(A_n)P(A_{n+1}|A_n) + P(B_n)P(A_{n+1}|B_n) + P(C_n)P(A_{n+1}|C_n) \\ P(B_{n+1}) &= P(A_n)P(B_{n+1}|A_n) + P(B_n)P(B_{n+1}|B_n) + P(C_n)P(B_{n+1}|C_n) \\ P(C_{n+1}) &= P(A_n)P(C_{n+1}|A_n) + P(B_n)P(C_{n+1}|B_n) + P(C_n)P(C_{n+1}|C_n) \end{aligned}$$

Les hypothèses sur les transitions de la particule, d'un sommet à l'autre, se traduisent par

$$\begin{array}{lll} P(A_{n+1}|A_n) = 0 & P(B_{n+1}|A_n) = \frac{3}{4} & P(C_{n+1}|A_n) = \frac{1}{4} \\ P(A_{n+1}|B_n) = \frac{3}{4} & P(B_{n+1}|B_n) = 0 & P(C_{n+1}|B_n) = \frac{1}{4} \\ P(A_{n+1}|C_n) = 0 & P(B_{n+1}|C_n) = 1 & P(C_{n+1}|C_n) = 0 \end{array}$$

On en déduit les relations de récurrence $\left\{\begin{array}{rcl} a_{n+1} &=& 0\cdot a_n + \frac{3}{4}b_n + 0\cdot c_n \\ b_{n+1} &=& \frac{3}{4}a_n + 0\cdot b_n + 1\cdot c_n \\ c_{n+1} &=& \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + 0\cdot c_n \end{array}\right.$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$, de sorte que les relations de récurrence ci-dessus, se traduisent matriciellement par $X_{n+1} = M \times X_n$. Une récurrence immédiate montre que $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = M^n X_0$.

(X_n) est une suite géométrique de matrices

3. On montre que P est inversible et que $P^{-1} = \frac{1}{70}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 7 & 7 & -28 \\ 25 & -45 & 60 \end{pmatrix}$.

Utilisez votre méthode préférée ! **méthode 12.3** *ou* **méthode 12.4**

De plus, $P^{-1} \times M \times P$ est la matrice diagonale $D = \mathrm{Diag}(1, \frac{-1}{4}, \frac{-3}{4})$.

4. De la relation matricielle, $P^{-1} \times M \times P = D$, il résulte successivement que $M = P \times D \times P^{-1}$ puis, par récurrence immédiate, que pour tout entier

naturel $n \in \mathbb{N}$, $M^n = P \times D^n \times P^{-1}$. On obtient aisément les puissances de la matrice diagonale pour en déduire finalement celles de M :

$$M^n = \frac{1}{70}\begin{pmatrix} 24+21\left(\frac{-1}{4}\right)^n+25\left(\frac{-3}{4}\right)^n & 24+21\left(\frac{-1}{4}\right)^n-45\left(\frac{-3}{4}\right)^n & 24-84\left(\frac{-1}{4}\right)^n+60\left(\frac{-3}{4}\right)^n \\ 32-7\left(\frac{-1}{4}\right)^n-25\left(\frac{-3}{4}\right)^n & 32-7\left(\frac{-1}{4}\right)^n+45\left(\frac{-3}{4}\right)^n & 32+28\left(\frac{-1}{4}\right)^n-60\left(\frac{-3}{4}\right)^n \\ 14-14\left(\frac{-1}{4}\right)^n & 14-14\left(\frac{-1}{4}\right)^n & 14+56\left(\frac{-1}{4}\right)^n \end{pmatrix}$$

D'où l'on tire finalement les expressions suivantes :

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{70}\Big(24+\left(\frac{-1}{4}\right)^n(21a_0+21b_0-84c_0)+\left(\frac{-3}{4}\right)^n(25a_0-45b_0+60c_0)\Big) \\ b_n = \frac{1}{70}\Big(32+\left(\frac{-1}{4}\right)^n(-7a_0-7b_0+28c_0)+\left(\frac{-3}{4}\right)^n(-25a_0+45b_0-60c_0)\Big) \\ c_n = \frac{1}{70}\Big(14+\left(\frac{-1}{4}\right)^n(-14a_0-14b_0+56c_0)\Big) \end{cases}$$

5. Par opérations algébriques sur des suites convergentes, il en résulte que

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{12}{35},\ \lim_{n\to+\infty} b_n = \frac{16}{35},\ \lim_{n\to+\infty} c_n = \frac{7}{35}.$$

▲

Exercice 21.15

Notons pour $n \in \mathbb{N}^\star$, E_n l'événement «à l'issue de la n-ième génération, l'espèce a totalement disparu».

1. Notons pour $k \in [\![0,3]\!]$, A_k l'événement «la 2e génération compte k individus». (A_0, A_1, A_2, A_3) forme un SCE.

Tout dépend du nombre d'individus de 2e génération, on utilise la FPT !

Soit donc $k \in [\![0,n]\!]$ et supposons que A_k est réalisé. Pour que l'espèce s'éteigne à l'issue de la 2e génération, il faut et il suffit qu'aucun des k individus de cette génération n'admette de descendant. Pour un individu, la probabilité de n'avoir aucun descendant est $x_1 = \frac{1}{8}$. Par indépendance de ces événements, on a $P(E_2|A_k) = x_1^k$. Finalement, d'après la **formule des probabilités totales**, nous avons

$$\begin{aligned} P(E_2) &= P(A_0)\times P(E_2|A_0)+P(A_1)\times P(E_2|A_1)+P(A_2)\times P(E_2|A_2) \\ &\quad +P(A_3)\times P(E_2|A_3) = \frac{1}{8}+\frac{3}{8}\,x_1+\frac{3}{8}\,x_1^2+\frac{1}{8}\,x_1^3 \approx 0.178 \end{aligned}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Pour calculer $P(E_{n+1})$, on discute en fonction des effectifs de population à la 2e génération. Soit donc $k \in [\![0,3]\!]$, supposons que A_k est réalisé. Pour que l'espèce s'éteigne à l'issue de la $n+1$-ième génération, il faut et il suffit que les lignées des k individus de 2e génération s'éteignent en n générations maximum. Comme pour un individu donné, la probabilité que sa lignée s'éteigne au bout de n générations est x_n, il s'ensuit par indépendance que $P(E_{n+1}|A_k) = x_n^k$. Finalement, la **formule des probabilités totales** donne

$$x_{n+1} = P(E_{n+1}) = \frac{1}{8}+\frac{3}{8}\,x_n+\frac{3}{8}\,x_n^2+\frac{1}{8}\,x_n^3$$

✐ **Méthode 9.7**

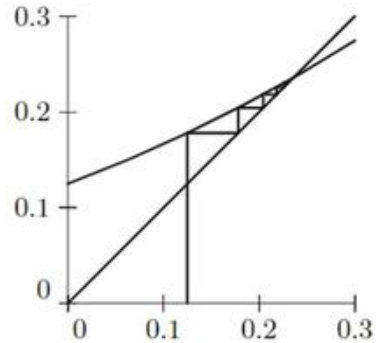
3. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8}\,x + \frac{3}{8}\,x^2 + \frac{1}{8}\,x^3 = \frac{1}{8}(1+x)^3.$$

✐ *1 est racine évidente !*

f est croissante sur l'intervalle stable $[0,1]$. Étudions le signe de $h : x \mapsto f(x) - x$. Soit $x \in [0,1]$. $h(x) = \frac{1}{8}\left[(1+x)^3 - 8x\right] = \frac{1}{8}(x-1)(x^2+4x-1)$. Par conséquent, $h(x) = 0$ si et seulement si $x \in \{-2+\sqrt{5}, 1\}$. Le tableau ci-dessous résume ces propriétés.

x	0		$-2+\sqrt{5}$		1
$h(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\nearrow$	$-2+\sqrt{5}$	$\nearrow$	1



✐ $-2+\sqrt{5} \approx 0,236$

Comme $x_1 \in [0,1]$, on sait que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et bornée. Comme de plus $x_1 = \frac{1}{8} \in [0, -2+\sqrt{5}]$, la suite (x_n) est croissante et majorée par $[0, -2+\sqrt{5}]$. D'après le **théorème de la limite monotone** (x_n) converge vers $\ell \in [0, -2+\sqrt{5}]$. Comme la fonction itératrice f est continue, ℓ est un point fixe de f. Finalement, la suite (x_n) converge vers $-2+\sqrt{5}$.

✐ *Les seuls points fixes de f sont $-2+\sqrt{5}$ et 1.*

La probabilité que l'espèce disparaisse est de $-2+\sqrt{5}$, soit environ 23,6%. ▲

Chapitre 22

Variables aléatoires, espérance, variance

UN MATHÉMATICIEN

Après de brillantes études, **Paul Levy** se spécialise d'abord en analyse fonctionnelle mais se tourne vite vers les probabilités, domaine où il introduit de nouvelles notions, en particulier celle de variable aléatoire. Il étudie les différents types de convergence des suites de variables aléatoires. À la fin de sa vie, il se penche sur les liens entre philosophie et mathématiques dans son ouvrage *Quelques aspects de la pensée d'un mathématicien*.

Un peu d'histoire

Au tout début du XVIIe siècle, le Duc de Toscane avait demandé à son précepteur, Galilée, pourquoi en lançant trois dés, on obtient plus souvent un total de 9 que de 10 alors que chaque résultat correspond à six façons différentes. Au milieu de ce même siècle, Blaise Pascal et Pierre de Fermat échangeaient sur le problème des partis : supposons qu'on doive arrêter un jeu alors que l'un des joueurs est à deux manches de la victoire et l'autre doit en remporter trois pour gagner. Comment doit-on partager les mises égales engagées par les deux joueurs ? Ceci conduit les deux savants à la loi binomiale. Jacques Bernoulli démontre la loi des grands nombres sur une expérience aléatoire amenant à deux résultats qu'il nomme les cas fertiles et les cas stériles. C'est dans l'étude des lois discrètes qu'a pris naissance le calcul des probabilités.

Objectifs

les incontournables

- Lois de probabilité :
  - déterminer la loi d'une variable aléatoire réelle ;
  - déterminer les lois d'un couple de variables aléatoires réelles : loi conjointe et lois marginales ;
  - reconnaître et utiliser une loi classique : loi uniforme, loi de Bernoulli, loi binomiale.
- Moments d'une variable aléatoire :
  - calculer et interpréter espérance et variance d'une variable aléatoire ;
  - calculer la covariance d'un couple de variables aléatoires ;

et plus si affinités

- Étudier une suite de variables aléatoires.

Résumé de cours

Variable aléatoire réelle

Dans tout le chapitre, (Ω, P) désigne un espace probabilisé fini.

Loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle finie

Définition : *On appelle* ***variable aléatoire réelle*** *(v.a.r.) sur Ω toute application $X : \Omega \to \mathbb{R}$.*

Notation : *L'ensemble des valeurs possibles pour X est fini et sera noté $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.*

Théorème-Définition 22.1.— L'application $P^X : \begin{array}{ccc} X(\Omega) & \to & [0,1] \\ x_i & \mapsto & P(X = x_i) \end{array}$ est une probabilité sur $X(\Omega)$, appelée **loi de probabilité de X**.

Notation : *$(X = x_i)$ désigne l'événement $X^{-1}(\{x_i\}) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_i\}$. Si $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$, on note $(X \in A)$, $\{X \in A\}$ ou encore $[X \in A]$ l'événement $X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$.*

Corollaire 22.2.— La loi de probabilité de X est la donnée d'un n-uplet de couples $(x_i, p_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$:

- $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$
- $\forall i \in [\![1, n]\!],\ p_i = P(X = x_i)$

Corollaire 22.3.— Système complet d'événements lié à X —.

Les événements $(X = x_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ forment un SCE. En particulier $\forall i \in [\![1, n]\!],\ p_i \geqslant 0$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Transformée d'une variable aléatoire réelle finie

Définition : *Soit X une v.a.r. sur (Ω, P) et $f : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $X(\Omega)$. L'application composée $\omega \mapsto f\big(X(\omega)\big)$ est une variable aléatoire notée $f(X)$.*

Couple de variables aléatoires réelles

Loi conjointe de deux variables aléatoires X et Y

Soit X, Y deux v.a.r. sur (Ω, P). On note $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j,\ j \in J\}$. L'application $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ qui à $\omega \in \Omega$ associe $\big(X(\omega), Y(\omega)\big)$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

Définition : *La loi de probabilité du couple (X, Y) est appelée la* ***loi conjointe de X et de Y****.*

Corollaire 22.4.— La loi du couple (X, Y) est la donnée d'une famille $\big((x_i, y_j),\ p_{i,j}\big)_{(i,j) \in I \times J}$:

- $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\},\ Y(\Omega) = \{y_j,\ j \in J\}$
- $\forall (i, j) \in I \times J,\ p_{i,j} = P(X = x_i, Y = y_j)$

Notation : *Pour alléger, on note $P(X = x_i, Y = y_j)$ à la place de $P\big([X = x_i] \cap [Y = y_j]\big)$.*

Corollaire 22.5.— Système complet d'événements lié à (X,Y) —. Les $([X=x_i]\cap[Y=y_j])$ pour $(i,j)\in I\times J$ forment un SCE. En particulier $\forall(i,j)\in I\times J,\ \ p_{i,j}\geqslant 0$ et $\sum_{(i,j)\in I\times J} p_{i,j}=1$.

Lois marginales

Définition : *Soit X et Y deux v.a.r. sur (Ω,P). Les lois de X et Y sont appelées les* ***lois marginales du couple*** *(X,Y).*

Notation : *Soit $(i,j)\in I\times J$, on note $p_{i\bullet}=P(X=x_i)$ et $p_{\bullet j}=P(Y=y_j)$.*

Théorème 22.6.— Soit (X,Y) un couple de v.a.r. sur (Ω,P) de loi $\{(x_i,y_j),p_{i,j}\}$. Alors

- $\forall i\in I,\quad p_{i\bullet} = P(X=x_i)=P\big(\bigcup_{j\in J}[X=x_i]\cap[Y=y_j]\big)=\sum_{j\in J}p_{i,j}$
- $\forall j\in J,\quad p_{\bullet j} = P(Y=y_j)=P\big(\bigcup_{i\in I}[X=x_i]\cap[Y=y_j]\big)=\sum_{i\in I}p_{i,j}$

Remarque : la connaissance de la loi conjointe permet de déterminer les lois marginales, mais la réciproque est fausse. Les lois marginales ne suffisent pas pour déterminer la loi conjointe.

Indépendance de variables aléatoires

Définition : *X et Y sont dites* ***indépendantes*** *sur (Ω,P) si pour tout $(i,j)\in I\times J$ on a :*

$$P(X=x_i,Y=y_j)=P(X=x_i)\times P(Y=y_j)\ \text{ ou encore } p_{i,j}=p_{i\bullet}\times p_{\bullet j}$$

Proposition 22.7.— Soit X,Y des v.a.r. indépendantes sur (Ω,P). Pour tous $A,B\in\mathscr{P}(\mathbb{R})$, on a

$$\boxed{P(X\in A \text{ et } Y\in B)=P(X\in A)\times P(Y\in B)}$$

Proposition 22.8.— Soit X,Y des v.a.r. indépendantes sur (Ω,P). Pour toutes fonctions f et g définies respectivement sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$, $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

Définition : *n variables aléatoires $X_1,X_2,\dots,X_n$ sont* ***mutuellement indépendantes****, ou plus simplement* ***indépendantes****, lorsque pour toutes valeurs $x_{i_1},x_{i_2},\dots,x_{i_n}$ prises par ces variables,*

$$P(X_1=x_{i_1},X_2=x_{i_2},\dots,X_n=x_{i_n})=P(X_1=x_{i_1})\times P(X_2=x_{i_2})\times\cdots\times P(X_n=x_{i_n}).$$

Théorème 22.9.— Lemme des coalitions —. Soit $X_1,\dots,X_n$ des variables indépendantes, soit $f:X_1(\Omega)\times\cdots\times X_m(\Omega)\to\mathbb{R}$ et $g:X_{m+1}(\Omega)\times\cdots\times X_n(\Omega)\to\mathbb{R}$ deux fonctions. Alors

$$\boxed{\text{Les transformées } f(X_1,\dots,X_m) \text{ et } g(X_{m+1},\dots,X_n) \text{ sont indépendantes.}}$$

Remarque : plus généralement, si $X_1,X_2,\dots,X_n$ sont indépendantes et $n=n_1+n_2+\cdots+n_p$, alors $f_1(X_1,\dots,X_{n_1}),f_2(X_{n_1+1},\dots,X_{n_1+n_2}),\dots,f_p(X_{n-n_p+1},\dots,X_n)$ sont également indépendantes.

■ Espérance, variance d'une variable aléatoire

Espérance d'une variable aléatoire réelle

Définition : *Soit X une v.a.r. sur (Ω, P) de loi $(x_i, p_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$.*

- *L'espérance (ou moyenne) de X est le nombre réel $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p_i$.*

Corollaire 22.10.— Espérance de X—. Soit X une v.a.r. sur (Ω, P).

$$\boxed{E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i\ p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i\ \ P(X = x_i) = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\ P(\{\omega\}).}$$

Vocabulaire : *Lorsque l'espérance mathématique de X est nulle, on dit que X est une variable centrée.*

Théorème 22.11.— Formule de transfert —. Soit X une v.a.r. sur Ω et $f : X(\Omega) \to \mathbb{R}$. Alors

$$\boxed{E\big(f(X)\big) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\ P(X = x_i)}$$

Théorème 22.12.— Propriétés de l'espérance —. Soit X, Y deux v.a.r. définies sur Ω. Alors

- **Linéarité :** Si $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ alors $E(\lambda \cdot X + \mu \cdot Y) = \lambda \cdot E(X) + \mu \cdot E(Y)$.
- **Positivité :** Si $X \geqslant 0$ (*i.e.* $\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) \geqslant 0$), alors $E(X) \geqslant 0$.
- **Croissance :** Si $X \leqslant Y$ (*i.e.* $\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) \leqslant Y(\omega)$), alors $E(X) \leqslant E(Y)$.

Théorème 22.13.— Espérance d'une somme —. Soit $X_1, \ldots, X_n$, n v.a.r. sur (Ω, P). Alors

$$\boxed{E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)}$$

Théorème 22.14.— Espérance d'un produit —. Soit (X, Y) un couple de v.a.r. sur (Ω, P) de loi $\big((x_i, y_j); p_{i,j}\big)_{(i,j)\in I\times J}$. Alors $E(X \times Y) = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} x_i\ y_j\ p_{i,j}$. Si de plus X et Y sont indépendantes sur Ω, alors

$$\boxed{E(X \times Y) = E(X) \times E(Y)}$$

Théorème 22.15.— Inégalité de Markov —. Soit X une v.a.r. positive sur (Ω, P). Alors

$$\boxed{\forall x > 0, \qquad P(X \geqslant x) \leqslant \frac{1}{x}\ E(X)}$$

Variance, écart-type et covariance de variables aléatoires

Définition : *Soit X, Y des v.a.r. sur (Ω, P).*

- *La **variance** de X est le nombre positif $V(X) = E\big((X - E(X))^2\big)$.*
- *L'**écart-type** de X est le nombre positif $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.*
- *La **covariance** de X et de Y est le nombre réel $\mathrm{Cov}(X, Y) = E\big((X - E(X))(Y - E(Y))\big)$.*

Vocabulaire : *Lorsque $V(X) = 1$, on dit que X est **réduite**. Lorsque $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$, on dit que X et Y sont **décorrélées**.*

Proposition 22.16.— Soit X une v.a.r. sur (Ω, P). Si $\sigma(X) > 0$, la v.a.r. $X^\star = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est une variable aléatoire centrée réduite, dite **associée à** X.

Proposition 22.17.— Formules de Huygens —. Soit X, Y des v.a.r. sur (Ω, P). Alors

- $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$
- $\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

Proposition 22.18.— Soit X une v.a.r. sur (Ω, P) et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ un couple de réels. Alors

- $V(aX + b) = a^2\, V(X)$
- $\mathrm{Cov}(aX + b, cY + d) = ac\, \mathrm{Cov}(X, Y)$

Proposition 22.19.— Si X et Y sont indépendantes sur (Ω, P), **alors** $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

Remarque : la réciproque est fausse.

Théorème 22.20.— Variance d'une somme —. Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ des v.a.r. sur (Ω, P). Alors

$$V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$

Si de plus les variables aléatoires $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ sont deux à deux décorrélées, alors

$$\boxed{V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n)}$$

Remarque : en particulier, lorsque $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ sont indépendantes, alors la variance de leur somme est la somme des variances.

Théorème 22.21.— Inégalité de Bienaymé-Tchebychev —. Soit X une v.a.r. sur (Ω, P). Alors

$$\boxed{\forall t > 0, \quad P\big(|X - E(X)| \geqslant t\big) \leqslant \frac{1}{t^2} V(X)}$$

■ Lois finies usuelles

Loi uniforme sur $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

Définition : *Soit X une v.a.r. sur (Ω, P) et $x_1, \ldots, x_n$ des réels deux à deux distincts. On dit que X **suit la loi uniforme** sur $\{x_1, \ldots, x_n\}$ et on note $X \rightsquigarrow \mathscr{U}(\{x_1, \ldots, x_n\})$, si*

$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet \quad X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\} \\ \bullet \quad \forall i \in [\![1, n]\!], \quad P(X = x_i) = 1/n \end{array}}$$

Proposition 22.22.— Si X suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$, alors

$$\boxed{\bullet\ E(X) = \frac{n+1}{2} \qquad\qquad \bullet\ V(X) = \frac{n^2-1}{12}}$$

Loi de Bernoulli

Définition : *Soit X une v.a.r. sur (Ω, P). On dit que X **suit la loi de Bernoulli de paramètre** $p \in [0, 1]$ et on note $X \rightsquigarrow \mathscr{B}(p)$ (ou $X \rightsquigarrow \mathscr{B}(1, p)$), si*

$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet \quad X(\Omega) = \{0, 1\} \\ \bullet \quad P(X = 1) = p \quad \textit{et} \quad P(X = 0) = q = 1 - p \end{array}}$$

Proposition 22.23.— Si X suit la loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$, alors

$$\boxed{\bullet\ E(X) = p \qquad\qquad \bullet\ V(X) = p\,(1-p) = p\,q}$$

Loi binomiale

Définition : *Soit X une v.a.r. sur (Ω, P). On dit que X **suit la loi binomiale** de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$, et on note $X \rightsquigarrow \mathscr{B}(n, p)$, si*

$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet \quad X(\Omega) = [\![0, n]\!] \\ \bullet \quad \forall k \in [\![0, n]\!], \quad P(X = k) = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \dbinom{n}{k} p^k q^{n-k} \end{array}}$$

où $q = 1 - p$.

Proposition 22.24.— Si X suit la loi binomiale de paramètres n et p, alors

$$\boxed{\bullet\ E(X) = n\,p \qquad\qquad \bullet\ V(X) = n\,p\,(1-p) = n\,p\,q}$$

Théorème 22.25.— Soit $X_1, \ldots, X_n$ n variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$. Alors la somme $S = X_1 + \cdots + X_n$ suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$.

Méthodes

Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Méthode 22.1.— Comment déterminer la loi d'une variable aléatoire X

S'il s'agit d'un modèle classique (**méthode 22.13**), on donne directement la loi de X. Sinon, par définition, déterminer la loi de probabilité de X s'effectue en deux étapes :

1 On détermine l'ensemble des valeurs possibles pour X. Comme Ω est fini, il en va de même de $X(\Omega)$:

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2 \ldots, x_n\}$$

2 Pour toute valeur $x_i \in X(\Omega)$, on calcule $p_i = P(X = x_i)$.
Si n est raisonnablement petit, on présente la loi de X sous la forme d'un tableau.

x	x_1	x_2	x_3	x_4	$\cdots$	x_n
$P(X = x)$	p_1	p_2	p_3	p_4	$\cdots$	p_n

On peut être amené à utiliser les liens entre opérations logiques et ensemblistes pour expliciter l'événement $[X = x_i]$ comme une réunion ou une intersection d'événements (**méthode 21.5**, **méthode 21.7**) dont on connaît les probabilités.

Remarque : il est parfois plus facile de calculer la probabilité de $[X \leqslant x_i]$ (ou de $[X > x_i]$) que de $[X = x_i]$. Il faut savoir exprimer $[X = x_i]$ en fonction des $[X \leqslant x_j]$ ou des $[X > x_j]$. Dans le cas particulier où $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, on peut écrire $[X = x_i] = [X \leqslant x_i] \setminus [X \leqslant x_{i-1}] = [X > x_{i-1}] \setminus [X > x_i]$. Il s'ensuit que

$$P(X = x_i) = P(X \leqslant x_i) - P(X \leqslant x_{i-1}) = P(X > x_{i-1}) - P(X > x_i)$$

Mise en œuvre : exercice 22.7

Exemple : on lance deux dés à six faces parfaitement équilibrés. L'univers des possibles est $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$. On s'intéresse à la somme des deux dés. Ceci définit une variable aléatoire

$$S : \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ (i, j) & \mapsto & i + j \end{array}.$$

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

1 On peut visualiser les valeurs possibles pour S à l'aide d'un tableau (ci-contre). L'ensemble des valeurs prises par S est

$$S(\Omega) = [\![2, 12]\!].$$

2 Les événements élémentaires étant équiprobables, Ω est muni de la probabilité uniforme. On en déduit aisément la loi de S.

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(S = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

❑ Méthode 22.2.— Comment déterminer la loi de la transformée $Y = f(X)$

Lorsque la loi de X est présentée sous forme de tableau $(x_i, p_i)_{i\in I}$, on peut indiquer dans le coin supérieur gauche de chaque case la valeur de $f(x_i)$ correspondante. On a alors

- L'ensemble des valeurs possibles pour Y : $Y(\Omega) = \{f(x_i);\ i \in [\![1, n]\!]\}$.
- Pour tout $y \in Y(\Omega)$, $P(Y = y) = \displaystyle\sum_{x\in X(\Omega)|f(x)=y} P(X = x) = \sum_{i\in I|f(x_i)=y} p_i$.

Exemple : reprenons l'exemple précédent et considérons la fonction $f : s \mapsto |7 - s|$. On peut représenter directement la distribution de probabilité de $Y = f(S)$ dans le tableau de probabilité de S comme suit :

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(S = k)$	$5\ \frac{1}{36}$	$4\ \frac{2}{36}$	$3\ \frac{3}{36}$	$2\ \frac{4}{36}$	$1\ \frac{5}{36}$	$0\ \frac{6}{36}$	$1\ \frac{5}{36}$	$2\ \frac{4}{36}$	$3\ \frac{3}{36}$	$4\ \frac{2}{36}$	$5\ \frac{1}{36}$

Finalement, $Y(\Omega) = [\![0, 5]\!]$, et $P(Y = 0) = \frac{6}{36} = \frac{3}{18}, P(Y = 1) = \frac{5}{36} + \frac{5}{36} = \frac{5}{18}, P(Y = 2) = \frac{4}{18}, P(Y = 3) = \frac{3}{18}, P(Y = 4) = \frac{2}{18}, P(Y = 5) = \frac{1}{18}$.

❑ Méthode 22.3.— Comment vérifier la loi de probabilité d'une v.a.r.

Soit X une variable aléatoire. Lorsqu'on demande de vérifier que le n-uplet $(x_i, p_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est la loi de probabilité de X, il suffit de vérifer que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ p_i \geqslant 0,$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Mise en œuvre : exercice 22.1

Exemple d'étude d'une loi de probabilité : la loi hypergéométrique

La loi hypergéométrique est utilisée dans le cas de tirages sans remise, comme dans l'exemple suivant :

Exemple : une urne $\mathcal{U}$ contient N boules blanches ou noires. Il y a une proportion p de boules blanches et une proportion q de boules noires. On prélève n boules de cette urne en un seul tirage. On note X la v.a.r. égale au nombre de boules blanches obtenues. Étudions cette variable aléatoire réelle.

$\boxed{0}$ **Construction du modèle** Soit Ω l'ensemble des parties à n éléments de l'urne $\mathcal{U}$. Comme le tirage se fait au hasard, il y a équiprobabilité des événements élémentaires. Par conséquent, Ω est muni de la probabilité uniforme : $\text{Card}\ (\Omega) = \binom{N}{n}$.

$\boxed{1}$ **Valeurs possibles pour** X Comme on prélève n boules de l'urne, l'ensemble des valeurs possibles pour X est compris entre 0 (on n'a prélevé que des boules noires) et n (on n'a prélevé que des boules blanches). Ainsi $X(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$.

$\boxed{2}$ **Loi de probabilité de** X Soit $k \in [\![0, n]\!]$ fixé. Le nombre de parties à n éléments de $\mathcal{U}$ constituées exactement de k boules blanches est $\binom{Np}{k} \times \binom{Nq}{n-k}$. D'où $P(X = k) = \dfrac{\binom{Np}{k} \times \binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}}$.

■ Couple de variables aléatoires

Loi conjointe de X et Y

❑ Méthode 22.4.— Comment déterminer la loi conjointe de X et Y

1 On détermine les ensembles de valeurs possibles $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$.

2 Pour tout $(x_i, y_j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, on calcule la probabilité $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$.

Lorsque l'ensemble des valeurs possibles pour le couple est de taille raisonnable, on pourra présenter la loi conjointe de (X, Y) sous la forme d'un tableau.

$Y \backslash X$	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{n1}
$\vdots$				$\vdots$
y_m	p_{1m}	p_{2m}	$\cdots$	p_{nm}

Exemple : une urne contient une boule blanche, une verte et deux boules rouges. On extrait successivement les quatre boules de l'urne. On note X le rang d'apparition de la boule blanche et Y le rang d'apparition de la deuxième boule rouge. On représente la loi conjointe de X et Y sous la forme d'un tableau :

Ω est l'ensemble des anagrammes du mot $RRBV$. Comme les événements élémentaires sont équiprobables, Ω est muni de la probabilité uniforme. Card $\Omega = \dfrac{4!}{2!} = 12$. On en déduit aisément le tableau ci-contre.

$Y \backslash X$	1	2	3	4
2	0	0	1/12	1/12
3	1/12	1/12	0	1/6
4	1/6	1/6	1/6	0

Mise en œuvre : exercice 22.6

Remarque : l'énoncé fournit les valeurs possibles $\{x_i\}$, $\{y_j\}$ pour X et pour Y, ainsi que les probabilités $p_{i,j} = P(X = x_i, Y = y_j)$. Lorsqu'on demande de vérifier la loi du couple (X, Y), il s'agit de s'assurer que les $p_{i,j}$ sont positifs et que la somme double $\sum\limits_{(i,j) \in I \times J} p_{i,j}$ est égale à 1.

Lois marginales

Lorsque la loi conjointe de X et Y est donnée sous forme de tableau, il s'agit simplement de calculer les sommes en lignes et en colonnes.

Exemple : reprenons l'exemple précédent, nous déduisons de la loi conjointe de X et de Y les lois marginales de X et Y :

$Y \backslash X$	1	2	3	4	total
2	0	0	1/12	1/12	1/6
3	1/12	1/12	0	1/6	1/3
4	1/6	1/6	1/6	0	1/2
total	1/4	1/4	1/4	1/4	

Loi marginale de X

x_i	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	1/4	1/4	1/4	1/4

Loi marginale de Y

y_j	2	3	4
$P(Y = y_j)$	1/6	1/3	1/2

Variables aléatoires indépendantes

❑ Méthode 22.5.— Comment montrer que deux v.a.r. sont indépendantes
Pour montrer que X et Y sont indépendantes pour la probabilité P, on vérifie que

$$\text{Pour tout } (x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega),\ P(X=x, Y=y) = P(X=x) \times P(Y=y)$$

Autrement dit que pour tout $(i,j) \in I \times J$, $p_{ij} = p_{i\bullet} \times p_{\bullet j}$.

Remarque : pour que X et Y ne soient pas indépendantes, il suffit que $\mathrm{Cov}(X,Y) \neq 0$.

Mise en œuvre : exercice 22.14

Transformées d'un couple de v.a.r.

Soit (X,Y) un couple de v.a.r. sur l'espace probabilisé (Ω, P) et $g : X(\Omega) \times Y(\Omega) \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur l'ensemble des valeurs possibles pour le couple (X,Y). On définit une nouvelle variable aléatoire $Z = g(X,Y) : \Omega \to \mathbb{R}$ de la façon suivante $\omega \mapsto g\big(X(\omega), Y(\omega)\big)$.

❑ Méthode 22.6.— Comment déterminer la loi d'une transformée d'une couple
Lorsque la loi conjointe de (X,Y) est donnée sous forme de tableau $(p_{ij})_{(i,j)\in I\times J}$, on peut indiquer dans le coin supérieur gauche de chaque case la valeur de $g(x_i, y_j)$ correspondante. On a alors

- $Z(\Omega) = \{g(x_i, y_j)\ ;\ (i,j) \in I \times J\}$.
- $\forall z \in Z(\Omega), P(Z=z) = \displaystyle\sum_{\substack{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)\\ g(x,y)=z}} P(X=x, Y=y) = \sum_{\substack{(i,j)\in I\times J\\ g(x_i,y_j)=z}} p_{ij}$

Exemple : considérons par exemple la variable aléatoire Z correspondant au temps d'attente entre l'apparition de la première boule blanche et de la deuxième boule rouge dans l'expérience précédente : $Z = |X - Y|$. Pour déterminer la loi de Z, on indique dans le coin supérieur gauche de chaque case la valeur correspondante de g.

$Y \backslash X$	1	2	3	4
2	$^{1}0$	$^{0}0$	$^{1}\frac{1}{12}$	$^{2}\frac{1}{12}$
3	$^{2}\frac{1}{12}$	$^{1}\frac{1}{12}$	$^{0}0$	$^{1}\frac{1}{6}$
4	$^{3}\frac{1}{6}$	$^{2}\frac{1}{6}$	$^{1}\frac{1}{6}$	$^{0}0$

- L'ensemble des valeurs possibles pour Z est $Z(\Omega) = \{0,1,2,3\}$
- La distribution de probabilité de Z est donnée par

$$P(Z=0) = 0$$
$$P(Z=1) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$
$$P(Z=2) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$
$$P(Z=3) = \frac{1}{6}$$

Méthodes

En particulier, lorsque $g(x,y) = x + y$, on obtient :

❑ Méthode 22.7.— Comment déterminer la loi de la somme de deux v.a.r.
Soit X, Y deux v.a.r. à valeurs entières, alors $S = X + Y$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et

$$\forall n \in S(\Omega), \quad P(S = n) = \sum_{k=0}^{n} P\big([X = k] \cap [Y = n - k]\big)$$

Si de plus X et Y sont **indépendantes**, alors

$$\forall n \in S(\Omega), \quad P(S = n) = \sum_{k=0}^{n} P[X = k] \times P[Y = n - k]$$

On détermine la loi du minimum ou du maximum de deux v.a.r. en deux temps.

❑ Méthode 22.8.— Comment déterminer la loi du minimum de deux v.a.r.
Si X et Y sont deux var à valeurs entières, alors $Z = \min(X, Y)$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$.

- Pour tout $n \in Z(\Omega)$, on a $[Z > n] = [X > n] \cap [Y > n]$.
- Pour tout $n \in Z(\Omega)$, on a $P(Z = n) = P(Z > n - 1) - P(Z > n)$

❑ Méthode 22.9.— Comment déterminer la loi du maximum de deux v.a.r.
Si X et Y sont deux var à valeurs entières, alors $Z = \max(X, Y)$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$.

- Pour tout $n \in Z(\Omega)$, on a $[Z \leqslant n] = [X \leqslant n] \cap [Y \leqslant n]$.
- Pour tout $n \in Z(\Omega)$, on a $P(Z = n) = P(Z \leqslant n) - P(Z \leqslant n - 1)$

Exemple : on tire au hasard deux boules successivement et sans remise, d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On appelle Z la variable aléatoire égale au plus grand des deux nombres obtenus. Déterminons pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ la probabilité $P(Z \leqslant k)$, pour en déduire finalement la loi de Z.

$\boxed{0}$ Les tirages ayant lieu successivement et sans remise, Ω est l'ensemble des couples d'éléments distincts de $[\![1, n]\!]$. Comme le tirage se fait au hasard, Ω est muni de la probabilité uniforme, Card $(\Omega) = n(n - 1)$.

$\boxed{1}$ On convient de noter X le premier numéro obtenu et Y le deuxième, de sorte que $Z = \max(X, Y)$. On a $Z(\Omega) = [\![1, n]\!]$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $[Z \leqslant k] = [X \leqslant k] \cap [Y \leqslant k]$ correspond au tirage de deux boules numérotées de 1 à k. Par conséquent Card $[Z \leqslant k] = k(k - 1)$. Ainsi

$$P(Z \leqslant k) = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$$

$\boxed{2}$ Comme $[Z \leqslant k] = [Z = k] \cup [Z \leqslant k - 1]$, l'additivité de la probabilité entraîne que

$$P(Z = k) = P(Z \leqslant k) - P(Z \leqslant k - 1) = \frac{k(k-1)}{n(n-1)} - \frac{(k-2)(k-1)}{n(n-1)} = \frac{2(k-1)}{n(n-1)}.$$

■ Espérance, variance, covariance

Espérance d'une variable aléatoire

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire. À chaque événement élémentaire $\omega \in \Omega$, correspond une valeur $X(\omega)$. Par définition, $E(X)$ est la valeur moyenne de X en tenant compte de la distribution des valeurs de X (chaque valeur x_i étant pondérée par la probabilité p_i d'être réalisée).

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \; p_i = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) X(\omega).$$

Exemple : lorsqu'on lance deux dés à six faces, parfaitement équilibrés, la somme des deux dés est une variable aléatoire (voir p. 656) pour la loi de S) d'espérance

$$E(S) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, p_i = 2\cdot\frac{1}{36}+3\cdot\frac{2}{36}+4\cdot\frac{3}{36}+5\cdot\frac{4}{36}+6\cdot\frac{5}{36}+7\cdot\frac{6}{36}+8\cdot\frac{5}{36}+9\cdot\frac{4}{36}+10\cdot\frac{3}{36}+11\cdot\frac{2}{36}+12\cdot\frac{1}{36} = 7.$$

❑ **Méthode 22.10.— Comment calculer l'espérance d'une variable aléatoire**

- Lorsque X suit une loi classique, on connaît son espérance !
- Lorsque la loi $(x_i, p_i)_{i \in I}$ de X est connue, on calcule $E(X)$ directement à partir de la définition : $$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \; p_i$$
- Lorsque X est obtenue par opérations algébriques à partir d'autres variables on peut utiliser les propriétés de l'espérance :
  - $E(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) = \lambda_1 E(X_1) + \lambda_2 E(X_2)$ pour tout couple $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$;
  - $E(X_1 \times X_2) = E(X_1) \times E(X_2)$ si X_1 et X_2 sont indépendantes.
- Lorsque X est obtenue par transformation d'une autre variable, $X = g(Y)$, le **théorème de transfert** est incontournable dans la plupart des cas, puisqu'il permet de faire l'économie du calcul de la loi de X, celle de Y suffit.
$$E(X) = E\big(g(Y)\big) = \sum_{j \in J} g(y_j) \; P\big(Y = y_j\big)$$

Mise en œuvre : exercice 22.2, exercice 22.3, exercice 22.6.

Variance d'une variable aléatoire

Si l'espérance est une mesure de position qui indique la valeur moyenne d'une variable aléatoire, la variance mesure quant à elle la dispersion des valeurs de X autour de leur moyenne. En effet, $V(X) = E\big(\big[X - E(X)\big]^2\big)$ est la valeur moyenne de la distance au carré entre X et sa moyenne.

Méthode 22.11.— Comment calculer la variance d'une variable aléatoire

- Lorsque X suit une loi classique, on connaît sa variance !
- Si la loi de probabilité de X est connue, on calcule $E(X)$ et $E(X^2)$, puis on conclut à l'aide de la **formule de Huygens** $V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$.
- On peut aussi utiliser les propriétés de la variance, notamment :
  - $V(aX_1 + b) = a^2 V(X_1)$
  - Si $(X_1, \ldots, X_n)$ sont décorrélées (c'est le cas notamment lorsqu'elles sont indépendantes), alors $V(X_1 + \cdots + X_n) = V(X_1) + \cdots + V(X_n)$.

Exemple : Espérance et variance d'une v.a.r. de loi hypergéométrique

Soit X une variable aléatoire suivant la loi hypergéométrique $X \rightsquigarrow \mathscr{H}(N, n, p)$.

$$\bullet\ E(X) = \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{k=0}^{n} k\binom{Np}{k}\binom{Nq}{n-k} = \frac{Np}{\binom{N}{n}} \sum_{k=1}^{n} \binom{Np-1}{k-1}\binom{Nq}{n-k} = \frac{Np}{\binom{N}{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{Np-1}{k}\binom{Nq}{n-1-k}$$
$$= \frac{Np}{\binom{N}{n}} \binom{N-1}{n-1} = Np\frac{n}{N} = np.$$

$$\bullet\ E(X^2) = \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{Np}{k}\binom{Nq}{n-k} = \frac{Np}{\binom{N}{n}} \left(\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{Np}{k}\binom{Nq}{n-k} + \sum_{k=1}^{n} k\binom{Np}{k}\binom{Nq}{n-k}\right)$$
$$= np + \frac{Np(Np-1)}{\binom{N}{n}} \sum_{k=2}^{n} \binom{Np-2}{k-2}\binom{Nq}{n-k} = np + \frac{Np(Np-1)}{\binom{N}{n}} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{Np-2}{k}\binom{Nq}{n-2-k}$$
$$= np + Np(Np-1)\frac{\binom{N-2}{n-2}}{\binom{N}{n}} = np + Np(Np-1)\frac{n(n-1)}{N(N-1)}.$$

D'où l'on tire, grâce à la **formule de Huygens**

$$\bullet\ V(X) = \frac{1}{N-1}\big(np(N-1) + np(n-1)(Np-1) - n^2p^2(N-1)\big)$$
$$= \frac{np}{N-1}\big(N - 1 + (n-1)(Np-1) - np(N-1)\big) = \frac{np}{N-1}\big(N - n - Np + np\big)$$
$$= npq\frac{N-n}{N-1}.$$

Ainsi, $E(X) = np$ et $V(X) = npq\dfrac{N-n}{N-1}$.

Mise en œuvre : exercice 22.3, exercice 22.6, exercice 22.14.

Utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Exemple : on effectue une suite de lancers d'un dé à six faces. Quel nombre de lancers suffit-il pour pouvoir affirmer avec un risque d'erreur inférieur à 5%, que la fréquence d'apparition du 6 est comprise entre $\frac{1}{6} - 0,01$ et $\frac{1}{6} + 0,01$? Notons X_n le nombre de 6 apparus au cours des n premiers lancers. Comme les lancers sont indépendants et que la probabilité à chaque lancer d'un succès vaut $1/6$, $X_n \rightsquigarrow \mathcal{B}(n, 1/6)$.

D'autre part, la fréquence d'apparition du 6 au cours des n premiers lancers est donnée par la variable aléatoire $\dfrac{X_n}{n}$. La question revient donc à trouver n de sorte que $P\big(\left|\frac{X_n}{n} - \frac{1}{6}\right| \geqslant 0,01\big) \leqslant 0,05$.

D'après l'inégalité de **Bienaymé-Tchebychev**, nous avons pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$P\left(\left|\frac{X_n}{n} - \frac{1}{6}\right| \geqslant 0,01\right) \leqslant \frac{V(X_n/n)}{0,01^2} \leqslant 10^4\,\frac{npq}{n^2} \leqslant \frac{5.10^4}{36\,n}.$$

Il suffit donc que $\dfrac{5.10^4}{36\,n} \leqslant 0,05$, i.e. $n \geqslant 27778$.

Covariance d'un couple de variables aléatoires

> ❑ **Méthode 22.12.— Comment calculer la covariance d'un couple**
>
> - On calcule $E(X)$, $E(Y)$ et $E(XY)$ puis on conclut à l'aide de la **formule de Huygens** $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$
> - Lorsque X et Y sont indépendantes pour P, elles sont décorrélées : $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$.

Mise en œuvre : exercice 22.14,

■ Lois finies usuelles

Comment reconnaître le bon modèle

> ❑ **Méthode 22.13.— Comment reconnaître le bon modèle**
>
> Pour savoir quelle loi de probabilité usuelle suit une variable aléatoire réelle, vous devez connaître un exemple typique de chaque modèle, comme ceux présentés dans les prochains paragraphes. Pour vous y retrouver, voici un organigramme des différentes lois usuelles.
>
> - le modèle équiprobable : **loi uniforme** ;
> - loi des tirages sans remise : **loi hypergéométrique** ;
> - le schéma succès-échec : **loi de Bernoulli** ;
> - le nombre de succès en n tentatives indépendantes : **loi binomiale**.

Reconnaître une loi uniforme

Modèle : le modèle équiprobable
Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une v.a.r. sur Ω vérifiant :

$$X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\} \text{ et les événements } [X = x_1], \ldots, [X = x_n] \text{ sont équiprobables.}$$

Exemple : on choisit au hasard un nombre entier entre 1 et 10. On note X la variable aléatoire égale au nombre obtenu. $X \rightsquigarrow \mathscr{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.

Reconnaître une loi hypergéométrique

La loi hypergéométrique est fréquente dans les exercices. Il est conseillé de bien connaître ce modèle.

Définition : *Soit N et n des entiers et $p \in [0,1]$ tels que $0 \leqslant n \leqslant N$ et $Np \in \mathbb{N}$. Soit X une v.a.r. sur (Ω, P). On dit que X* ***suit la loi hypergéométrique*** *de paramètres N, n et p et on note $X \rightsquigarrow \mathscr{H}(N, n, p)$ si*

$$X(\Omega) \subset \llbracket 0, n \rrbracket \text{ et pour tout } k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad P[X = k] = \frac{\binom{Np}{k} \times \binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \text{ où } q = 1 - p$$

Modèle : tirage sans remise

Une population E est constituée de N éléments répartis en deux catégories : les bons A, et les méchants B en proportions données. On sélectionne au hasard un échantillon de population comprenant n éléments de E. On note X la variable aléatoire égale au nombre de bons éléments sélectionnés.

Exemple : une urne $\mathcal{U}$ contient N boules blanches ou noires. Il y a une proportion p de boules blanches et une proportion q de boules noires. On prélève n boules de cette urne en un seul tirage. On note X la v.a.r. égale au nombre de boules blanches obtenues, alors $X \rightsquigarrow \mathscr{H}(N, n, p)$

Reconnaître une loi de Bernoulli

Modèle : schéma succès-échec

On considère une expérience aléatoire e qui a deux issues : le succès S ou l'échec E. On suppose que la probabilité que S se réalise est p. On associe à cette expérience la v.a.r. X définie par

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & si\ \omega \in S \\ 0 & si\ \omega \notin S \end{cases}$$

Exemple : soit $p \in [0, 1]$. On effectue un lancer d'une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir « *Pile* » est p, et la probabilité d'obtenir « *Face* » est $q = 1 - p$. On note X la variable aléatoire réelle définie par $X(Pile) = 1$ et $X(Face) = 0$. Alors $X \rightsquigarrow \mathscr{B}(p)$

Reconnaître une loi binomiale

Modèle : nombre de succès en n tentatives

On considère une expérience aléatoire e qui a deux issues : le succès S ou l'échec E. On suppose que la probabilité que S se réalise est p. On répète n fois dans les mêmes conditions et de façon ***indépendante*** *les unes des autres, l'expérience e. On note X la v.a.r. égale au* ***nombre de succès obtenus en n tentatives.***

Exemple : on effectue n lancers indépendants les uns des autres d'une pièce de monnaie pour laquelle la probabilité d'obtenir *Pile* est $p \in]0, 1[$. On note X le nombre de *Pile* obtenus. Alors X suit la loi binomiale $X \rightsquigarrow \mathscr{B}(n, p)$.

Tableau récapitulatif des lois finies usuelles

Nom de la loi	Paramètres	Loi de probabilité	Espérance, variance
Loi uniforme $X \rightsquigarrow \mathscr{U}([\![1, n]\!])$	• $n \in \mathbb{N}^\star$	• $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$ • $P([X = k]) = 1/n$	• $E(X) = \frac{n+1}{2}$ • $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$
Loi de Bernoulli $X \rightsquigarrow \mathscr{B}(p)$	• $p \in [0, 1]$ • $q = 1 - p$	• $X(\Omega) = \{0, 1\}$ • $P[X = 1] = p$ • $P[X = 0] = q$	• $E(X) = p$ • $V(X) = p\,q$
Loi hypergéométrique $X \rightsquigarrow \mathscr{H}(N, n, p)$	• $N, n \in \mathbb{N}^\star$, • $p \in [0, 1]$ • $0 < n \leqslant N$ • $N\,p \in \mathbb{N}$ • $q = 1 - p$	• $X(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$ • $P[X = k] = \frac{\binom{Np}{k} \times \binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	• $E(X) = np$ • $V(X) = npq\,\frac{N-n}{N-1}$
Loi binomiale $X \rightsquigarrow \mathscr{B}(n, p)$	• $n \in \mathbb{N}^\star$, • $p \in [0, 1]$ • $q = 1 - p$	• $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ • $P[X = k] = \binom{n}{k}\,p^k\,q^{n-k}$	• $E(X) = np$ • $V(X) = npq$

Vrai/Faux

Soit X, Y des variables aléatoires sur un espace probabilisé fini $\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$.

	Vrai	Faux
1. Si $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$, alors $E\big(\ln(X)\big) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k) P(X = k)$	☐	☐
2. $E(X^2) \geqslant E(X)^2$	☐	☐
3. Si $X \rightsquigarrow \mathscr{U}([\![1, n]\!])$, alors $2X \rightsquigarrow \mathscr{U}([\![2, 2n]\!])$	☐	☐
4. $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $V(aX + b) = aV(X) + b$	☐	☐
5. $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $V(X + a) = V(b - X)$	☐	☐
6. Si $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$, alors X et Y sont indépendantes	☐	☐
7. Si X et Y sont indépendantes, alors X et $X + Y$ aussi.	☐	☐
8. Si $X \rightsquigarrow \mathscr{B}(n, p)$, alors $P(X = 0) = (1 - p)^n$	☐	☐
9. Si $V(X) = 0$ alors X est presque sûrement égale à sa moyenne, *i.e.* $P\big(X = E(X)\big) = 1$	☐	☐
10. Si X et Y sont indépendantes, la connaissance des lois marginales suffit pour connaître la loi conjointe.	☐	☐

Énoncé des exercices

Loi de probabilité, espérance et variance d'une variable aléatoire

Exercice 22.1 : Soit X une v.a.r. suivant une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^\star$ et $p \in]0,1[$.
1. On définit une nouvelle variable aléatoire $Y = \frac{1}{1+X}$. Calculer $E(Y)$.
2. On suppose que $p = \frac{1}{2}$ et que $a > 0$. Calculer l'espérance de $Z = \frac{a^X}{2n}$.

Exercice 22.2 : Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, $a \in \mathbb{R}$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0;n]\!]$ telle que $\forall k \in [\![0,n]\!],\ P(X=k) = \frac{a}{k+1}\binom{n}{k}$. Déterminer a, puis calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 22.3 : On lance simultanément deux dés à 6 faces. On appelle Z la variable aléatoire égale à la valeur absolue de la différence des numéros obtenus.
1. Déterminer la loi de probabilité de Z.
2. Calculer l'espérance et la variance de Z.

Exercice 22.4 : Une urne est composée de n boules numérotées de 1 à n. On effectue des tirages successifs et avec remise dans cette urne. On note $b_1, \dots b_k, \dots$ les numéros des boules prélevées. Les tirages s'arrêtent dès que $b_k \geqslant b_{k-1}$. Soit X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.
1. Déterminer l'ensemble des valeurs possibles pour X_n.
2. Déterminer la loi de probabilité de X_n.
3. Calculer l'espérance de X_n. Puis $\lim\limits_{n \to +\infty} E(X_n)$.

Exercice 22.5 : Temps d'attente
Une urne contient $n \in \mathbb{N}^\star$ boules numérotées de 1 à n. On retire l'une après l'autre toutes les boules de cette urne.
1. Quelle est la probabilité pour que les boules 1,2, 3 sortent consécutivement et dans cet ordre ?
2. Calculer la probabilité que les boules 1, 2, 3 sortent dans cet ordre (consécutivement ou pas) ?
3. On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir les boules 1, 2 et 3. Déterminer la loi de X_n ainsi que son espérance.

Couple de variables aléatoires

Exercice 22.6 : On considère le couple aléatoire (X,Y) de loi conjointe définie par la table ci-après.
1. Vérifier la loi de (X,Y).
2. Déterminer les lois marginales de X et Y. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Calculer l'espérance et la variance de X et Y.
4. Soit $U = X \times Y$ Déterminer la loi de U.
5. Soit $V = \min(X,Y)$. Déterminer la loi de V.
6. Former la table de la loi conjointe de U et V.

$X \backslash Y$	0	1	2	3
1	0,1	0,2	0,1	0,1
2	0,1	0	0	0,1
3	0,1	0	0,2	0

Exercice 22.7* : Une urne contient N boules numérotées de 1 à N.
1. On prélève successivement et avec remise n boules de l'urne.
Soit X et Y les variables aléatoires égales au plus petit et au plus grand numéro obtenus.
a. Pour $x \in [\![1,N]\!]$, calculer $P(X \geqslant x)$ et en déduire la loi de X.

b. Pour $y \in [\![1, N]\!]$, calculer $P(Y \leqslant y)$ et en déduire la loi de Y.

c. Pour $(x, y) \in [\![1, N]\!]^2$, calculer $P([X > x] \cap [Y \leqslant y])$ et en déduire la loi du couple (X, Y).

2. Mêmes questions lorsque les tirages ont lieu simultanément et sans remise.

■ Lois usuelles

Exercice 22.8 : Dans une ville, une proportion p de la population est atteinte par un virus contagieux. Si une personne saine est en contact avec une personne contaminée, il y a 2 chances sur 3 qu'elle soit elle-même contaminée.
Un représentant de commerce (en parfaite santé) décide de rendre visite à n habitants de cette ville.

1. Soit N la variable aléatoire égale au nombre de malades rencontrés par le représentant. Quelle est la loi de N ?

2. Quelle est la probabilité que le représentant soit contaminé à l'issue de sa tournée ?

Exercice 22.9 : Une urne contient $2n$ boules : n blanches et n noires. On pioche au hasard et simultanément n boules. On appelle X la variable aléatoire qui associe à chaque tirage le nombre de boules blanches obtenues.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.

2. Déterminer l'espérance et la variance de X.

Exercice 22.10 : On se propose d'analyser le sang d'une population de N individus pour déceler la présence éventuelle (résultat du test positif) d'un virus dont on sait qu'il affecte une personne donnée avec la probabilité p. On dispose pour cela de deux méthodes :

- **Méthode 1** On analyse le sang de chacune des N personnes.
- **Méthode 2** On regroupe la population en g groupes de n individus. On collecte le sang des n individus de chaque groupe dans une même éprouvette. Si le résultat d'un groupe est positif, on procède alors à une analyse individuelle de ses membres.

1. Quelle est la loi de la variable X égale au nombre de groupes positifs ?

2. Soit Y la variable égale au nombre d'analyses dans la deuxième méthode. Calculer $E(Y)$ en fonction de N, n, p.

3. Comparer les deux méthodes lorsque $N = 1000, n = 100$ et $p = 0,01$.

Exercice 22.11 : Le service après-vente d'un hypermarché spécialisé dans la vente de matériel informatique dispose d'équipes intervenant sur appel de la clientèle. Les interventions ont parfois lieu avec du retard. On admet que les appels ont lieu indépendamment les uns des autres et que pour chaque appel, la probabilité d'un retard est de $0,25$.

1. Un client appelle le service à huit reprises. On désigne par X le nombre de fois où ce client a dû subir un retard.

a. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X.

b. Calculer la probabilité de l'événement «le client a subi au moins un retard».

c. Calculer la probabilité de l'événement «le client a subi moins de quatre retards».

d. Calculer la probabilité de l'événement «le client a subi moins de quatre retards sachant qu'il en a subi au moins un».

2. On considère un groupe de huit clients différents. Deux d'entre eux sont mécontents parce qu'ils ont dû subir un retard à la suite de leur appel. On contacte, au hasard quatre personnes parmi ces huit. On appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de clients mécontents parmi les quatre contactés.

a. Quelle loi de probabilité Y suit-elle ?

b. Quelle est l'espérance mathématique de Y ?

■ Suites de variables aléatoires

Exercice 22.12 : Marche aléatoire sur une droite —. Soit $p \in [0,1]$. Une puce se déplace aléatoirement sur une droite d'origine 0. À chaque instant, elle fait un bond d'une unité vers la droite ou d'une unité vers la gauche avec les probabilités respectives p et $q = 1 - p$. À l'instant initial, la puce est à l'origine. Étant donné $n \in \mathbb{N}^\star$, on note X_n l'abscisse de la puce à l'instant n. Déterminer la loi de X_n, son espérance et sa variance.

Exercice 22.13* : Un secrétaire effectue n appels téléphoniques vers n personnes (n est un entier supérieur à 2). Ces appels sont indépendants les uns des autres et pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est de $p \in]0,1[$. On note $q = 1 - p$ et X désigne la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus.

1. Quelle est la loi de X ? Donner $E(X)$ et $V(X)$.

2. Après ses n recherches, le secrétaire demande une deuxième fois, et dans les mêmes conditions chacun des $n - k$ correspondants qu'il n'a pas réussi à joindre la première fois. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus dans cette deuxième série d'appels. On note $Z = X + Y$ le nombre de correspondants obtenus.

a. Pour $k \in [\![0,n]\!]$ et $\ell \in [\![0,n-k]\!]$, calculer la probabilité conditionnelle $P(Y = \ell \mid X = k)$.

b. Déterminer la loi de Z.

Exercice 22.14* : Une urne contient n jetons ($n \geqslant 2$) numérotés de 1 à n. On prélève une poignée aléatoire de jetons. On note N et S les variables aléatoires égales respectivement au nombre de jetons prélevés et à la somme des points des jetons de la poignée. Si la poignée est vide, on aura $N = S = 0$.

1. On suppose dans cette question que toutes les poignées possibles sont équiprobables.

a. Déterminer la loi de N et son espérance.

b. Pour $i \in [\![1,n]\!]$, on note X_i la variable de Bernoulli qui vaut 1 si la poignée contient le jeton i et 0 sinon. Quel est le paramètre de X_i ?

c. Remarquer que $S = \sum_{i=1}^{n} iX_i$. En déduire $E(S)$.

d. Montrer que les variables X_i sont mutuellement indépendantes. En déduire $V(S)$.

2. On suppose dans cette question que N suit la loi uniforme sur $[\![0,n]\!]$, c'est-à-dire que les tailles des poignées sont équiprobables.

a. Quelle est l'espérance de N ?

b. Avec les notations de **1**, calculer pour tout $k \in [\![0,n]\!]$ la probabilité conditionnelle $P(X_i = 1 \mid N = k)$. En déduire le paramètre de la variable X_i.

c. Les variables X_i sont-elles mutuellement indépendantes ? Que vaut $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$?

3. On suppose que $n = 3$. Déterminer la loi de S dans le premier et le second cas.

Exercice 22.15* : Nombre moyen de retours à l'origine

Une puce se déplace aléatoirement sur une droite d'origine 0. À chaque instant, elle fait un bond d'une unité vers la droite ou d'une unité vers la gauche de façon équiprobable.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\binom{2k}{k}}{4^k} = \frac{2n+1}{4^n}\binom{2n}{n} - 1$.

2. Soit $k \in \mathbb{N}^\star$. Calculer la probabilité que la puce soit à l'origine à l'instant $2k$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On note N_n la variable aléatoire égale au nombre de passages à l'origine entre l'instant 0 et l'instant n. Calculer l'espérance de N_n et donner un équivalent de N_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Indications

Ex. 22.2

Pour le calcul de l'espérance et de la variance de X, on pourra plutôt calculer $E(X+1)$ et $E(X(X+1))$.

Ex. 22.4

2. *On pourra commencer par calculer pour tout $k \in X(\Omega)$, $P(X_n > k)$.*

Ex. 22.5

Pour déterminer la probabilité de l'événement A « les boules 1,2,3 sortent consécutivement et dans cet ordre » on sera amené à dénombrer A.

Ex. 22.6

*On applique les méthodes classiques (***méthode 22.6***).*

Ex. 22.12

Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on pourra noter S_k la variable de Bernoulli qui prend la valeur 1 si le $k^{ième}$ saut a lieu vers la droite.

Ex. 22.15

2. *La position X_{2k} de la puce à l'instant $2k$ est une variable aléatoire étudiée dans l'***exercice 22.12**.

3. *Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on pourra noter R_i la variable de Bernoulli qui prend la valeur 1 si la puce est à l'origine à l'instant i.*

Corrigé des vrai/faux

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
V	V	F	F	V	F	F	V	V	V

1. Comme $X(\Omega) \subset \mathbb{R}^{+\star}$, la transformée $Y = \ln(X)$ est bien définie. Pour calculer son espérance, on peut appliquer la **formule de transfert** qui donne le résultat.
2. La variance de X est un réel positif. Or, d'après la **formule de Huygens** $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$. Par conséquent, on a bien $E(X^2) \geqslant E(X)^2$.
3. Si $X \rightsquigarrow \mathscr{U}([\![1, n]\!])$, alors $2X$ ne prend que des valeurs paires $(2X)(\Omega) = \{2, 4, \ldots, 2n\}$, tandis qu'une loi uniforme sur $[\![2, 2n]\!]$ prend toutes les valeurs entières entre 2 et $2n$.
4. D'après les propriétés de la variance (**théorème 22.18**), $V(aX + b) = a^2 V(X)$. En particulier, $V(aX + b) \neq aV(X) + b$ lorsque $V(X) \neq 0, b \neq 0, a \neq 1$.
5. En vertu du même théorème, on a $V(X + a) = V(X) = V(b - X)$.
6. Lorsque X et Y sont indépendantes, alors $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ mais la réciproque est fausse comme l'illustre le contre-exemple suivant :
Supposons que (X, Y) ait pour loi conjointe :

Y \ X	0	1	2	total
0	1/30	11/30	1/30	13/30
1	6/30	5/30	6/30	17/30
total	7/30	16/30	7/30	1

- X et Y ne sont pas indépendantes car $P^{X,Y}(0, 0) = \dfrac{1}{30}$ et $P^X(0) \times P^Y(0) = \dfrac{91}{30^2}$
- $E(X) = 1$, $E(Y) = \dfrac{17}{30}$, $E(X \times Y) = \dfrac{17}{30}$
  $E(X \times Y) = 1 \times \dfrac{5}{30} + 2 \times \dfrac{6}{30} = \dfrac{17}{30}$.

Finalement, la **formule de Huygens** donne $\mathrm{Cov}(X, Y) = E(X \times Y) - E(X) \times E(Y) = 0$.
7. Supposons par exemple que X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi uniforme sur $\{0, 1\}$:

$$P(X = 0) = P(X = 1) = P(Y = 0) = P(Y = 1) = \frac{1}{2}$$

On a $[X+Y = 0] = [X = 0] \cap [Y = 0]$ et par conséquent $P(X+Y = 0) = \dfrac{1}{4}$. On a alors $P([X+Y = 0] \cap [X = 1]) = 0$ car cet événement est impossible, tandis que $P(X + Y = 0) \times P(X = 1) = \dfrac{1}{8}$.
8. Cela provient directement de la loi de probabilité de X.
9. Cette propriété montre que la variance mesure l'écart à la moyenne ! Pour la montrer, notons $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ et $m = E(X)$. D'après la **formule de transfert**, on a

$$V(X) = E\big((X - m)^2\big) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2 P(X = x_i)$$

L'hypothèse $V(X) = 0$ se traduit donc par $\forall i \in [\![1, n]\!], x_i \neq m \Rightarrow P(X = x_i) = 0$.
On en déduit alors que $P(X \neq m) = \sum\limits_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ x_i \neq m}} P(X = x_i) = 0$. Passant à l'événement contraire, on obtient $P(X = m) = 1$.
10. En effet, si X et Y sont indépendantes, on a pour tout $(i, j) \in I \times J$, $p_{ij} = p_{i\bullet}\, p_{\bullet j}$

Corrigé des exercices

Exercice 22.1

On suppose que X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$. Ainsi

- $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$
- $\forall k \in [\![0,n]\!],\ P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

Pour calculer l'espérance de Y et Z, on applique la **formule de transfert**.

1. On a $E(Y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+k}\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$, où $q = 1-p$. Pour expliciter cette somme, introduisons la fonction $x \mapsto f(x) = (x+q)^n$ et sa primitive qui s'annule en 0, notée F. D'après la **formule du binôme**

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k q^{n-k} \\ F(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} x^{k+1} q^{n-k} = \frac{1}{n+1}\left[(x+q)^{n+1} - q^{n+1}\right] \end{aligned}$$

d'où l'on tire $E(Y) = \dfrac{1}{p}\ F(p) = \dfrac{1}{n+1}\ \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

2. Soit $g : x \mapsto \dfrac{1}{2n} a^x$. D'après la **formule de transfert**

$$E(Z) = \sum_{k=0}^{n} g(k) P(X=k) = \frac{1}{n2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k = \frac{1}{2n}\left(\frac{1+a}{2}\right)^n$$

▲

Exercice 22.2

[1] Pour déterminer la valeur de a, on exploite la relation $1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(X=k)$. ✐ **Méthode 22.3**

Pour calculer cette somme, introduisons la fonction $f : x \mapsto f(x) = (1+x)^n$ et sa primitive qui s'annule en 0, F. D'après la **formule du binôme de Newton**,

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} x^{k+1} = \frac{1}{n+1}\left[(1+x)^{n+1} - 1\right]$$

On a alors $1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(X=k) = a \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} = a\ F(1) = a\ \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

Finalement, il s'ensuit que $a = \dfrac{n+1}{2^{n+1}-1}$.

[2] Par définition, $E(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} kP(X=k)$. Étant donné l'expression de la loi de X, il sera préférable ici de calculer plutôt $E(X+1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k+1)P(X=k)$. ✐ *Astuce à retenir !*

À l'aide de la **formule de transfert**, on obtient aisément

$$E(X+1) = \sum_{k=0}^{n}(k+1)P(X=k) = a\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n a$$

On utilise $E(1)=1$ et la **méthode 22.10**.

Par linéarité de l'espérance, on conclut $E(X) = E(X+1)-1 = \dfrac{(n-1)\,2^n+1}{2^{n+1}-1}$.

$\boxed{3}$ Pour calculer $V(X)$, on doit déterminer $E(X^2)$. Là encore, on a recours à une astuce de calcul

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 = E(X(X+1)) - E(X) - E(X)^2 \\ &= E(X(X+1)) - E(X)E(X+1) \end{aligned}$$

On utilise ici la petite formule des coefficients du binôme $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$

D'après la **formule de transfert**,

$$\begin{aligned} E(X(X+1)) &= \sum_{k=0}^{n} k(k+1)P(X=k) = a\sum_{k=0} k\binom{n}{k} = an\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} \\ &= an\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} = n2^{n-1}a \\ V(X) &= n2^{n-1}a - 2^n a(2^n a - 1) = n2^{n-1}a\big(n - 2\times(2^n a - 1)\big) \\ &= n2^{n-1}a\big(n+2-2^{n+1}a\big) \end{aligned}$$

En remplaçant a par son expression en fonction de n, on en déduit finalement

$$V(X) = \frac{(n+1)(2^{n+1}-n-2)}{(2^{n+1}-1)^2}$$

▲

Exercice 22.3

Avant tout, nous construisons le modèle.

Une réalisation possible pour cette expérience aléatoire est un couple d'entiers (i,j), avec $1 \leqslant i,j \leqslant 6$.

Ainsi, $\Omega = [\![1,6]\!]^2$. Comme tous les couples sont équiprobables, Ω est équipé de la probabilité uniforme. Card $(\Omega) = 6^2 = 36$.

1. Pour déterminer la loi de Z, nous appliquons la **méthode 22.1**. Pour chaque valeur du couple (i,j), nous indiquons dans le tableau ci-contre la valeur correspondante de Z.

i \ j	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

Comme pour tout $(i,j) \in [\![1,6]\!]^2$, $P(\{(i,j)\}) = \frac{1}{36}$, on en déduit facilement la loi de Z :

- $Z(\Omega) = [\![0,5]\!]$
- $P(Z=0) = \frac{6}{36}$, $P(Z=1) = \frac{10}{36}$, $P(Z=2) = \frac{8}{36}$, $P(Z=3) = \frac{6}{36}$, $P(Z=4) = \frac{4}{36}$, $P(Z=5) = \frac{2}{36}$.

2. On applique la **méthode 22.10** et la **méthode 22.11**

$$\begin{aligned}
E(Z) &= P(Z=1)+2P(Z=2)+3P(Z=3)+4P(Z=4)+5P(Z=5)\\
&= \frac{35}{18} \approx 1,944\\
E(Z^2) &= P(Z=1)+2^2P(Z=2)+3^2P(Z=3)+4^2P(Z=4)+5^2P(Z=5)\\
&= \frac{35}{6}\\
V(Z) &= E(Z^2)-E(Z)^2 = \frac{665}{324} \approx 2,052
\end{aligned}$$

▲

Exercice 22.4

1. Tout d'abord on effectuera au moins deux tirages ! Par conséquent 1 n'est pas une valeur possible pour X_n. 2 en revanche est une valeur possible qui est réalisée lorsque la deuxième boule porte un numéro supérieur ou égal à la première. Plus généralement, si k est un entier supérieur à 2, $[X_n = k]$ sera réalisé lorsque les $k-1$ premières boules portent des numéros strictement décroissants et la $k^{\text{ième}}$ porte un numéro supérieur à la précédente.
Comme les boules portent les numéros $1, 2, \ldots, n$ la plus longue suite strictement décroissante que l'on puisse former est $n, n-1, \ldots, 2, 1$. La $n+1^{\text{ième}}$ boule portera nécessairement un numéro supérieur à la $n^{\text{ième}}$ et les tirages s'arrêteront. Ainsi, l'ensemble des valeurs possibles pour X_n est

$$X_n(\Omega) = [\![2, n+1]\!]$$

2. Soit $k \in [\![2, n+1]\!]$. L'événement $[X_n > k]$ correspond à une suite strictement décroissante de k entiers choisis entre 1 et n :

$$n \geqslant b_1 > b_2 > \cdots > b_k \geqslant 1$$

Une telle suite définit une unique partie de $[\![1, n]\!]$ à k éléments et inversement toute partie de $[\![1, n]\!]$ à k éléments définit une unique suite strictement décroissante. Par conséquent, $[X_n > k]$ est un ensemble constitué de $\binom{n}{k}$ k-uplets d'entiers. Exercice 20.15
Comme les tirages ont lieu avec remise, tous les k-uplets d'éléments de $[\![1, n]\!]$ sont équiprobables. Par conséquent,

$$P(X_n > k) = \frac{\text{Card } [X_n > k]}{n^k} = \frac{1}{n^k}\binom{n}{k}$$

On en déduit alors la distribution de probabilité de X :

$$\begin{aligned}
P(X_n = k) &= P(X_n > k-1) - P(X_n > k) = \frac{1}{n^{k-1}}\binom{n}{k-1} - \frac{1}{n^k}\binom{n}{k}\\
&= \frac{1}{n^k}\left[n\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} - \frac{n!}{k!(n-k)!}\right]\\
&= \frac{n!}{n^k}\,\frac{nk-(n-k+1)}{k!(n-k+1)!} = \frac{n!}{n^k}\,\frac{(n+1)(k-1)}{k!(n-k+1)!}\\
&= \frac{k-1}{n^k}\,\frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} = \frac{k-1}{n^k}\binom{n+1}{k}
\end{aligned}$$

3. Par définition, $E(X_n) = \sum_{k=2}^{n+1} kP(X_n = k) = \sum_{k=2}^{n+1} k(k-1)\binom{n+1}{k} \frac{1}{n^k}$. Pour calculer $E(X_n)$, introduisons la fonction $x \mapsto f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k$. D'après la **formule du binôme** $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (1+x)^{n+1}$. De plus f est dérivable deux fois et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{n^k}\, k(k-1)\binom{n+1}{k} x^{k-2} = n(n+1)(1+x)^{n-1}$$

Finalement, $E(X_n) = \frac{1}{n^2}\, f''(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2}\, n(n+1)(1+\frac{1}{n})^{n-1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$.
Pour déterminer la limite lorsque n tend vers l'infini, écrivons

$$E(X_n) = \exp\left(n \ln(1 + \frac{1}{n})\right).$$

Comme $\ln(1+\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$, il en résulte que $\lim_{n \to +\infty} E(X_n) = e$. ▲

Exercice 22.5

On effectue des tirages successifs et sans remise. Une réalisation de cette expérience aléatoire est une permutation de $[\![1, n]\!]$. Les événements étant équiprobables, Ω est muni de la probabilité uniforme. Card $(\Omega) = n!$

1. Soit A l'événement « les boules 1,2,3 sortent consécutivement et dans cet ordre ». Pour dénombrer A, nous décrivons les étapes qui mènent à une réalisation de cet événement :

- choix du rang d'apparition de la boule 1 $\rightsquigarrow n-2$ possibilités ;
- choix d'une permutation de $[\![4, n]\!]$ $\rightsquigarrow (n-3)!$ possibilités.

Finalement, Card $(A) = (n-2) \times (n-3)! = (n-2)!$ et par conséquent $P(A) = \frac{\text{Card } (A)}{\text{Card } (\Omega)} = \frac{1}{n(n-1)}$.

2. Soit B l'événement « les boules 1,2,3 sortent dans cet ordre ». Pour dénombrer l'événement B, décrivons les étapes qui mènent à sa réalisation :

- choix des rangs d'apparition des boules 1,2,3 $\rightsquigarrow \binom{n}{3}$ possibilités ;
- choix d'une permutation de $[\![4, n]\!]$ $\rightsquigarrow (n-3)!$ possibilités.

Finalement, Card $(B) = \binom{n}{3} \times (n-3)! = \frac{n!}{3!}$ et $P(B) = \frac{\text{Card } (B)}{\text{Card } (\Omega)} = \frac{1}{3!}$.

Remarque : les événements «les boules 1,2,3 sortent dans un ordre» ou dans un autre étant équiprobables, on pouvait deviner ce résultat par symétrie !

3. On note X_n le nombre de tirages effectués lorsque sort les boules 1, 2 et 3 sont sorties toutes les trois. L'ensemble des valeurs possibles pour X_n est $X_n(\Omega) = [\![3, n]\!]$.

X_n peut s'interpréter comme le maximum du rang d'apparition des boules 1, 2 et 3 dans la suite des tirages.

Soit $k \in [\![3, n]\!]$. On calcule $P(X \leqslant k)$. Pour dénombrer $[X \leqslant k]$, décrivons les étapes qui mènent à une réalisation de cet événement :

- choix des rangs d'apparition des boules 1,2,3 $\rightsquigarrow \binom{k}{3}$ possibilités ;
- choix d'une permutation de $[\![1, 3]\!]$ $\rightsquigarrow 3!$ possibilités ;
- choix d'une permutation de $[\![4, n]\!]$ $\rightsquigarrow (n-3)!$ possibilités.

Ainsi Card $(X \leqslant k) = k(k-1)(k-2)(n-3)!$ et par conséquent

$$P(X \leqslant k) = \frac{k(k-1)(k-2)}{n(n-1)(n-2)}.$$

Finalement, pour tout $k \in [\![3, n]\!]$,

$$\begin{aligned} P(X_n = k) &= P(X_n \leqslant k) - P(X_n \leqslant k-1) \\ &= \frac{1}{n(n-1)(n-2)}\left[k(k-1)(k-2) - (k-1)(k-2)(k-3)\right] \\ &= \frac{3(k-1)(k-2)}{n(n-1)(n-2)} \end{aligned}$$

Par définition

$$\begin{aligned} E(X_n) &= \sum_{k=3}^{n} k\ P(X = k) = \frac{3}{n(n-1)(n-2)} \sum_{k=3}^{n} k(k-1)(k-2) \\ &= \frac{3}{n(n-1)(n-2)} \sum_{k=3}^{n} (k^3 - 3k^2 + 2k) = \frac{3(n+1)}{4}. \end{aligned}$$

Pour conclure le calcul, on utilise $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

▲

Exercice 22.6

1. On vérifie que la somme des entrées de la table de probabilité de (X, Y) vaut 1.

Méthode 22.3

2. Pour obtenir les lois marginales, on complète la table de probabilité du couple (X, Y).

$X \backslash Y$	0	1	2	3	$p_{i\bullet}$
1	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{5}{10}$
2	$\frac{1}{10}$	0	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$
3	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{2}{10}$	0	$\frac{3}{10}$
$p_{\bullet j}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	1

X et Y ne sont donc pas indépendantes car $p_{21} = 0$ et $p_{2\bullet} \times p_{\bullet 1} = 0,04 \neq 0$.

3. Pour déterminer espérance et variance de X et Y, on utilise la **méthode 22.10** et la **méthode 22.11**. Il vient :

$$E(X) = 1,8,\ E(X^2) = 4,\ V(X) = 4 - 1,8^2 = 0,76,$$
$$E(Y) = 1,4,\ E(Y^2) = 3,2 \text{ et } V(Y) = 1,24.$$

4. 5. Pour établir les lois de probabilités de U et V, nous indiquons directement dans la table de probabilité de (X, Y) pour chaque valeur (i, j) du couple (X, Y) les valeurs correspondantes de $U = ij$ et de $V = \min(i, j)$ dans les coins supérieurs gauche et droit.

Méthode 22.6

$X \backslash Y$	0	1	2	3
1	$^{0}\ \frac{1}{10}\ ^{0}$	$^{1}\ \frac{2}{10}\ ^{1}$	$^{2}\ \frac{1}{10}\ ^{1}$	$^{3}\ \frac{1}{10}\ ^{1}$
2	$^{0}\ \frac{1}{10}\ ^{0}$	$^{2}\ 0\ ^{1}$	$^{4}\ 0\ ^{2}$	$^{6}\ \frac{1}{10}\ ^{2}$
3	$^{0}\ \frac{1}{10}\ ^{0}$	$^{3}\ 0\ ^{1}$	$^{6}\ \frac{2}{10}\ ^{2}$	$^{9}\ 0\ ^{3}$

Nous en déduisons

- $U(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 9\}$ et
- $P(U = 0) = \frac{3}{10}$, $P(U = 1) = \frac{2}{10}$, $P(U = 2) = \frac{1}{10}$, $P(U = 3) = \frac{1}{10}$, $P(U = 4) = 0$, $P(U = 6) = \frac{3}{10}$, $P(U = 9) = 0$.
- $V(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ et
- $P(V = 0) = \frac{3}{10}$, $P(V = 1) = \frac{4}{10}$, $P(V = 2) = \frac{3}{10}$, $P(V = 3) = 0$.

6. D'après la question précédente, on a

$V \backslash U$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**6**	**9**
0	$\frac{3}{10}$	0	0	0	0	0	0
1	0	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	0	0	0
2	0	0	0	0	0	$\frac{3}{10}$	0
3	0	0	0	0	0	0	0

▲

Exercice 22.7

1. Comme les tirages se font avec remise, on peut représenter le résultat de l'expérience aléatoire comme un n-uplet : $\Omega = [\![1, N]\!]^n$. Les événements élémentaires étant équiprobables, Ω est muni de la probabilité uniforme : Card $(\Omega) = N^n$.

a. Soit $x \in [\![1, N]\!]$. L'événement $[X \geqslant x]$ est réalisé précisément lorsque toutes les boules prélevées portent un numéro supérieur à x. Autrement dit, $[X \geqslant x]$ est l'ensemble des n-uplets de nombres choisis parmi $[\![x, N]\!]$. En conséquence, Card $[X \geqslant x] = (N - x + 1)^n$, d'où l'on tire successivement

$$\begin{aligned} P(X \geqslant x) &= \frac{(N - x + 1)^n}{N^n} \\ P(X = x) &= P(X \geqslant x) - P(X \geqslant x + 1) = \frac{(N - x + 1)^n - (N - x)^n}{N^n} \end{aligned}$$

b. Soit $y \in [\![1, N]\!]$. $[Y \leqslant y]$ est l'ensemble des n-uplets d'entiers choisis entre 1 et y. Par conséquent

$$\begin{aligned} P(Y \leqslant y) &= \frac{y^n}{N^n} \\ P(Y = y) &= P(Y \leqslant y) - P(Y \leqslant y - 1) = \frac{y^n - (y - 1)^n}{N^n} \end{aligned}$$

c. Soit $(x, y) \in [\![1, N]\!]^2$. L'événement $[X > x] \cap [Y \leqslant y]$ est impossible si $x > y$, et si $x \leqslant y$, il correspond aux n-uplets d'entiers compris entre $x + 1$ et y. Ainsi $P([X > x] \cap [Y \leqslant y]) = \dfrac{(y - x)^n}{N^n}$ si $x < y$ et 0 sinon.

Or $P([X=x]\cap[Y=y]) = P([X=x]\cap[Y\leqslant y]) - P([X=x]\cap[Y\leqslant y-1])$
$= P([X>x-1]\cap[Y\leqslant y]) - P([X>x]\cap[Y\leqslant y])$
$\qquad -P([X>x-1]\cap[Y\leqslant y-1]) + P([X>x]\cap[Y\leqslant y-1])$

D'où la discussion suivante :

- si $x<y$, $P([X=x]\cap[Y=y]) = \dfrac{(y-x+1)^n+(y-x-1)^n-2(y-x)^n}{N^n}$
- si $x=y$, $P([X=x]\cap[Y=y]) = \dfrac{1}{N^n}$
- si $x>y$, $P([X=x]\cap[Y=y]) = 0$

2. Cette fois, les tirages ont lieu simultanément et sans remise. Une réalisation est donc une partie à n éléments de $[\![1,N]\!]$. Comme les éventualités sont équiprobables, Ω est muni de la probabilité uniforme. Card $(\Omega) = \binom{N}{n}$.

a. Suivant la même méthode que précédemment, nous obtenons $P(X\geqslant x) = \dfrac{\binom{N-x+1}{n}}{\binom{N}{n}}$, puis $P(X=x) = \dfrac{\binom{N-x+1}{n}-\binom{N-x}{n}}{\binom{N}{n}} = \dfrac{\binom{N-x}{n-1}}{\binom{N}{n}}$.

À l'aide de la **formule de Pascal** $\binom{m+1}{q+1} = \binom{m}{q} + \binom{m}{q+1}$

b. De même $P(Y\leqslant y) = \dfrac{\binom{y}{n}}{\binom{N}{n}}$, puis $P(Y=y) = \dfrac{\binom{y}{n}-\binom{y-1}{n}}{\binom{N}{n}} = \dfrac{\binom{y-1}{n-1}}{\binom{N}{n}}$.

c. Finalement, pour tout $(x,y)\in[\![1,N]\!]^2$, il vient

$$P([X=x]\cap[Y=y]) = \frac{\binom{y-x}{n-1}-\binom{y-x-1}{n-1}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{y-x-1}{n-2}}{\binom{N}{n}}.$$ ▲

Exercice 22.8

1. Pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, on peut associer une variable aléatoire X_i à la $i^{\text{ième}}$ rencontre du représentant de commerce, qui prend la valeur 1 si la personne p_i est malade et 0 sinon. X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre p. Avec ces notations, $N = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ apparaît comme la somme de n variables aléatoires de Bernoulli, de même paramètre et mutuellement indépendantes. Par conséquent N suit la loi binomiale de paramètres (n,p).

N compte le nombre de succès en n tentatives indépendantes, on reconnaît le modèle de la loi binomiale.

- $N(\Omega) = [\![0,n]\!]$
- $\forall k\in[\![0,n]\!],\ P(N=k) = \binom{n}{k}p^kq^{n-k}$, où l'on a noté $q=1-p$.

Pour déterminer la probabilité que le représentant soit contaminé, tout dépend du nombre de personnes malades qu'il va rencontrer.

2. En présence d'une personne contaminée, on sait que le représentant sera contaminé à son tour avec la probabilité $\frac{2}{3}$. Soit C l'événement «à la fin de ses visites, le représentant de commerce est contaminé». On va utiliser la **formule des probabilités totales** pour le système complet d'événements liés à N.

Soit $k\in[\![0,n]\!]$. Supposons que $[N=k]$ est réalisé. Le représentant rencontre k personnes malades. La probabilité qu'il ne soit pas contaminé à l'issue de chacune de ces visites est de $\frac{1}{3}$. Comme ces expériences sont mutuellement indépendantes, il en résulte que $P_{[N=k]}(\overline{C}) = \dfrac{1}{3^k}$, d'où l'on tire que

$$\begin{aligned} P(\overline{C}) &= \sum_{k=0}^{n} P(N=k)\times P_{[N=k]}(\overline{C}) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^kq^{n-k}\frac{1}{3^k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{p^k}{3^k}\,q^{n-k} \\ &= \left(\tfrac{p}{3}+q\right)^n = \left(1-\tfrac{2p}{3}\right)^n \end{aligned}$$

Finalement, $P(C) = 1-P(\overline{C}) = 1-\left(1-\frac{2p}{3}\right)^n$. ▲

Exercice 22.9

Comme le tirage se fait simultanément (sans remise), une issue possible de cette expérience aléatoire est une partie à n éléments de l'urne, qui en contient $2n$. Comme le tirage se fait au hasard, Ω est muni de la probabilité uniforme. Card $(\Omega) = \binom{2n}{n}$.

On reconnaît ici le modèle de la **loi hypergéométrique**.

1. $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. L'événement $[X = k]$ correspond aux «poignées» de n boules dont exactement k sont blanches. On a

$$P(X = k) = \frac{\text{Card } ([X = k])}{\text{Card } (\Omega)}$$

Pour dénombrer $[X = k]$ on décrit les étapes qui mènent à une réalisation :

- on prend k boules blanches $\rightsquigarrow \binom{n}{k}$ possibilités ;
- on prend $n - k$ boules noires $\rightsquigarrow \binom{n}{n-k}$ possibilités.

Finalement,

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ P(X = k) = \frac{\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}}{\binom{2n}{n}} = \frac{\binom{n}{k}^2}{\binom{2n}{n}}$$

2. Le calcul de l'espérance et de la variance d'une variable aléatoire suivant la loi hypergéométrique a été traité dans la partie méthodes. Avec les paramètres $(2n, n, p)$, nous obtenons $E(X) = \dfrac{n}{2}$ et $V(X) = \dfrac{n^2}{4(2n-1)}$. ▲

Exercice 22.10

1. On peut associer une variable aléatoire X_i à chaque groupe G_i qui prend la valeur 0 si le groupe est sain et 1 si le groupe comprend un individu atteint du virus. X_i suit une loi de Bernoulli. Pour déterminer son paramètre, il est plus aisé de calculer $P(X_i = 0)$. En effet, l'événement $[X_i = 0]$ correspond à la conjonction de n événements : chaque individu du groupe est sain. En notant $q = 1 - p$, on a donc par indépendance de ces n événements :

$$P(X_i = 0) = q^n$$

Ainsi, le résultat du test pour le $i^{\text{ième}}$ groupe suit la loi de Bernoulli de paramètre $1 - q^n$.
La variable X est égale au nombre de groupes testés positifs, autrement dit $X = \sum_{i=1}^{g} X_i$. Comme les X_i sont des variables indépendantes qui suivent la même loi de Bernoulli de paramètre $1 - q^n$, il en résulte que X suit la loi binomiale de paramètres $(g, 1 - q^n)$.

$E(X) = g(1 - q^n)$

- $X(\Omega) = [\![0, g]\!]$
- $\forall k \in [\![0, g]\!],\ P(X = k) = \binom{g}{k}(1 - q^n)^k\ (q^n)^{g-k}$.

2. Lorsqu'on suit la deuxième méthode, on effectue tout d'abord $g = \frac{N}{n}$ analyses de groupes, puis n analyses supplémentaires pour chaque groupe positif. Ainsi

$$Y = \frac{N}{n} + nX$$

$ng = N$

Pour calculer, l'espérance de Y, on utilise la linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned} E(Y) &= n\,E(X) + \frac{N}{n} = n\,g\,(1-q^n) + \frac{N}{n} = N\,(1-q^n) + \frac{N}{n} \\ &= N\,(1-q^n + \frac{1}{n}) \end{aligned}$$

3. Lorsque $N = 1000, n = 100$ et $p = 0,01$, le nombre moyen d'analyses nécessaires si l'on suit la deuxième méthode est $E(Y) = 1000(1-(0,99)^{100} + 0,01) \approx 644$. Si l'on compare aux 1000 analyses nécessaires pour la première méthode, il est clairement préférable d'adopter la deuxième méthode. ▲

Exercice 22.11

1.

a. Les appels ayant lieu indépendamment les uns des autres, X est égale au nombre de retards obtenus en n tentatives ayant lieu dans des conditions identiques et de façon indépendante. On reconnaît le modèle d'une loi binomiale de paramètres $n = 8$ et $p = \frac{1}{4}$. Ainsi

- $X(\Omega) = [\![0, 8]\!]$
- $\forall k \in [\![0, 8]\!],\ P(X = k) = \binom{8}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{8-k}$.

b. L'événement «le client a subi au moins un retard» correspond à $[X \geqslant 1]$. Il est plus aisé de déterminer la probabilité de l'événement contraire : $P(X = 0) = \left(\frac{3}{4}\right)^8$, donc

$$P(X \geqslant 1) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^8 \approx 0,900$$

c. L'événement «le client a subi moins de quatre retards» correspond à $[X = 0] \cup [X = 1] \cup [X = 2] \cup [X = 3]$. Ces événements étant deux à deux incompatibles, l'additivité de la probabilité donne :

$$P(X < 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) \approx 0,886$$

d. Pour calculer cette probabité conditionnelle, nous utilisons la définition.

$$P_{[X \geqslant 1]}(X < 4) = \frac{P(1 \leqslant X < 4)}{P(X \geqslant 1)} = \frac{P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)}{1 - P(X = 0)} \approx 0,873$$

2. On considère huit clients différents, qui se répartissent en deux catégories : ceux qui sont mécontents (ils sont deux) et les autres au nombre de six. On contacte quatre personnes parmi ces huit.

a. Y est égale au nombre de personnes mécontentes parmi les quatre sélectionnées. On reconnaît ici le modèle d'une **loi hypergéométrique** de paramètres $N = 8, n = 4, p = \frac{1}{4}$. Par conséquent

- $Y(\Omega) = [\![0, 2]\!]$
- $\forall k \in [\![0, 2]\!],\ P(Y = k) = \dfrac{\binom{2}{k}\binom{6}{4-k}}{\binom{8}{4}}$.

Ainsi $P(Y = 0) = \dfrac{15}{70}, P(Y = 1) = \dfrac{40}{70}, P(Y = 2) = \dfrac{15}{70}$.

b. L'espérance mathématique de Y est alors $E(Y) = np = 1$. ▲

Exercice 22.12

Comme la puce initialement située à l'origine bondit d'une unité à chaque instant, sa position à l'instant n est égale à la différence de ses déplacements vers la droite et de ses déplacements vers la gauche. Notons S_k la variable de Bernoulli qui prend la valeur 1 si le $k^{\text{ième}}$ saut a lieu vers la droite. Le nombre de déplacements vers la droite est donc $D_n = \sum_{k=0}^{n} S_k$ et par suite le nombre de déplacements vers la gauche est donc $G_n = n - D_n$. On en déduit

X_n et n ont toujours la même parité.

$$X_n = D_n - G_n = 2D_n - n$$

Comme les sauts sont indépendants les uns des autres, D_n suit une loi binomiale de paramètres (n, p). On en déduit la loi de X_n :

Si n est pair $X_n(\Omega) = \{i \in [\![-n, n]\!] \mid i \text{ pair}\}$, si n est impair $X_n(\Omega) = \{i \in [\![-n, n]\!] \mid i \text{ impair}\}$.

- $X_n(\Omega) = \{2k - n\,;\ 0 \leqslant k \leqslant n\}$
- $\forall k \in [\![0, n]\!],\ P(X_n = 2k - n) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

D'après les propriétés de l'espérance et de la variance, on en déduit que $E(X_n) = n(2p - 1)$ et $V(X_n) = 4npq$. ▲

Exercice 22.13

On reconnaît le modèle de la loi binomiale : nombre de succès obtenus en n tentatives indépendantes les unes des autres.

1. Chaque appel téléphonique est une expérience à deux issues succès ou échec. On peut donc lui associer une variable de Bernoulli de paramètre p, T_i, qui prend la valeur 1 si le secrétaire parvient à joindre la i-ième personne et 0 sinon. Ainsi, $X = T_1 + T_2 + \cdots + T_n$ est la somme de n variables aléatoires de Bernoulli mutuellement indépendantes et de même paramètre p. Par conséquent, X suit une loi binomiale de paramètres n et p :

- $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$
- $\forall k \in [\![0, n]\!],\ P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

Par conséquent $E(X) = np$, $V(X) = npq$.

2.

a. Soit $k \in [\![0, n]\!]$.On suppose que $[X = k]$ est réalisé. En conséquence, le secrétaire appelle une deuxième fois les $n - k$ personnes restantes. Comme précédemment, le nombre de succès obtenus lors de ces $n - k$ nouvelles tentatives suit une loi binomiale de paramètres $n - k$ et p.

$$\forall \ell \in [\![0, n-k]\!],\ P(Y = \ell \mid X = k) = \binom{n-k}{\ell} p^\ell q^{n-k-\ell}$$

b. L'ensemble des valeurs possibles pour Z est $Z(\Omega) = [\![0, n]\!]$. Soit $s \in [\![0, n]\!]$. On calcule $P(Z = s)$ au moyen de la **formule des probabilités totales** pour le système complet d'événements liés à X :

$$P(Z = s) = \sum_{k=0}^{s} P(X = k) \times P(Y = s - k | X = k)$$

$$= \sum_{k=0}^{s} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \binom{n-k}{s-k} q^{(n-k)-(s-k)} p^{s-k} = \sum_{k=0}^{s} \binom{n}{k} \binom{n-k}{s-k} p^s q^{2n-s-k}$$

Or $\binom{n}{k}\binom{n-k}{s-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{(n-k)!}{(s-k)!(n-s)!} = \frac{n!}{s!(n-s)!} \frac{s!}{k!(s-k)!} = \binom{n}{s}\binom{s}{k}$.

Réinjectons ceci dans le calcul de $P(Z=s)$, il vient :

$$\begin{aligned} P(Z=s) &= \sum_{k=0}^{s} \binom{n}{s}\binom{s}{k} p^s q^{2n-s-k} = p^s \binom{n}{s} \sum_{k=0}^{s} \binom{s}{k} q^{2n-s-k} \\ &= p^s q^{2n-2s} \binom{n}{s} \sum_{k=0}^{s} \binom{s}{k} q^{s-k} = \binom{n}{s} p^s q^{2n-2s} (1+q)^s \\ P(Z=s) &= \binom{n}{s} (p+pq)^s (q^2)^{n-s} \end{aligned}$$

La loi de Z ressemble à une loi binomiale. Les nombres $p+pq$ et q^2 vérifient-ils $(p+pq)+q^2=1$?

On observe que $(p+pq)+q^2 = p+p(1-p)+(1-p)^2 = p+p-p^2+1-2p+p^2 = 1$. En conséquence Z suit la loi binomiale de paramètres n et $p+pq$. ▲

Exercice 22.14

1. Toutes les poignées sont équiprobables. Par conséquent $\Omega = \mathscr{P}([\![1,n]\!])$ est muni de la probabilité uniforme. Card $(\Omega) = 2^n$.

a. L'ensemble des valeurs possibles pour N est $N(\Omega) = [\![0,n]\!]$. Soit $k \in [\![0,n]\!]$. On a $P(N=k) = \dfrac{\text{Card } [N=k]}{\text{Card } \Omega}$. Or, le nombre de parties à k éléments de $[\![1,n]\!]$ est $\binom{n}{k}$. Par conséquent, $P(N=k) = \dfrac{\binom{n}{k}}{2^n}$.

$[N=0]$ correspond à l'événement « la partie piochée est la partie vide » !

On peut alors calculer l'espérance de N :

$$\begin{aligned} E(N) &= \sum_{k=0}^{n} kP(N=k) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} \\ &= \frac{n}{2^n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} = \frac{n}{2^n}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} = \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

On utilise successivement la petite formule des coefficients du binôme :

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

puis la **formule du binôme**.

b. Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Le paramètre de X_i est la probabilité que $[X_i=1]$ soit réalisé, c'est-à-dire que la partie piochée contienne l'élément i. Pour dénombrer l'ensemble des parties de $[\![1,n]\!]$ qui contiennent l'élément i, on décrit les étapes qui mènent à la réalisation d'une telle partie :

- on choisit de prendre l'élément i $\rightsquigarrow \binom{1}{1}$ possibilité ;
- on complète $\{i\}$ en une partie de $[\![1,n]\!]$ en rajoutant une partie de $[\![1,n]\!] \setminus \{i\}$ $\rightsquigarrow 2^{n-1}$ possibilités.

Ainsi Card $(X_i=1) = 2^{n-1}$ et $P(X_i=1) = \dfrac{\text{Card } (X_i=1)}{\text{Card } (\Omega)} = \dfrac{2^{n-1}}{2^n} = \dfrac{1}{2}$.

c. Le $i^{\text{ième}}$ jeton contribue pour i points s'il appartient à la poignée prélevée. Au total, $S = \sum_{i=1}^{n} iX_i$. Par linéarité de l'espérance, il s'ensuit que

$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

$$E(S) = \sum_{i=1}^{n} iE(X_i) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{4}$$

d. Soit $(i_1, i_2, \ldots, i_k) \in [\![1,n]\!]^k$ tel que $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$. Montrons que les événements $[X_{i_1}=0]$, $[X_{i_2}=0]$,..., $[X_{i_k}=0]$ sont mutuellement indépendants. Pour cela, calculons la probabilité de leur intersection. $[X_{i_1}=0] \cap [X_{i_2}=0] \cap [X_{i_k}=0]$ correspond à l'événement « la partie piochée

Corrigé

ne contient ni i_1, ni i_2, ..., ni i_k.» Autrement dit, il s'agit d'une partie quelconque de $[\![1,n]\!] \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$. Or il existe 2^{n-k} parties de telle sorte. Ω étant muni de la probabilité uniforme,

$$P\big([X_{i_1}=0]\cap[X_{i_2}=0]\cap[X_{i_k}=0]\big)=\frac{2^{n-k}}{2^n}=\frac{1}{2^k}$$

Ainsi, on a bien vérifié que $P\big([X_{i_1}=0]\cap[X_{i_2}=0]\cap[X_{i_k}=0]\big)=P(X_{i_1}=0)P(X_{i_2}=0)\cdots P(X_{i_k}=0)$. D'après la **proposition 21.13**, les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendantes. On peut alors appliquer la **méthode 22.11** pour calculer la variance de S :

✐ $V(X_i)=\frac{1}{4}$

$$V(S)=V\Big(\sum_{i=1}^{n} iX_i\Big)=\sum_{i=1}^{n} V(iX_i)=\sum_{i=1}^{n} i^2V(X_i)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}.$$

2. On suppose à présent que les tailles des poignées sont équiprobables, *i.e.* $N \rightsquigarrow \mathscr{U}([\![0,n]\!])$. En conséquence, $\forall k \in [\![0,n]\!],\ P(N=k)=\dfrac{1}{n+1}$.

a. $E(N)=\dfrac{n}{2}$.

b. Soit $k \in [\![0,n]\!]$. On suppose que $[N=k]$ est réalisé. Par conséquent, la partie piochée a k éléments. L'univers des possibles est donc l'ensemble des parties de $[\![1,n]\!]$ à k éléments. Il existe $\binom{n}{k}$ parties de cette sorte. Parmi celles-ci, dénombrons les parties qui contiennent i :

- on choisit de prendre l'élément i $\rightsquigarrow \binom{1}{1}$ possibilité ;
- on lui rajoute $k-1$ éléments de $[\![1,n]\!]\setminus\{i\}$ $\rightsquigarrow \binom{n-1}{k-1}$ possibilités.

✐ $k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$

Finalement, $P(X_i=1|N=k)=\dfrac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}}=\dfrac{k}{n}$. Pour en déduire la probabilité de l'événement $[X_i=1]$, on applique la **formule des probabilités totales** pour le système complet d'événement liés à N.

$$P(X_i=1)=\sum_{k=0}^{n} P(N=k)\times P(X_i=1|N=k)=\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n(n+1)}=\frac{1}{2}$$

Ainsi, dans ce nouveau modèle, les X_i sont des lois de Bernoulli de même paramètre $\frac{1}{2}$.

c. Clairement $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ne sauraient être indépendantes dans ce modèle puisque $P\Big(\bigcap_{i=1}^{n}[X_i=0]\Big)=P(\emptyset)=\dfrac{1}{n+1}\neq\dfrac{1}{2^n}$. Soit (i,j) un couple d'entiers distincts entre 1 et n. Calculons la covariance de (X_i, X_j). On sait que $E(X_i)=E(X_j)=\dfrac{1}{2}$. Calculons $E(X_iX_j)=P([X_i=1]\cap[X_j=1])$. Comme précédemment, nous discutons suivant la taille de la poignée. Soit $k\in[\![0,n]\!]$, $k\geqslant 2$. Il existe $\binom{n-2}{k-2}$ parties de $[\![1,n]\!]$ à k éléments dont i et j. Il en résulte que

$$P\big([X_i=1]\cap[X_j=1]|N=k\big)=\frac{\binom{n-2}{k-2}}{\binom{n}{k}}=\frac{k(k-1)}{n(n-1)}$$

La **formule des probabilités totales** permet alors de conclure :

$$\begin{aligned} E(X_iX_j) &= \sum_{k=0}^{n} P(N=k)\times P\big([X_i=1]\cap[X_j=1]|N=k\big) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{k(k-1)}{(n-1)n(n+1)} = \frac{1}{(n-1)n(n+1)}\sum_{k=0}^{n}(k^2-k) = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

D'après la **formule de Huygens**, il en résulte finalement que $\mathrm{Cov}(X_i,X_j) = E(X_iX_j) - E(X_i)E(X_j) = \dfrac{1}{12}$.

Ici, $\mathrm{Cov}(X_i,X_j)\neq 0$, on retrouve que X_i et X_j ne sont pas indépendantes.

3. On suppose ici que $n=3$. Par conséquent les réalisations possibles à l'issue de l'expérience aléatoire sont

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}$$

En particulier, l'ensemble des valeurs possibles pour la somme est $S(\Omega) = \{0,1,2,3,4,5,6\}$.

a. Dans le premier modèle, on a

$[S=3] = \{\{3\};\{1,2\}\}$

s	0	1	2	3	4	5	6
$P(S=s)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

b. Dans le deuxième modèle, on utilise la **formule des probabilités totales** pour le SCE $[N=1]$, $[N=2]$, $[N=3]$. On obtient

$$\begin{aligned} P(S=0) &= P(N=0) = \tfrac{1}{4} \\ P(S=1) &= P(N=1)P(S=1|N=1) = P(N=1)P(X_1=1|N=1) = \tfrac{1}{12} \\ P(S=2) &= P(N=1)P(S=2|N=1) = P(N=1)P(X_2=1|N=1) = \tfrac{1}{12} \\ P(S=3) &= P(N=1)P(S=3|N=1) + P(N=2)P(S=3|N=2) \\ &= P(N=1)P(X_3=1|N=1) \\ &\qquad + P(N=2)P(X_1=1\cap X_2=1|N=2) = \tfrac{1}{6} \\ P(S=4) &= P(N=2)P(S=4|N=2) = \tfrac{1}{12} \\ P(S=5) &= P(N=2)P(S=5|N=2) = \tfrac{1}{12} \\ P(S=6) &= P(N=3) = \tfrac{1}{4} \end{aligned}$$

▲

Exercice 22.15

1. Montrons cette propriété $\mathscr{P}(n)$ par récurrence sur l'entier $n\in\mathbb{N}^\star$.

- **Initialisation :** si $n=1$, on a $\dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} = 3\times\dfrac{2}{4} - 1$
- **Hérédité :** soit $n\in\mathbb{N}^\star$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. On a

On vérifie que $(2n+1)\binom{2n}{n} = \dfrac{2n+2}{4}\binom{2n+2}{n+1}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1}\frac{\binom{2k}{k}}{4^k} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{\binom{2k}{k}}{4^k} + \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{4^{n+1}} = \frac{2n+1}{4^n}\binom{2n}{n} - 1 + \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{4^{n+1}} \\ &= \frac{2n+2}{4^{n+1}}\binom{2n+2}{n+1} + \frac{1}{4^{n+1}}\binom{2n+2}{n+1} - 1 \\ &= \frac{2n+3}{4^{n+1}}\binom{2n+2}{n+1} - 1 \end{aligned}$$

• **Conclusion :** par récurrence, on a prouvé $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{\binom{2k}{k}}{4^k} = \frac{2n+1}{4^n}\binom{2n}{n} - 1$.

D_{2k} correspond au nombre de sauts vers la droite effectués avant l'instant $2k$.

2. Soit $k \in \mathbb{N}^\star$. D'après l'**exercice 22.12**, la position de la puce à l'instant $2k$ est une variable aléatoire X_{2k}. Plus précisément $X_{2k} = 2D_{2k} - 2k$, où D_{2k} suit une loi binomiale de paramètres $(2k, \frac{1}{2})$. L'événement « la puce est à l'origine à l'instant $2k$ » est simplement l'événement $[X_{2k} = 0]$ soit encore $[D_{2k} = k]$. Comme $D_{2k} \rightsquigarrow \mathscr{B}(2k, \frac{1}{2})$, il vient

$$P[X_{2k} = 0] = \frac{1}{4^{2k}}\binom{2k}{k}$$

La puce est à l'origine à l'instant i si elle a effectué autant de déplacements à droite qu'à gauche !!

3. Pour compter le nombre de retours à l'origine, on introduit pour $i \in [\![1, n]\!]$, la variable aléatoire de Bernoulli R_i qui prend la valeur 1 si la puce est à l'origine à l'instant i. Déterminons le paramètre de R_i.

▸ Si $i = 2k+1$ est impair, alors $P(R_{2k} = 1) = 0$. R_i est la variable certaine égale à 0.

▸ Si $i = 2k$ est pair, alors $P(R_{2k} = 1) = P(X_{2k} = 0) = \frac{1}{4^{2k}}\binom{2k}{k}$. R_{2k} suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{4^{2k}}\binom{2k}{k}$.

N_n est le nombre de retours à l'origine, c'est-à-dire $N_n = \sum_{i=1}^{n} R_i$. Par linéarité de l'espérance, on en déduit que

$$\begin{aligned} E(N_n) &= E\Big(\sum_{i=1}^{n} R_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} E(R_i) = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i = 2k}} E(R_i) + \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i = 2k+1}} E(R_i) \\ &= \sum_{1 \leqslant 2k \leqslant n} \frac{1}{4^{2k}}\binom{2k}{k} \end{aligned}$$

Pour conclure, notons $m = \lfloor n/2 \rfloor$ de sorte que $n = 2m$ ou $n = 2m+1$. Dans les deux cas, on a

$$E(N_n) = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{4^{2k}}\binom{2k}{k} = \frac{2m+1}{4^m}\binom{2m}{m} - 1 = \frac{(2m+1)!}{4^m (m!)^2} - 1$$

$n! \sim (\frac{n}{e})^n \sqrt{2\pi n}$

Pour obtenir un équivalent de E_n on utilise la **formule de Stirling**. Il vient :

$$\frac{(2m+1)!}{4^m (m!)^2} \sim \sqrt{\frac{4m}{\pi}} \sim \sqrt{\frac{2n}{\pi}}$$

Finalement, $E(N_n) \underset{n \to \infty}{\sim} \sqrt{\frac{2n}{\pi}}$. ▲

Chapitre 23

Espaces préhilbertiens réels

UN MATHÉMATICIEN

L'œuvre de **David Hilbert** touche à tous les domaines des mathématiques. Il reste avant tout célèbre pour son axiomatique de la géométrie mais surtout pour les 23 problèmes qu'il propose en 1900 pour guider les mathématiques tout au long du XXe siècle. Sans cesse à la recherche de méthodes nouvelles, Hilbert joue un rôle fondamental dans le développement des mathématiques dont il est probablement le dernier à dominer toutes les branches.

Un peu d'histoire

Par ses travaux sur les fonctions périodiques mais aussi par l'étude des séries de carré sommable, David Hilbert s'aperçoit que l'on peut définir une notion qui s'apparente au produit scalaire sur ces ensembles sauf que les espaces considérés sont de dimension infinie.

Alors, pourquoi se limiter à la dimension finie ? Son élève Erhard Schmidt exploite cette idée et introduit des notions nouvelles sur ces espaces.

John Von Neumann modélise de tels espaces qu'il nomme *hilbertiens*, le qualificatif d'*euclidien* étant réservé à ceux de dimension finie. Quel est l'intérêt dira-t-on ? C'est d'utiliser notre intuition géométrique pour raisonner dans de tel espaces, d'y définir des projections orthogonales et de remplacer des calculs par des raisonnements élémentaires.

Objectifs

les incontournables

- Considérer des produits scalaires sur des espaces pour :
  - obtenir des inégalités entre nombres réels ;
  - calculer des distances entre vecteurs et sous-espaces ;
  - caractériser des orthogonalités entre vecteurs.

et plus si affinités

- Utiliser un produit scalaire pour résoudre des problèmes d'inégalités.

Résumé de cours

Dans tout ce chapitre, les espaces vectoriels considérés sont tous sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Produit scalaire

Définition : *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On appelle* ***produit scalaire*** *sur E, toute application de deux variables $\Phi : E \times E \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \Phi(x, y)$ qui est :*

- *symétrique : pour tous x et y dans E, $\Phi(x, y) = \Phi(y, x)$;*
- *bilinéaire : linéaire par rapport à chaque variable ;*
- *positive : pour tout x dans E, $\Phi(x, x) \geqslant 0$;*
- *définie-positive : pour tout x dans E, si $\Phi(x, x) = 0$, alors $x = 0_E$.*

Dans ce cas, on notera pour tous vecteurs x et y de E : $\Phi(x, y) = (x \mid y)$.

Définition : *Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E muni d'un produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$ est dit* ***préhilbertien réel****. On note $(E, (\cdot \mid \cdot))$. Si de plus E est de dimension finie, il est appelé un* ***espace euclidien****.*

Proposition 23.1.— Produits scalaires usuels

- $E = \mathbb{R}^n$ est un espace euclidien pour le produit scalaire défini par :
$$\forall (x, y) \in E^2, \quad (x \mid y) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$
- $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, avec $a < b$ est un préhilbertien réel pour le produit scalaire défini par :
$$\forall (f, g) \in E^2, \quad (f \mid g) = \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt.$$

Proposition-Définition 23.2.— Norme euclidienne —. Soit $(E, (\cdot \mid \cdot))$ un espace préhilbertien réel.
Pour tout $x \in E$, le produit scalaire $(x \mid x)$ est un réel positif. On appelle **norme euclidienne de x** sa racine carrée. On note
$$\boxed{\|x\| = \sqrt{(x \mid x)}}$$
L'application $N : x \mapsto \sqrt{(x \mid x)}$ est appelée norme euclidienne associée au produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$.

Voici deux formules parmi la multitude de celles permettant de faire le lien entre produit scalaire et norme euclidienne :

Proposition 23.3.— Identités de polarisation —. Soit $(E, (\cdot \mid \cdot))$ un espace préhilbertien réel.
Pour tout $(x, y) \in E^2$,
$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet \quad \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x \mid y) + \|y\|^2 \\ \bullet \quad (x \mid y) = \dfrac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right) \end{array}}$$

Théorème 23.4.— Soit $(E, (\cdot \mid \cdot))$ un espace préhilbertien réel. Pour tout $(x, y) \in E^2$,

- **Inégalité de Cauchy-Schwarz**

$$\boxed{|(x \mid y)| \leqslant \|x\| \cdot \|y\| \text{ avec égalité si et seulement si } x \text{ et } y \text{ sont colinéaires.}}$$

- **Inégalité triangulaire**

$$\boxed{\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \text{ avec égalité ssi } x \text{ et } y \text{ sont colinéaires et de même sens.}}$$

■ Orthogonalité

Vecteurs et familles de vecteurs orthogonaux

Définition : *Soit $(E, (\cdot \mid \cdot))$ un espace préhilbertien réel. Soit $x, y, x_1, \ldots, x_p$ des vecteurs de E. On dit que :*

- *x et y sont* ***orthogonaux*** *si $(x \mid y) = 0$;*
- *la famille $(x_1, \ldots, x_p)$ est* ***orthogonale*** *si pour tous entiers $i \neq j$ dans $[\![1, p]\!]$, $(x_i \mid x_j) = 0$;*
- *le vecteur x dans E est* ***unitaire*** *si $\|x\| = 1$;*
- *la famille $(x_1, \ldots, x_p)$ est* ***orthonormale*** *si elle est orthogonale et composée de vecteurs unitaires (autrement dit, pour tous entiers i et j dans $[\![1, p]\!]$, $(x_i \mid x_j) = \delta_{ij}$ (symbole de Kronecker valant 0 si $i \neq j$ et 1 si $i = j$)) ;*
- *la famille $(x_1, \ldots, x_p)$ est une* ***base orthonormée*** *(BON) de E s'il s'agit d'une famille orthonormale et d'une base de l'espace vectoriel E.*

Exemple : la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une base orthonormée de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire habituel.

Proposition 23.5.— Dans un espace euclidien, toute famille orthonormale est libre.

Théorème 23.6.— Théorème de Pythagore —. Soit $(E, (\cdot \mid \cdot))$ un espace préhilbertien réel. Pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$\boxed{x \text{ et } y \text{ sont orthogonaux si et seulement si } \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2}$$

Remarque : la condition nécessaire se généralise au cas d'une famille orthogonale, finie de vecteurs.

Le procédé décrit ci-dessous permet de construire des bases orthonormales d'un espace euclidien.

Théorème 23.7.— Orthonormalisation de Gram-Schmidt —. Soit $(E, (\cdot \mid \cdot))$ un préhilbertien réel et $(x_1, \ldots, x_p)$ une famille libre de vecteurs. Alors, il existe une famille orthonormale $(e_1, \ldots, e_p)$ unique, telle que :

- pour tout k dans $[\![1, p]\!]$, $\mathsf{Vect}(e_1, \ldots, e_k) = \mathsf{Vect}(x_1, \ldots, x_k)$;
- pour tout k dans $[\![1, p]\!]$, $(e_k \mid x_k) > 0$.

Orthogonal d'une partie

Définition : *Soit $(E, (\cdot \mid \cdot))$ un espace préhilbertien réel et $\mathcal{A}$ une partie de E. On appelle* ***orthogonal*** *de $\mathcal{A}$, et on note $\mathcal{A}^\perp$ l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à tous les vecteurs de $\mathcal{A}$:*

$$\mathcal{A}^\perp = \{x \in E \mid \forall a \in \mathcal{A}, \quad (x \mid a) = 0\}.$$

Proposition 23.8.— Soit $(E, (\cdot \mid \cdot))$ un espace préhilbertien réel et $\mathcal{A}$ une partie de E.

- L'orthogonal $\mathcal{A}^\perp$ est toujours un sous-espace vectoriel de E.
- $(\mathsf{Vect}\,(\mathcal{A}))^\perp = \mathcal{A}^\perp$.

Proposition 23.9.— Supplémentaire orthogonal —. Soit $(E, (\cdot \mid \cdot))$ un espace préhilbertien réel. On suppose que F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. Alors F et $F^\perp$ sont supplémentaires :

$$\boxed{F \oplus F^\perp = E}$$

Remarque : lorsque E est un espace euclidien, la proposition s'applique à tous ses sous-espaces (ils sont de dimension finie) et on a alors $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$.

■ Bases orthonormées dans un espace euclidien

À l'aide du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, on obtient les deux résultats suivants.

Théorème 23.10.— Existence de BON —. Un espace euclidien possède des bases orthonormées.

Théorème 23.11.— Base orthonormée incomplète —. Soit E un espace euclidien.
Toute famille orthonormale de vecteurs de E peut être complétée en une base orthonormée de E.

Proposition 23.12.— Coordonnées d'un vecteur en BON —. Soit $(E, (\cdot \mid \cdot))$ un espace euclidien et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. Pour tout vecteur $x \in E$,

$$\boxed{x = (x \mid e_1) \cdot e_1 + \cdots + (x \mid e_n) \cdot e_n}$$

Proposition 23.13.— Expression du produit scalaire en BON —. Soit $(E, (\cdot \mid \cdot))$ un espace euclidien et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. Si $x = x_1 \cdot e_1 + \cdots + x_n \cdot e_n$ et $y = y_1 \cdot e_1 + \cdots + y_n \cdot e_n$, alors :

$$\boxed{(x \mid y) = x_1 \cdot y_1 + \cdots + x_n \cdot y_n \quad \text{et} \quad \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}}$$

■ Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie

Définition : *Soit E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de dimension finie.*

- *La* ***projection orthogonale*** *$p_F : E \to E$ est la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.*

- *La symétrie orthogonale $s_F : E \to E$ est la symétrie par rapport à F, parallèlement à $F^\perp$.*

Théorème 23.14.— Caractérisation du projeté orthogonal —. Soit E un espace préhilbertien réel, F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Pour tout couple (x, y) de vecteurs de E

$$\boxed{y \text{ est le projeté orthogonal de } x \text{ sur } F \text{ si et seulement si } \begin{cases} \bullet & y \in F \\ \bullet & x - y \in F^\perp \end{cases}}$$

Proposition 23.15.— Expression du projeté orthogonal en BON —. Soit $(E, (\cdot \mid \cdot))$ un espace préhilbertien réel, F un sous-espace vectoriel de E rapporté à une BON $(e_1, \ldots, e_p)$. Alors

$$\boxed{\forall x \in E,\ p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} (x \mid e_i) \cdot e_i}$$

Distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel

Proposition-Définition 23.16.— E un espace préhilbertien réel, F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie et x un vecteur de E. Alors pour tout vecteur $y \in F$,

$$\| x - y \|^2 = \| x - p_F(x) \|^2 + \| p_F(x) - y \|^2$$

En particulier, $\| x - y \| \geqslant \| x - p_F(x) \|$ avec égalité si et seulement si $y = p_F(x)$. Par conséquent, $\|x - p_F(x)\|$ réalise la distance minimale entre x et un vecteur de F. On note

$$\boxed{d(x, F) = \| x - p_F(x) \|}$$

Cette distance minimale est appelée la distance du vecteur x au sous-espace F.

Proposition 23.17.— Soit $(E, (\cdot \mid \cdot))$ un espace préhilbertien réel. Soit u un vecteur non nul de E et $H = \mathsf{Vect}\,(u)^\perp$ l'hyperplan de E orthogonal de la droite vectorielle engendrée par u. Alors, pour tout vecteur $x \in E$,

$$\boxed{\bullet\ \ p_H(x) = x - \frac{(x \mid u)}{\| u \|^2} \cdot u \qquad \bullet\ \ d(x, H) = \frac{|(x \mid u)|}{\| u \|}}$$

Méthodes

Produit scalaire

Pour vérifier qu'une application bilinéaire sur un espce vectoriel réel définit un produit scalaire

Méthode 23.1.— Comment reconnaître un produit scalaire

Pour vérifier qu'une forme φ définit un produit scalaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E,

$\boxed{0}$ On commence– si nécessaire– par vérifier que $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ est bien définie. Il s'agit de montrer que pour tout couple $(x, y) \in E^2$, le procédé $\Phi(x, y)$ donne bien un réel.

$\boxed{1}$ On montre que Φ est symétrique : cette étape est en général très simple.

$\boxed{2}$ On vérifie ensuite que Φ est linéaire par rapport à sa première variable :

$$\forall (x_1, x_2, y) \in E^3, \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2,\ \Phi(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2, y) = \lambda_1 \Phi(x_1, y) + \lambda_2 \Phi(x_2, y).$$

Comme Φ est symétrique, cela suffit pour conclure que Φ est bilinéaire et symétrique.

$\boxed{3}$ On montre que Φ est positive : il s'agit de prouver que pour tout $x \in E$, $\Phi(x, x) \geqslant 0$.

$\boxed{4}$ Finalement, on démontre que Φ est définie-positive, c'est souvent le point délicat. Il s'agit de prouver que pour tout $x \in E$, $\Phi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$.

Mise en œuvre : exercice 23.3

Exemple : montrons que l'application $(P, Q) \mapsto \sum_{k=0}^{2} P(k) \times Q(k)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

$\boxed{1}$ L'application est symétrique : pour tous polynômes P et Q) de degrés inférieurs ou égaux à 2 : $(P \mid Q) = (Q \mid P)$, car les sommes $\sum_{k=0}^{2} P(k) \times Q(k)$ et $\sum_{k=0}^{2} Q(k) \times P(k)$ sont égales.

$\boxed{2}$ Soit P_1, P_2 et Q trois polynômes dans $\mathbb{R}_2[X]$, (λ_1, λ_2) un couple de réels. Alors :

$$\begin{aligned}(\lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2 \mid Q) &= \sum_{k=0}^{3} (\lambda_1 P_1(k) + \lambda_2 P_2(k)) \times Q(k) \\ &= \lambda_1 \sum_{k=0}^{2} P_1(k) Q(k) + \lambda_2 \sum_{k=0}^{2} P_2(k) Q(k) = \lambda_1 (P_1 \mid Q) + \lambda_2 (P_2 \mid Q).\end{aligned}$$

$\boxed{3}$ L'application est positive. Pour tout polynôme $P(X)$ dans $\mathbb{R}_2[X]$, le nombre $(P \mid P)$ valant $\sum_{k=0}^{2} (P(k))^2$ est une somme de carrés (de réels), donc est positif.

$\boxed{4}$ L'application est définie-positive. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $(P \mid P) = \sum_{k=0}^{2} (P(k))^2 = 0$, cela implique naturellement que pour tout entier k entre 0 et 2, $P(k) = 0$ car une somme de termes positifs n'est nulle qu'à la seule condition que chaque terme soit nul. Le polynôme $P(X)$ admet donc au moins trois racines : 0, 1 et 2 ; autrement dit, le polynôme $P(X)$ admet strictement plus de racines que son degré : le polynôme $P(X)$ est le polynôme nul !

■ Orthonormalisation

❑ Méthode 23.2.— Comment orthonormaliser une famille libre de E

Soit $(E, (\cdot \mid \cdot))$ un espace préhilbertien réel puis $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ une famille libre dans E. Le procédé de Gram-Schmidt permet d'orthonormaliser cette famille pour obtenir une famille orthonormale $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ de E. Voici l'algorithme :

$\boxed{1}$ Poser $e_1 = \dfrac{x_1}{\|x_1\|}$.

$\boxed{2}$ Une fois les vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_k$ calculés,

- poser $v_{k+1} = x_{k+1} - \displaystyle\sum_{j=1}^{k} (x_{k+1} \mid e_j) \cdot e_j$
- poser alors $e_{k+1} = \dfrac{v_{k+1}}{\|v_{k+1}\|}$

$\boxed{3}$ Reprendre à l'étape $\boxed{2}$ jusqu'au calcul de e_p.

Mise en œuvre : exercice 23.3

Exemple : reprenons l'exemple précédent et orthonormalisons la base canonique $(1, X, X^2)$ par le procédé de Gram-Schmidt. Notons $P_0 = 1, P_1 = X, P_2 = X^2$, la base canonique.

$\boxed{1}$ On pose $E_0 = \frac{P_0}{\|P_0\|}$, avec $\|P_0\| = \sqrt{(1 \mid 1)} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$. Ainsi, $E_0(X) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

$\boxed{2}$ On pose $V_1 = P_1 - (P_1|E_0) \cdot E_0$. Or

$$(P_1|E_0) \cdot E_0 = \frac{1}{3}(X \mid 1) \cdot 1 = \frac{1}{3}(0 + 1 + 2) \cdot E_0 = E_0$$

D'où $V_1 = P_1 - (P_1|E_0) \cdot E_0 = X - 1$. Reste à normaliser ce vecteur. Comme $\|F_1\| = \sqrt{2}$, on prend $E_1(X) = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - 1)$.

$\boxed{3}$ On pose $V_2 = P_2 - (P_2|E_0) \cdot E_0 - (P_2|E_1) \cdot E_1$. Or

$$\begin{aligned}(P_2|E_0) \cdot E_0 &= \frac{1}{3}(X^2 \mid 1) \cdot 1 = \frac{1}{3}(0 + 1 + 4) \cdot 1 = \frac{5}{3} \\ (P_2|E_1) \cdot E_1 &= \frac{1}{2}(X^2 \mid X - 1) \cdot (X - 1) = \frac{1}{2}(0 + 0 + 4) \cdot (X - 1) = 2 \cdot (X - 1)\end{aligned}$$

D'où $V_2 = X^2 - 2X + \frac{1}{3}$. Finalement, calculons $\|F_2\|$, on trouve $\|F_2\| = \sqrt{\frac{2}{3}}$, et on prend donc $E_2(X) = \sqrt{\frac{2}{3}}(X^2 - 2X + \frac{1}{3}) = \frac{1}{\sqrt{6}}\ (3X^2 - 6X + 1)$.

La famille $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (X - 1), \frac{1}{\sqrt{6}}\ (3X^2 - 6X + 1))$ est la base orthonormalisée à partir de la base canonique.

■ Projection orthogonale

❑ **Méthode 23.3.— Comment calculer la distance d'un vecteur à un sous-espace**
Dans un espace euclidien $(E, (\cdot \mid \cdot))$, pour calculer la distance d'un vecteur x de E à un sous-espace vectoriel F de E, on a deux techniques possibles.

- Travailler avec une base orthonormale :

  $\boxed{1}$ Déterminer une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_p)$ de l'espace F.

  $\boxed{2}$ Appliquer la formule : $d(x, F) = \sqrt{\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{p} (x \mid e_k)^2)}$.

- Calculer le projeté dans une base quelconque :

  $\boxed{0}$ Déterminer une base quelconque $(\chi_1, \ldots, \chi_p)$ de l'espace F.

  $\boxed{1}$ Poser le projeté orthogonal de x sur F : $p_F(x) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \cdot \chi_k$.

  $\boxed{2}$ Calculer les scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ en résolvant un système linéaire à l'aide des équations $(x - p_F(x) \mid \chi_k) = 0$, pour tout $k \in \{1, \ldots, p\}$.

  $\boxed{3}$ Appliquer la formule : $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$.

Mise en œuvre : exercice 23.14, exercice 23.5

Exemple : dans l'espace $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire habituel, calculer la distance du vecteur $(1, 1, 1, 1)$ au sous-espace vectoriel : $F = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right\}$.

Soit x dans $\mathbb{R}^4$. Le vecteur $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ appartient à l'ensemble F si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = -\dfrac{1}{2}(x_3 + x_4) \end{array} \right. \iff x \in \mathsf{Vect}\left(\left(2, -\frac{1}{2}, 1, 0\right), \left(0, -\frac{1}{2}, 0, 1\right)\right).$$

Une base de l'espace F est $\big((4, -1, 2, 0), (0, -1, 0, 2)\big)$: $\dim F = 2$. Posons alors $p(1, 1, 1, 1) = \lambda_1 \cdot (4, -1, 2, 0) + \lambda_2 \cdot (0, -1, 0, 2)$, la décomposition du projeté orthogonal de $(1, 1, 1, 1)$ sur F selon cette base. Le système $\left\{ \begin{array}{l} \big((1, 1, 1, 1) - p(1, 1, 1, 1) \mid (4, -1, 2, 0)\big) = 0 \\ \big((1, 1, 1, 1) - p(1, 1, 1, 1) \mid (0, -1, 0, 2)\big) = 0 \end{array} \right.$ conduit au système : $\left\{ \begin{array}{l} 21\lambda_1 + \lambda_2 = 5 \\ \lambda_1 + 5\lambda_2 = 1 \end{array} \right.$ de seule solution $(\lambda_1, \lambda_2) = \left(\dfrac{3}{13}, \dfrac{2}{13}\right)$. Ainsi : $p(1, 1, 1, 1) = \dfrac{1}{13}(12, -5, 6, 4)$ et la distance entre $(1, 1, 1, 1)$ et l'espace F vaut : $\|(1, 1, 1, 1) - p(1, 1, 1, 1)\| = \left\| \dfrac{(1, 18, 7, 9)}{13} \right\| = \sqrt{\dfrac{35}{13}}$.

Vrai/Faux

	Vrai	Faux
1. L'application $(f,g) \mapsto \int_0^1 f(t)\cdot g(t)\,dt$ définit un produit scalaire sur l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.	☐	☐
2. Dans un espace euclidien E muni d'un norme euclidienne $\|\cdot\|$, si x et y sont deux vecteurs colinéaires, alors $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$.	☐	☐
3. Si F est un sous-espace de E euclidien, si x est un vecteur de E, le projeté orthogonal de x sur F est le seul vecteur de F le plus proche de x (au sens de la norme euclidienne).	☐	☐
4. Si $\mathbb{R}^2$ est muni d'un produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$ et si A, B, C sont trois points différents, l'angle géométrique $\widehat{BAC}$ en A dans le triangle ABC est droit si et seulement si $(\overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{AC}) = 0$	☐	☐
5. Si $(E, (\cdot \mid \cdot))$ est un espace euclidien, si u est un vecteur de E, l'application $x \mapsto (x \mid u)$ est une application linéaire.	☐	☐
6. Il n'y a qu'un seul produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ qui fasse que la base canonique soit orthonormale.	☐	☐
7. Dans un espace euclidien de dimension n, toute famille orthonormale à n vecteurs est une base orthonormale.	☐	☐
8. Dans un espace euclidien $(E, (\cdot \mid \cdot))$, si deux vecteurs x et y vérifient : $(x \mid y) = \|x\| \cdot \|y\|$, alors ils sont colinéaires.	☐	☐
9. N'importe quelle base d'un sous-espace F d'un espace euclidien E peut être complétée en une base orthonormale de E.	☐	☐
10. Si f est une projection orthogonale dans un espace euclidien E, il existe une base orthonormée de E telle que la matrice représentant f selon cette base soit la matrice $\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$, mais la réciproque n'est pas vraie.	☐	☐

Énoncé des exercices

Produit scalaire, orthogonalité

Exercice 23.1 :
1. Montrer que l'application qui à tout couple de vecteurs $u = (x, y, z)$ et $v = (x', y', z')$ associe le nombre $x \cdot x' + 2y \cdot y' + 3z \cdot z'$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la norme du vecteur $(1, 2, 3)$ pour ce produit scalaire.

Exercice 23.2 : 1. Soit $x_1, \ldots, x_n$ des nombres réels.
- **a.** Montrer l'inégalité : $(x_1 + \cdots + x_n)^2 \leqslant n \times (x_1^2 + \cdots + x_n^2)$.
- **b.** Étudier le cas d'égalité.

2. Soit f et g deux fonctions continues et positives sur l'intervalle $[0, 1]$ telles que pour tout x dans $[0, 1]$, $f(x) \cdot g(x) \geqslant 1$.
- **a.** Montrer l'inégalité : $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ dx \times \int_0^1 g(x)\ dx \geqslant 1$.
- **b.** Étudier le cas d'égalité.

Exercice 23.3 : Soit n un entier naturel. On note $E = \mathbb{R}_n[X]$.
1. Montrer que l'application $(P(X), Q(X)) \mapsto \displaystyle\int_0^1 P(t) \cdot Q(t)\ dt$ définit un produit scalaire sur E, que l'on pourra noter $(\cdot \mid \cdot)$ par la suite.
2. Établir l'existence d'une base orthonormale $(P_0(X), P_1(X), \ldots, P_n(X))$ pour ce produit scalaire avec pour tout k dans $\{0, \ldots, n\}$, $\deg(P_k) = k$.
3. On prend $n = 2$. Orthonormaliser la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ par le procédé de Gram-Schmidt.

Exercice 23.4* :
1. Montrer que la famille de vecteurs $\mathcal{B} = \Big((1, 2), (3, 1)\Big)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer qu'il existe un produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$ sur $\mathbb{R}^2$ telle que la base $\mathcal{B}$ soit orthonormale.
3. Tracer alors le cercle unité pour ce produit scalaire : $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y)\| = 1\}$.

Exercice 23.5* : Soit $n \geqslant 1$ un entier. On travaille dans l'espace des matrices $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
1. Montrer que l'application $(A, B) \mapsto \mathrm{Tr}(A^T \times B)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Que peut-on dire de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
2. Montrer que pour toute matrice A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a : $|\mathrm{Tr}(A)| \leqslant \sqrt{n} \times \|A\|$.
3. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices symétriques (matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant ${}^tM = M$).
- **a.** Quel est l'orthogonal de $\mathcal{S}$?
- **b.** En déduire pour toute matrice $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la borne inférieure :

$$\inf \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} - m_{ij})^2 \ ; \ M = (m_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{S} \right\}.$$

4. Montrer que si $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifie $U^T \times U = U \times U^T = I_n$, alors pour toute matrice A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|U \times A\| = \|A \times U\| = \|A\|$.
5. Montrer que pour toutes matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|A \times B\| \leqslant \|A\| \times \|B\|$.

■ Espaces vectoriels euclidiens

Exercice 23.6 : Soit $(E, (\cdot \mid \cdot))$ un espace euclidien et $(e_1, \ldots, e_p)$ une famille de vecteurs unitaires dans E telle que :

$$\forall x \in E, \quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{p} (x \mid e_k)^2.$$

Montrer que la famille $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base orthonormale de E.

Exercice 23.7* : Soit $(E, (\cdot \mid \cdot))$ un espace euclidien.

1. Montrer que l'application $\Phi : a \mapsto \Big(x \mapsto (a \mid x)\Big)$ est un isomorphisme entre les espaces E et $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.

2. En déduire que pour toute forme linéaire $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, il existe un unique vecteur a dans E tel que $\varphi : x \mapsto (a \mid x)$.

Exercice 23.8 : Soit $(E, (\cdot \mid \cdot))$ un espace euclidien, puis F et G deux sous-espaces de E.

1. Montrer que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

2. A-t-on $(F \cup G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$?

Exercice 23.9* : Soit $(E, (\cdot \mid \cdot))$ un espace euclidien de dimension p, puis $e_1, \ldots, e_{p+1}$ des vecteurs unitaires dans E deux à deux distincts. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall (i, j) \in \{1, \ldots, p+1\}^2, \quad i \neq j \Rightarrow (e_i \mid e_j) = \alpha.$$

1. Calculer α.

2. Calculer le vecteur $e_1 + \cdots + e_{p+1}$.

■ Projections orthogonales, distances

Exercice 23.10 : Soit E un espace euclidien et $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur (*i.e.* $p^2 = p$). Montrer que p est une projection orthogonale si et seulement si $\forall (x, y) \in E^2, \quad \big(p(x) \big| y\big) = \big(x \big| p(y)\big)$

Exercice 23.11 : Soit E un espace euclidien et f dans $\mathcal{L}(E)$. On suppose que f est un projecteur. Montrer que le projecteur f est une projection orthogonale si et seulement si : $\forall x \in E, \|f(x)\| \leq \|x\|$

Exercice 23.12 : Soit $d \geqslant 1$ un entier. Montrer qu'il est impossible de trouver $(d + 2)$ vecteurs $u_1, \ldots, u_{d+2}$ dans l'espace euclidien habituel $\mathbb{R}^d$ tels que pour tous entiers $i \neq j$ entre 1 et d, $(u_i \mid u_j) < 0$.

Exercice 23.13 : Soit $m = \inf\limits_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \displaystyle\int_0^1 \left[t^2 - (at + b)\right]^2 dt$.

1. Justifier sans calcul, l'existence de m.

2. Déterminer m.

Exercice 23.14* : Montrer que l'ensemble $\left\{ \displaystyle\int_0^\pi \Big(e^x - a \cdot \cos x - b \cdot \sin x\Big)^2 dx \ ; \ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ admet un minimum et le calculer.

Indications

Ex. 23.2

2. a. *On utilisera l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour un certain produit scalaire sur l'espace des fonctions continues sur* $[0,1]$.

Ex. 23.3

2. *On pourra établir le résultat par récurrence forte sur* k.

Ex. 23.4

On note $\Phi(\cdot,\cdot)$ *le produit scalaire habituel sur* $\mathbb{R}^2$ *et* f *l'endomorphisme dans* $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ *tel que* $f(1,2) = (1,0)$ *et* $f(3,1) = (0,1)$, *on montrera que* $\big((x,y),(x',y')\big) \mapsto \Phi\big(f(x,y), f(x',y')\big)$ *est une application qui répond à la question.*

Ex. 23.5

5. *On commencera par montrer que* $\|A \times B\| \leqslant \|{}^tA \times A\| \times \|B \times B^T\|$. *Ensuite, en posant* $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, *on établira l'inégalité :* $\sum_{k=1}^n a_{ki} \cdot a_{kj} \leqslant \alpha_i \times \alpha_j$, *avec* $\alpha_i = \sum_{k=1}^n a_{ki}^2$, *pour enfin simplifier l'expression* $\sum_{i,j=1}^n \alpha_i \cdot \alpha_j$.

Ex. 23.9

1. *On pourra trouver une valeur en raisonner tout d'abord dans les cas* $p = 1$ *et* $p = 2$. *On pourra alors faire intervenir une récurrence sur* p.

2. *On pourra calculer le carré de la norme de ce vecteur.*

Ex. 23.11

Pour l'implication réciproque, on utilisera l'inégalité pour des vecteurs de la forme $\lambda \cdot x_F + x_G$, *avec* $F = \operatorname{Im} f$ *et* $G = \operatorname{Ker} f$.

Ex. 23.12

On pourra se ramener au cas où les vecteurs sont unitaires. On procèdera ensuite par récurrence sur l'entier d, *pour faire intervenir une projection orthogonale.*

Ex. 23.14

On définira le sous-espace $E = \mathsf{Vect}\,(\exp, \cos, \sin)$ *de l'espace des fonctions continues sur* $[0,\pi]$, *puis le produit scalaire* $(f \mid g) \mapsto \displaystyle\int_0^\pi f(t) \cdot g(t)\ dt$ *pour faire intervenir une projection orthogonale.*

Corrigé des vrai/faux

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F	F	V	F	V	V	V	V	F	F

1. Ce serait un produit scalaire seulement sur l'espace des fonctions définies et continues sur $[0, 1]$.
2. Cela ne marche que si x et y sont colinéaires de même sens.
4. Le résultat est juste si l'on munit $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire habituel pour lequel la base canonique est orthonormale. En prenant le produit scalaire $\Big((x_1, y_1) \mid (x_2, y_2)\Big) = 2x_1 \cdot x_2 + 5y_1 \cdot y_2$ par exemple, on peut avoir orthogonalité sans avoir un angle géométrique égal à $\dfrac{\pi}{2}$.
6. Le produit scalaire qu'il convient de choisir est le produit scalaire habituel sur $\mathbb{R}^n$:

$$(x \mid y) = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k.$$

8. De plus, les vecteurs x et y sont colinéaires de même sens.
9. L'énoncé n'a aucune chance d'être vrai si la base choisie pour F n'est pas orthonormale. Si elle l'est, effectivement, on peut la compléter en une base orthonormale de E.
10. En fait, la réciproque est vraie.

Erreurs classiques

- Ne pas oublier d'exploiter complètement l'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz ou triangulaire pour une norme euclidienne.
- Ne pas se lancer dans la formule $(x \parallel y) = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos\theta$. Celle-ci n'est valable que dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire habituel par exemple. Cette formule n'a aucun sens dans d'autres situations.
- Ne pas se lancer dans des calculs inutiles pour trouver un vecteur x orthogonal à deux vecteurs e_1 et e_2. Il faut penser au produit vectoriel $x = e_1 \wedge e_2$.
- Ne pas oublier les valeurs absolues dans la formule : $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.

Corrigé des exercices

Exercice 23.1

1. L'application que l'on note Φ est symétrique car $x \cdot x' + 2y \cdot y' + 3z \cdot z' = x' \cdot x + 2y' \cdot y + 3z' \cdot z$.
Elle est de plus linéaire par rapport à la première variable, donc aussi à la seconde.
Si $u = (x, y, z)$, alors $\Phi(u, u) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ qui est un nombre positif et ce nombre a toutes les chances d'être strictement positif, sauf lorsque $x = y = z = 0$, c'est-à-dire $u = (0, 0, 0)$.
2. La norme vaut : $\sqrt{1^1 + 2 \times 2^2 + 3 \times 3^2} = \sqrt{36} = 6$. ▲

Exercice 23.2

1.

a. On désigne par $(\cdot \mid \cdot)$ le produit scalaire habituel sur l'espace $\mathbb{R}^n$ et on pose $u = (1, 1, \ldots, 1)$ puis $v = (x_1, \ldots, x_n)$. Par conséquent, $(u \mid v) = \sum_{k=1}^{n} x_k$ et l'**inégalité de Cauchy-Schwarz** implique :

$$(u \mid v)^2 \leqslant \|u\|^2 \times \|v\|^2,$$

ce qui conduit directement à l'inégalité escomptée.

b. L'égalité a lieu lorsque $(u \mid v)^2 = \|u\|^2 \times \|v\|^2$: on a égalité dans l'**inégalité de Cauchy-Schwarz**, ce qui implique que les vecteurs u et v sont colinéaires : toutes les composantes du vecteur v sont égales à une constante λ.
Réciproquement, il est clair que cette condition implique l'égalité dans la formule de l'énoncé.
Le cas d'égalité ne se produit que lorsque tous les x_k sont égaux entre eux.

2.

a. On désigne maintenant par $(\cdot \mid \cdot)$ le produit scalaire :

$$(\varphi \mid \psi) = \int_0^1 \varphi(x) \times \psi(x) \ dx$$

dans l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$. Il est autoriser de poser $\varphi = \sqrt{f}$ et $\psi = \sqrt{g}$ qui restent continues sur $[0, 1]$. Par hypothèse, on a :

$$\forall x \in [0, 1], \quad \varphi(x) \times \psi(x) \geqslant 1.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz montre que :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x) \ dx \times \int_0^1 g(x) \ dx &= \int_0^1 \varphi^2(x) \ dx \times \int_0^1 \psi^2(x) \ dx \\
&= \left\|\varphi\right\| \times \left\|\psi\right\| \\
&\geqslant |(\varphi \mid \psi)| = \left| \int_0^1 \varphi(x) \times \psi(x) \ dx \right| \geqslant 1.
\end{aligned}$$

b. Lorsque l'on a égalité, l'égalité se produit dans l'égalité de Cauchy-Schwarz : $1 = (\varphi \mid \psi) = \left\|\varphi\right\| \times \left\|\psi\right\|$: les vecteurs φ et ψ sont colinéaires et de même sens. De plus, $\varphi \times \psi \geqslant 1$ et la fonction $(\varphi \times \psi - 1)$ est continue, positive et d'intégrale nulle sur l'intervalle $[0, 1]$: cette fonction est nulle et $\varphi \times \psi = 1$, ce qui se traduit par :

$$f \times g = 1.$$

Or, les vecteurs φ et ψ étant colinéaires de même sens, on peut poser : $\psi = c{\cdot}\varphi$, avec une constante positive c : $g = c^2{\cdot}f$ et finalement : $(c{\cdot}f)^2 = 1$, puis $c{\cdot}f = 1$, car la fonction f prend uniquement des valeurs positives. En conclusion, la fonction f est constante égale à $\dfrac{1}{c}$ et la fonction g est elle aussi constante égale à c.
Réciproquement, il est évident que si les fonctions f et g sont constantes positives et inverses l'une de l'autre, alors on a l'égalité :

$$\int_0^1 f(x)\ dx \times \int_0^1 g(x)\ dx = 1.$$

L'égalité ne se produit que dans ce cas-là ! ▲

Exercice 23.3

1. L'application est symétrique car pour tous polynômes $P(X)$ et $Q(X)$:

$$(P(X) \mid Q(X)) = \int_0^1 P(t) \cdot Q(t)\ dt = \int_0^1 Q(t) \cdot P(t)\ dt = (Q(X) \mid P(X)).$$

L'application est bilinéaire, par exemple linéaire par rapport à la première variable car pour tous polynômes P_1, P_2, Q et tout scalaire λ, on peut écrire grâce à la linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned}(\lambda \cdot P_1(X) + P_2(X) \mid Q(X)) &= \int_0^1 (\lambda \cdot P_1(t) + P_2(t)) \cdot Q(t)\ dt \\ &= \lambda \int_0^1 P_1(t) \cdot Q(t)\ dt + \int_0^1 P_2(t) \cdot Q(t)\ dt \\ &= \lambda(\cdot P_1(X) \mid Q(X)) + (P_2(X) \mid Q(X)).\end{aligned}$$

L'application est positive car pour tout polynôme $P(X)$ dans $\mathbb{R}_n[X]$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (P(t))^2\ dt$ est positive car la fonction intégrée est positive.
Il reste à montrer que l'application est définie-positive : c'est souvent le plus délicat, comme nous allons le constater ici.

Soit $P(X)$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $(P(X) \mid P(X)) = 0$. Alors, $\displaystyle\int_0^1 (P(t))^2\ dt = 0$.

Ne pas oublier qu'il faut montrer que le polynôme $P(X)$ est nul...

La fonction $t \mapsto P^2(t)$ est continue et positive sur l'intervalle $[0, 1]$ et d'intégrale nulle : la fonction est nulle ! La fonction polynomiale $t \mapsto P(t)$ est nulle sur l'intervalle $[0, 1]$ et le polynôme $P(X)$ admet donc une infinité de racines : il s'agit du polynôme nul.

2. Orthonormalisons par le procédé de Gram-Schmidt la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$. Cela donne une base orthonormale (au sens du produit scalaire de la première question) que l'on note $(P_0(X), P_1(X), \ldots, P_n(X))$ qui vérifie en particulier :

$$\forall k \in \{0, \ldots, n\}, \quad \mathsf{Vect}\,(1, X, \ldots, X^k) = \mathsf{Vect}\,(P_0(X), P_1(X), \ldots, P_k(X)).$$

On montre par récurrence forte l'assertion : $\mathcal{A}(k) = \ll \deg(P_k) = k \gg$.

• **Initialisation :** Comme $\mathsf{Vect}\,(1) = \mathsf{Vect}\,(P_0(X))$, alors le polynôme $P_0(X)$ est non nul et constant : $\deg(P_0) = 0$.

• **Hérédité :** Soit $k \in \mathbb{N}$ Supposons les assertions $\mathcal{A}(j)$ vraies pour j entre 0 et un certain rang k, avec $k < n$.
Étant donné : $\mathsf{Vect}\,(1, X, \ldots, X^{k+1}) = \mathsf{Vect}\,(P_0(X), P_1(X), \ldots, P_{k+1}(X))$, le polynôme $P_{k+1}(X)$ appartient à $\mathsf{Vect}\,(1, X, \ldots, X^{k+1})$ donc est de degré inférieur ou égal à $(k+1)$. Si par mésaventure, $\deg(P_{k+1}) \neq k+1$, alors $\deg(P_{k+1}) \leqslant k$, donc :

$$\begin{aligned}\mathsf{Vect}\,(P_0(X), \ldots, P_{k+1}(X)) &= \mathsf{Vect}\,(P_0(X), \ldots, P_k(X)) + \mathsf{Vect}\,(P_{k+1}(X)) \\ &= \mathsf{Vect}\,(1, \ldots, X^k) + \mathsf{Vect}\,(P_{k+1}(X)) = \mathbb{R}_k[X]\end{aligned}$$

et ceci vient en contradiction avec :

$$\mathbb{R}_{k+1}[X] = \mathsf{Vect}\,(1, X, \ldots, X^{k+1}) = \mathsf{Vect}\,(P_0(X), P_1(X), \ldots, P_{k+1}(X)).$$

Ainsi, $\deg(P_{k+1}) = k+1$.

• **Conclusion :** Par récurrence, nous avons montré que toutes les assertions $\mathcal{A}(k)$ sont vraies pour k variant dans $\{0, \ldots, n\}$.

3. On applique la méthode à cet effet. Le premier vecteur de base est $P_0(X) = \frac{1}{\|1\|} = 1$.
Le deuxième vecteur de base est de la forme $P_1(X) = \alpha + \beta X$, avec $(P_1 \mid P_0) = 0$, donc : $\alpha = -\dfrac{\beta}{2}$, puis $\beta^2 = 12$ et $\beta > 0$, donc $P_1(X) = 2\sqrt{3}\left(X - \dfrac{1}{2}\right)$.
Enfin, le dernier polynôme $P_2(X)$ est à chercher sous la forme : $P_2(X) = \alpha_1 P_0(X) + \alpha_2 P_1(X) + \beta X^2$. On trouve successivement : $\alpha_1 = -\dfrac{\beta}{3}$, $\alpha_2 = -\dfrac{\beta}{2\sqrt{3}}$, $P_2(X) = \beta\left(X^2 - X + \dfrac{1}{6}\right)$ et $\beta = 6\sqrt{5}$. La réponse est la famille :

$$\left(1, 2\sqrt{3}\left(X - \tfrac{1}{2}\right), 6\sqrt{5}\left(X^2 - X + \tfrac{1}{6}\right)\right).$$

▲

Exercice 23.4

1. La famille considérée est une famille libre à deux vecteurs dans l'espace $\mathbb{R}^2$ de dimension 2 : c'est une base !

2. Il existe une seule application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ telle que $f(1,2) = (1,0)$ et $f(3,1) = (0,1)$, car on vient de déterminer un endomorphisme sur une base de $\mathbb{R}^2$. Désignons par $\Phi(\cdot,\cdot)$ le produit scalaire habituel sur $\mathbb{R}^2$. On pose alors pour tous vecteurs (x,y) et (x',y') de $\mathbb{R}^2$:

$$\Big((x,y) \mid (x',y')\Big) = \Phi\Big(f(x,y), f(x',y')\Big).$$

Par symétrie de l'application Φ, l'application $(\cdot \mid \cdot)$ l'est encore. De plus, par composition des applications linéaires $(x,y) \mapsto \Phi\Big((x,y),u_0\Big)$ et f, l'application $(\cdot \mid \cdot)$ est linéaire par rapport à la première variable donc aussi par rapport à la deuxième.

On a pour tout vecteur (x,y) de $\mathbb{R}^2$, $\Big((x,y) \mid (x,y)\Big) = \Phi(f(x,y), f(x,y))$ qui est positif car l'application Φ est positive. Enfin, si $\Big((x,y) \mid (x,y)\Big) = 0$, alors $\Phi(f(x,y), f(x,y)) = 0$ et comme le produit scalaire habituel Φ est défini-positif, ceci entraîne : $f(x,y) = (0,0)$. De plus, l'endomorphisme f transforme la base de la première question en la base canonique : il s'agit d'un isomorphisme et l'égalité $f(x,y) = (0,0)$ implique $(x,y) \in \operatorname{Ker} f = \{(0,0)\}$: l'application $(\cdot \mid \cdot)$ est définie-positive : il s'agit d'un produit scalaire.

Enfin, le produit scalaire $((1,2) \mid (3,1))$ est égal à : $\Phi\Big(f(1,2), f(3,1)\Big) = \Phi\Big((1,0),(0,1)\Big) = 0$ et la norme de $(1,2)$ vaut :

$$\sqrt{\Phi\Big(f(1,2), f(1,2)\Big)} = \sqrt{\Phi\Big((1,0),(1,0)\Big)} = 1$$

Idem pour la norme de $(3,1)$. Dans l'espace euclidien $(\mathbb{R}^2, (\cdot \mid \cdot))$, la base $\mathcal{B}$ est orthonormale.

3. Soit (x,y) un vecteur de $\mathbb{R}^2$. Le vecteur (x,y) vérifie $\|(x,y)\| = 1$ si et seulement si le vecteur $f(x,y)$ appartient au cercle trigonométrique $\mathcal{C} = \{(\cos\theta, \sin\theta) \ ; \ \theta \in \mathbb{R}\}$. L'ensemble recherché est donc :

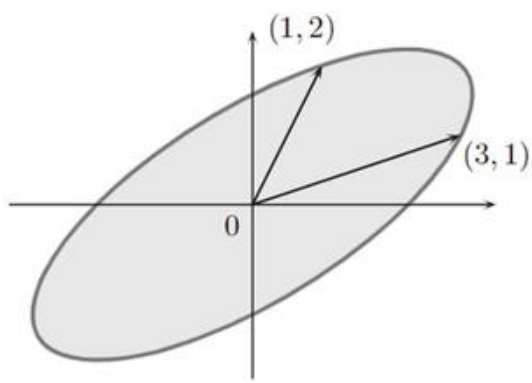
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) \in \mathcal{C}\} = f^{-1}(\mathcal{C}) = \Big\{f^{-1}(\cos\theta, \sin\theta) \ ; \ \theta \in \mathbb{R}\Big\}.$$

L'application réciproque de la bijection f vérifie :

$$f^{-1}(1,0) = (1,2) \quad \text{et} \quad f^{-1}(0,1) = (3,1).$$

La matrice A représentant f^{-1} selon la base canonique de $\mathbb{R}^2$ vaut : $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et donc : $f^{-1}(x,y) = (x+3y, 2x+y)$.

Le cercle unité pour le produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$ est donc la courbe paramétrée : $\begin{cases} x(\theta) = \cos\theta + 3\sin\theta \\ y(\theta) = 2\cos\theta + \sin\theta \end{cases}$. On pourrait obtenir une équation cartésienne de cette courbe : on tomberait sur une conique qui consiste en une courbe fermée et bornée, c'est-à-dire une ellipse, centrée en l'origine et passant par les points $(1,2)$ et $(3,1)$.



▲

Exercice 23.5

1. Pour toutes matrices $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B = (b_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, la matrice $A^T \times B$ a pour terme général :

Il s'agit d'un produit scalaire usuel : vous devez connaître parfaitement cette démonstration !

$$(A^T \times B)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} \cdot b_{kj}.$$

On en déduit $\mathrm{Tr}(A^T \times B) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ki} \cdot b_{ki} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{ij}$.

Il devient alors clair que l'application $(A, B) \mapsto \mathrm{Tr}(A^T \times B)$ est symétrique, bilinéaire, positive et définie-positive puisque le seul moyen d'avoir $\mathrm{Tr}(A^T A) = 0$, c'est-à-dire : $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 = 0$ est que tous les coefficients a_{ij} soient nuls : on a bien affaire à un produit scalaire.

On en déduit qu'en notant $(E_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (la matrice E_{ij} ne comportant pratiquement que des termes nuls, sauf un 1 placé ligne i et colonne j), alors le produit scalaire $(E_{ij} \mid E_{kl})$ vaut 0 si $E_{ij} \neq E_{kl}$ et vaut 1 sinon : la base canonique est une base orthonormée !

2. L'**inégalité de Cauchy-Schwarz** donne : $|(I_n \mid A)| \leqslant \|I_n\| \times \|A\|$, ce qui se réécrit :

$$|\mathrm{Tr}(A)| \leqslant \sqrt{\text{somme des carrés des coefficients de } I_n} \times \|A\|,$$

d'où la formule.

3.

a. Soit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice dans l'orthogonal $\mathcal{S}^\perp$. Pour toute matrice symétrique $M = (m_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, on obtient :

$$(A \mid M) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \times m_{ij} = 0.$$

En prenant pour M les matrices $M = E_{kk}$, pour k entre 1 et n, cela donne : $0 = a_{kk}$. La matrice A comporte une diagonale nulle.

En prenant maintenant les matrices $M = E_{ij} + E_{ji}$, avec $i < j$, on obtient : $0 = a_{ij} + a_{ji}$: la matrice A est anti-symétrique (ou encore : $A^T = -A$).

Réciproquement, si A est une matrice anti-symétrique, pour toute matrice anti-symétrique M, on a :

$$(A \mid M) = \mathrm{Tr}(A^T M) = -\mathrm{Tr}(A \times M) = -\mathrm{Tr}(M \times A) = -\mathrm{Tr}(M^T A) = -(M \mid A).$$

Le produit scalaire $(A \mid M)$ est nul et la matrice A est orthogonale à toutes les matrices symétriques : l'orthogonal $\mathcal{S}^\perp$ est exactement formé de toutes les matrices anti-symétriques.

b. La borne inférieure à calculer vaut en fait : $\inf\left\{\|A - M\|^2 \ ; \ M \in \mathcal{S}\right\}$.

La borne inférieure est atteinte en la matrice $M = p(A)$, où p est la projection orthogonale sur $\mathcal{S}$, c'est-à-dire la projection sur $\mathcal{S}$ parallèlement à l'espace $\mathcal{A}$ des matrices anti-symétriques.

Or, pour toute matrice M, l'égalité $M = \dfrac{M + M^T}{2} + \dfrac{M - M^T}{2}$ est l'unique décomposition du vecteur M comme somme d'un vecteur de $\mathcal{S}$ et d'un vecteur de $\mathcal{A}$. Pour la projection, on ne retient que la composante selon $\mathcal{S}$: $p(A) = \dfrac{A + A^T}{2}$ et finalement la borne inférieure à calculer vaut :

$$\|A - p(A)\|^2 = \left\| \frac{A - A^T}{2} \right\|^2 = \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} - a_{ji})^2.$$

4. Soit U une matrice telle que $U^T \times U = U \times U^T = I_n$ et A une matrice dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors,

$$\begin{aligned} \|U \times A\|^2 = \mathrm{Tr}\Big((U \times A)^T \times (U \times A) \Big) &= \mathrm{Tr}\Big(A^T \times U^T \times U \times A \Big) \\ &= \mathrm{Tr}({}^t A \times A) = \|A\|^2, \end{aligned}$$

car $U^T \times U = I_n$.
De même, $(A \times U)^T \times (A \times U) = U^T \times \Big(A^T \times A \times U \Big)$ et cette matrice a la même trace que la matrice $\Big(A^T \times A \times U \Big) \times U^T = A^T \times A$, ce qui prouve $\|A \times U\| = \|A\|$.

5. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ deux matrices dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. D'après l'expression de la norme euclidienne :

D'après les propriétés de la trace, on sait que l'on peut commuter les produits sous la trace.

$$\begin{aligned} \|A \times B\|^2 &= \mathrm{Tr}\Big((A \times B)^T (A \times B) \Big) = \mathrm{Tr}(B^T A^T A B) \\ &= \mathrm{Tr}((B^T A^T A) \times B) = \mathrm{Tr}(B \times (B^T A^T A)) \\ &= \mathrm{Tr}\Big((A^T A)^T (B B^T) \Big) = (\, A^T A \mid B B^T). \end{aligned}$$

D'après l'**inégalité de Cauchy-Schwarz**, on en déduit :

$$\|A \times B\|^2 \leqslant \|\, A^T A\| \times \|B B^T\|.$$

Or, la norme $\|\, A^T A\|$ vaut : $\sqrt{\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \Big(A^T A \Big)_{ij}^2} = \sqrt{\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki} \cdot a_{kj} \right)^2}$.
L'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée aux deux vecteurs $(a_{1i}, \ldots, a_{ni})$ et $(a_{1j}, \ldots, a_{nj})$ de $\mathbb{R}^n$ donne :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki} \cdot a_{kj} \right)^2 \leqslant \alpha_i \times \alpha_j, \quad \text{avec} \quad \alpha_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}^2.$$

On en déduit :

$$\|\, A^T A\| \leqslant \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \cdot \alpha_j} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \right) \times \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \right)} = \sum_{p=1}^{n} \alpha_p.$$

Ainsi, $\| A^T A\| \leqslant \sum_{p,k=1}^{n} a_{kp}^2 = \|A\|^2$. On montrerait de la même manière que : $\|BB^T\| \leqslant \|B\|^2$. En définitive, on obtient : $\|A \times B\|^2 \leqslant \|A\|^2 \times \|B\|^2$, bref : exactement ce qu'il faut en prenant les racines carrées ! ▲

Exercice 23.6

Soit un entier j entre 1 et p. L'application de la formule au vecteur $x = e_j$ donne :

L'exercice est la réciproque du théorème de Pythagore !

$$1 = \|e_j\|^2 = \sum_{k=1}^{p} (e_j \mid e_k)^2 = \sum_{k=1;k\neq j}^{p} (e_j \mid e_k)^2 + \|e_j\|^2.$$

Par conséquent, la somme $\sum_{k=1;k\neq j}^{p} (e_j \mid e_k)^2$ est nulle et n'est composée que de termes positifs : chaque terme est nul, ce qui signifie que pour tout entier k entre 1 et p et différent de j, les vecteurs e_j et e_k sont orthogonaux. La famille $(e_1, \ldots, e_p)$ est orthogonale et les vecteurs qui la composent sont unitaires. Il s'agit d'une famille orthonormale. Il ne reste plus dès lors qu'à montrer que la famille $(e_1, \ldots, e_p)$ est génératrice.

En l'absence d'informations sur $\dim(E)$, *nous n'avons pas d'autres choix.*

Posons $F = \mathsf{Vect}\,(e_1, \ldots, e_p)$ et prenons un vecteur x dans $F^\perp$. La formule appliquée au vecteur x donne, du fait que les vecteurs x et e_k sont orthogonaux : $\|x\|^2 = 0$, donc $x = 0_E$ et l'espace $F^\perp$ est réduit à $\{0_E\}$. Autrement dit, l'espace $F = (F^\perp)^\perp = \{0_E\}^\perp$ est l'ensemble des vecteurs orthogonaux au vecteur nul, c'est-à-dire l'ensemble de tous les vecteurs sans exception : $F = E$ et la famille $(e_1, \ldots, e_p)$ est génératrice. ▲

Exercice 23.7

1. Commençons par montrer que l'application Φ est linéaire. Soit a et b deux vecteurs dans E puis un scalaire réel λ. Alors :

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda \cdot a + b) &= \Big(x \mapsto (\lambda \cdot a + b \mid x)\Big) \\ &= \lambda \times \Big(x \mapsto (a \mid x)\Big) + \Big(x \mapsto (b \mid x)\Big) = \lambda \cdot \Phi(a) + \Phi(b).\end{aligned}$$

On remarque ensuite que l'application Φ est linéaire d'un espace E de dimension $\dim E$ vers l'espace $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ de dimension

$$\dim \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) = \dim(E) \times \dim \mathbb{R} = \dim E.$$

Les espaces de départ et d'arrivée étant de même dimension, il suffit de montrer que l'application Φ est injective : ce sera alors un isomorphisme.
Soit alors un vecteur a dans $\operatorname{Ker}\Phi$. L'application $x \mapsto (a \mid x)$ est l'application nulle. Ainsi, l'évaluation en $x = a$ fournit : $(a \mid a) = 0$, d'où $a = 0_E$: le noyau $\operatorname{Ker}\Phi$ est réduit à $\{0_E\}$. L'application Φ est tout à la fois : injective et bijective.
2. Soit φ une forme linéaire dans $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$. L'élément $a = \Phi^{-1}(\varphi)$ est le seul vecteur de E vérifiant : $\Phi(a) = \varphi$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in E, \quad \varphi(x) = (a \mid x).$$

▲

Corrigé

Exercice 23.8

1. Soit x dans $(F+G)^\perp$. Alors le vecteur x est orthogonal à tous les vecteurs de $(F+G)$, en particulier à tous les vecteurs de F et tous les vecteurs de G : le vecteur x appartient à la fois à $F^\perp$ et à $G^\perp$ donc à l'intersection.
Réciproquement, soit x dans $F^\perp \cap G^\perp$. Soit a dans $F+G$. On décompose a selon : $a = a_F + a_G$, avec a_F dans F et a_G dans G. On en déduit :

$$(a \mid x) = (a_F \mid x) + (a_G \mid x) = 0,$$

et le vecteur x est orthogonal à tous les vecteurs de $F+G$: $x \in (F+G)^\perp$.
2. La réponse est oui. En effet, en posant la partie $\mathcal{A} = F \cup G$, on sait que : $\mathcal{A}^\perp = \mathsf{Vect}\,(\mathcal{A})^\perp$. Or ici, $\mathsf{Vect}\,(\mathcal{A}) = \mathsf{Vect}\,(F \cup G) = F + G$ et donc $(F \cup G)^\perp = (F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$. ▲

Exercice 23.9

1. On va montrer par récurrence sur $p = \dim E$ que : $\alpha = -\frac{1}{p}$.

• **Initialisation :** Lorsque $p = 1$, les vecteurs e_1 et e_2 sont unitaires et différents dans une droite vectorielle ; ils sont opposés et :

$$\alpha = (e_1 \mid e_2) = (e_1 \mid -e_1) = -\|e_1\|^2 = -1.$$

• **Hérédité :** Supposons la formule vraie pour une certaine dimension $p \geqslant 1$. On se place maintenant dans un espace euclidien de dimension $(p+1)$ avec donc des vecteurs unitaires $e_1, \ldots, e_{p+2}$. Soit f le projecteur orthogonal sur $F = \mathsf{Vect}\,(e_{p+2})^\perp$. Si x est un vecteur de E, en posant $x = \lambda \cdot e_{p+2} + x_\perp$, avec $x_\perp \in F$, alors :

$$(x \mid e_{p+2}) = \lambda \cdot \|e_{p+2}\|^2 \quad \text{et} \quad \lambda = (x \mid e_{p+2}),$$

puis $f(x) = x_\perp = x - (x \mid e_{p+2}) \cdot e_{p+2}$.
On en déduit :

$$\forall i \in \{1, \ldots, p+1\}, \quad f(e_i) = e_i - \alpha \cdot e_{p+2}.$$

Remarquons déjà qu'aucun vecteur $f(e_i)$ n'est nul car sinon on aurait $e_i \in \operatorname{Ker} f = \mathsf{Vect}\,(e_{p+2})$, puis $e_i = -e_{p+2}$ et les vecteurs e_1 et e_2 seraient égaux. On pose alors pour tout i entre 1 et $(p+1)$:

$$\varepsilon_i = \frac{f(e_i)}{\|f(e_i)\|}, \qquad \text{de sorte que le vecteur } \varepsilon_i \text{ est unitaire.}$$

Or, pour tout $i \in \{1, \ldots, p+1\}$, on a :

$$\|f(e_i)\|^2 = \|e_i\|^2 - 2\alpha(e_i \mid e_{p+2}) + \alpha^2 \cdot \|e_{p+2}\|^2 = 1 - \alpha^2.$$

Il est à noter qu'il est impossible que α^2 vale 1 sinon, on aurait égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $(e_i \mid e_{p+1}) = \|e_i\| \cdot \|e_{p+2}$, ce qui impliquerait que les vecteurs e_i et e_{p+2} soient colinéaires de même sens donc égaux car unitaires. Pour tous indices $i \neq j$ entre 1 et $p+1$, on obtient :

$$(\varepsilon_i \mid \varepsilon_j) = \frac{(e_i - \alpha \cdot e_{p+2} \mid e_j - \alpha \cdot e_{p+2})}{1 - \alpha^2} = \frac{\alpha - \alpha^2}{1 - \alpha^2} = \frac{\alpha}{1 + \alpha}.$$

Cette question explique l'angle entre deux liaisons $C - H$ dans une molécule de méthane CH_4, cet angle valant $\arccos -\frac{1}{3} \simeq 109,5°$.

L'hypothèse de récurrence dans l'espace euclidien F de dimension $\dim E - 1 = p$ s'applique aux vecteurs unitaires et deux à deux distincts $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p$: la constante $\dfrac{\alpha}{1+\alpha}$ vaut donc $-\dfrac{1}{p}$, ce qui implique : $\alpha = -\dfrac{1}{p+1}$.

• **Conclusion :** La récurrence est terminée !

2. On calcule le carré de la norme avec $\alpha = -\frac{1}{p}$:

$$\begin{aligned}\|e_1 + \cdots + e_{p+1}\|^2 &= \sum_{k=1}^{p+1} \|e_k\|^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq p+1} (e_i \mid e_j) \\ &= p + 1 + 2 \times \binom{p+1}{2} \times \alpha \\ &= p + 1 + 2 \times \frac{(p+1) \times p}{2} \times \frac{-1}{p} = 0\end{aligned}$$

La norme du vecteur $e_1 + \cdots + e_n$ est nulle : c'est le vecteur nul ! ▲

Exercice 23.10

• **La condition est nécessaire :** supposons que p est une projection orthogonale. Notons $F = \operatorname{Im} p$ et $F^\perp = \operatorname{Ker} p$. Soit $(x, y) \in E^2$, alors

$$\big(p(x)\big|y\big) = \big(p(x)\big|p(y)\big) + \big(p(x)\big|y - p(y)\big)$$

Or $p(x) \in F$ et $y - p(y) \in F^\perp$, de sorte que le produit scalaire est nul. Ainsi

$$\big(p(x)|y\big) = \big(p(x)\big|p(y)\big)$$

En échangeant les rôles de x et y, on obtient de même

$$\big(x|p(y)\big) = \big(p(x)\big|p(y)\big)$$

• **La condition est suffisante :** soit p un projecteur vérifiant

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \big(p(x)\big|y\big) = \big(x|p(y)\big)$$

Notons $F = \operatorname{Im} p$ et $G = \operatorname{Ker} p$. Il s'agit de prouver que $G = F^\perp$.

- Montrons que $G \subset F^\perp$. Soit donc $(x, u) \in G \times F$, alors comme $x \in G$, $p(x) = 0_E$. Parce que $u \in F$, il existe $y \in E$ tel que $u = p(y)$. Ainsi

  $$\big(x\big|u\big) = \big(x\big|p(y)\big) = \big(p(x)\big|y\big) = 0$$

  Ceci étant vrai pour tout couple (x, u), on a bien $G \subset F^\perp$.
- montrons que $G = F^\perp$. Il suffit à présent de montrer que ces deux sous-espaces de E ont même dimension, ce qui résulte aisément des deux égalités suivantes

  $$\begin{aligned}\dim E &= \dim F + \dim G \\ \dim E &= \dim F + \dim F^\perp.\end{aligned}$$

▲

Exercice 23.11

On pose $F = \operatorname{Im} f$ et $G = \operatorname{Ker} f$ de sorte que : $F \oplus G = E$.

• **La condition est nécessaire :** on suppose que f est une projection orthogonale : $F = G^\perp$. Soit alors un vecteur x dans E. Puisque les vecteurs $f(x)$ et $x - f(x)$ appartiennent respectivement à F et à G, ils sont orthogonaux et le théorème de Pythagore donne :

$$\|x\|^2 = \|f(x) + (x - f(x))\|^2 = \|f(x)\|^2 + \|x - f(x)\|^2 \geqslant \|f(x)\|^2,$$

d'où l'inégalité $\|x\| \geqslant \|f(x)\|$.

• **La condition est suffisante :** réciproquement, on suppose que pour tout vecteur x de E, $\|f(x)\| \leq \|x\|$. Soit x et y respectivement dans F et dans G. Pour tout réel λ, on peut donc écrire : $\|f(\lambda \cdot x + y)\|^2 \leq \|\lambda \cdot x + y\|^2$, soit :

$$\|\lambda \cdot x\|^2 \leq \|\lambda \cdot x + y\|^2 \quad \text{ou encore} \quad \lambda^2\|x\|^2 \leq \lambda^2\|x\|^2 + 2\lambda(x \mid y) + \|y\|^2.$$

La courbe $y = 2\lambda(x \mid y) + \|y\|^2$ est donc l'équation d'une droite toujours au-dessus de l'axe des abscisses : la droite est horizontale de pente $2(x \mid y)$ égale à 0. On vient de montrer que dès que $x \in F$ et $y \in G$, alors $(x \mid y) = 0$: d'où l'inclusion : $F \subset G^\perp$. Par ailleurs, le sous-espace G est à la fois un supplémentaire de F et de $G^\perp$: les espaces F et $G^\perp$ sont de même dimension (égale à $\dim E - \dim G$) et l'inclusion $F \subset G^\perp$ se transforme en égalité $F = G^\perp$. Le projecteur f est une projection orthogonale. ▲

Exercice 23.12

On procède par récurrence sur l'entier d.

• **Initialisation :** Lorsque $d = 1$, soit u_1, u_2 et u_3 trois réels. Le produit scalaire sur $\mathbb{R}$ s'apparente au produit sur les nombres scalaires. Parmi les trois nombres u_1, u_2 et u_3, il y a au moins deux nombres de même signe (ou nul), ce qui impose un produit scalaire non strictement positif.

• **Hérédité :** Supposons l'existence impossible en dimension $d \geqslant 1$. Supposons en revanche l'existence en dimension $(d+1)$ de $(d+3)$ vecteurs $u_1, \ldots, u_{d+3}$ dans $\mathbb{R}^{d+1}$ tels que $(u_i \mid u_j) < 0$ si $i \neq j$. Chaque vecteur u_i est non nul et on pose $v_i = \dfrac{u_i}{\|u_i\|}$. Les vecteurs $v_1, \ldots, v_{d+3}$ sont unitaires et vérifient $(v_i \mid v_j) < 0$ si $i \neq j$.

Désignons par p la projection orthogonale sur $\mathsf{Vect}\,(v_{d+3})^\perp$. On en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{d+1}, \quad p(x) = x - (x \mid v_{d+3}) \cdot v_{d+3}.$$

On pose finalement pour tout i entre 1 et $d+2$, le vecteur $w_i = p(v_i)$. Si i et j sont deux entiers différents entre 1 et $d+2$, alors :

$$\begin{aligned}(w_i \mid w_j) &= (v_i - (v_i \mid v_{d+3}) \cdot v_{d+3} \mid v_j - (v_j \mid v_{d+3}) \cdot v_{d+3}) \\ &= (v_i \mid v_j) - (v_i \mid v_{d+3}) \cdot (v_j \mid v_{d+3}) < 0.\end{aligned}$$

L'espace euclidien $\mathsf{Vect}\,(v_{d+3})^\perp$ est de dimension d dans lequel les vecteurs $w_1, \ldots, w_{d+2}$ contredisent l'hypothèse de récurrence.

Résultat des courses : on a ce qu'il faut pour la dimension $(d+1)$.

• **Conclusion :** Le résultat est établi en toute dimension $d \geqslant 1$. ▲

Exercice 23.13

1. On se place dans $E = \mathbb{R}_2[X]$, muni du produit scalaire

$$(P \mid Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\, dt$$

On note $F = \mathbb{R}_1[X] = \{aX + b\ ;\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$. Dans ces conditions, m s'interprète comme la distance (au carré) du polynôme $P_2(X) = X^2$ au sous-espace F de E :

$$m = \inf\{\|P_2 - Q\|^2\ ;\ Q \in F\} = d((P_2, F)^2$$

2. On sait que la distance de P_2 à F est atteinte en prenant Q_0 le projeté orthogonal de P_2 sur F. On met en œuvre la **méthode 23.3**. $Q_0 \in E$ vérifie :

$$\begin{cases} \bullet & Q_0 \in F \\ \bullet & P_2 - Q_0 \perp F \end{cases}$$

Comme Q_0 appartient à F, il s'écrit sous la forme $Q_0(X) = aX + b$. Comme $P_2 - Q_0$ est orthogonal à F, il en résulte que $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ est solution du système

$$\begin{aligned}
\begin{cases} X^2 - (aX+b) & \perp & 1 \\ X^2 - (aX+b) & \perp & X \end{cases} &\iff \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 (t^2 - at - b)\, dt & = & 0 \\ \displaystyle\int_0^1 (t^3 - at^2 - bt)\, dt & = & 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \frac{1}{3} - \frac{1}{2}a - b & = & 0 \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{3}a - \frac{1}{2}b & = & 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 3a + 6b & = & 2 \\ 4a + 6b & = & 3 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a & = & 1 \\ b & = & -\frac{1}{6} \end{cases}
\end{aligned}$$

Finalement $Q_0(X) = X - \frac{1}{6}$.
Il ne reste plus dès lors qu'à calculer $\| P_2 - Q_0 \|^2$.

$$\begin{aligned}
m &= \int_0^1 (t^2 - t + \frac{1}{6})^2\, dt \\
&= \int_0^1 \left(t^4 - 2t^3 + \frac{4}{3}t^2 - \frac{1}{3}t + \frac{1}{36} \right) dt \\
&= \frac{1}{180}
\end{aligned}$$

Finalement, nous avons obtenu $m = \frac{1}{180}$. ▲

Exercice 23.14

On note les trois fonctions : $\exp : x \mapsto e^x$, $\cos : x \mapsto \cos x$ et $\sin : x \mapsto \sin x$ définies sur l'intervalle $[0, \pi]$. On pose ensuite $E = \mathsf{Vect}\,(\exp, \cos, \sin)$ le sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions continues sur l'intervalle $[0, \pi]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. L'espace E est de dimension finie inférieure ou égal à trois (en fait de dimension égale à trois...).
Sur l'espace E, on pose pour toutes fonctions f et g :

$$(f \mid g) = \int_0^\pi f(t) \cdot g(t)\ dt.$$

L'application ainsi définie est clairement symétrique, bilinéaire et positive car le nombre $(f \mid f)$ vaut l'intégrale $\displaystyle\int_0^\pi (f(t))^2 dt$, intégrale d'une fonction continue positive qui est donc positive.
Enfin, si f est une fonction de E telle que $(f \mid f) = 0$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^\pi (f(t))^2 dt$ vérifie :

- l'intégrale est nulle sur l'intervalle $[0, \pi]$
- c'est une intégrale d'une fonction continue et positive.

La conclusion est que la fonction f est l'application nulle sur l'intervalle $[0, \pi]$.

D'autre part, pour tous nombres réels a et b, à l'aide des notations précédentes et en désignant par $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée au produit scalaire déjà défini :

$$\int_0^\pi \left(e^x - a \cdot \cos x - b \cdot \sin x\right)^2 dx = \left\|\exp - (a \cdot \cos + b \cdot \sin)\right\|^2.$$

En posant $F = \mathsf{Vect}\,(\cos, \sin)$, trouver le minimum revient à calculer le carré de la distance entre la fonction exponentielle exp et le sous-espace F. Ceci montre déjà que le minimum existe. Il ne reste plus qu'à le calculer...
On note p la projection orthogonale sur F.
On note $p(\exp) = \lambda_1 \cdot \cos + \lambda_2 \cdot \sin$, avec deux scalaires λ_1 et λ_2. Le système : $\begin{cases} (\exp - p(\exp) \mid \cos) = 0 \\ (\exp - p(\exp) \mid \sin) = 0 \end{cases}$ devient :

$$\begin{cases} \lambda_1 \displaystyle\int_0^\pi \cos^2 x \ dx + \lambda_2 \int_0^\pi \sin x \cdot \cos x \ dx = \int_0^\pi e^x \cdot \cos x \ dx \\ \lambda_1 \displaystyle\int_0^\pi \cos x \cdot \sin x \ dx + \lambda_2 \int_0^\pi \sin^2 x \ dx = \int_0^\pi e^x \cdot \sin x \ dx \end{cases}$$

L'utilisation des formules de linéarisation :

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad \text{et} \quad \sin x \cdot \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$$

montrent que :

$$\int_0^\pi \cos^2 x \ dx = \int_0^\pi \sin^2 x \ dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \int_0^\pi \cos x \cdot \sin x \ dx = 0.$$

En procédant à deux intégrations par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi e^x \cdot \cos x \ dx &= \left[e^x \cdot \cos x\right]_0^\pi + \int_0^\pi e^x \cdot \sin x \ dx \\ &= (1 - e^\pi) + \left[e^x \cdot \sin x\right]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \cdot \cos x \ dx. \end{aligned}$$

On en déduit : $\displaystyle\int_0^\pi e^x \cdot \cos x \ dx = \frac{1 - e^\pi}{2}$ et $\displaystyle\int_0^\pi e^x \cdot \sin x \ dx = \frac{e^\pi - 1}{2}$. La résolution numérique du système fournit :

$$\lambda_1 = \frac{1 - e^\pi}{\pi} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = -\lambda_1 = \frac{e^\pi - 1}{\pi}.$$

Le minimum à calculer vaut donc :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \left(e^x - \lambda_1(\cos x - \sin x)\right)^2 dx &= \frac{e^{2\pi} - 1}{2} + \lambda_1^2 \times \pi - 2\lambda_1 \times (1 - e^\pi) \\ &= e^{2\pi} \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\right) + e^\pi \times \frac{2}{\pi} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\right). \end{aligned}$$

▲

Chapitre 24

Séries numériques

UN MATHÉMATICIEN

Augustin-Louis Cauchy obtient très jeune un poste d'enseignant à l'École polytechnique. Son cours est la première exposition précise et rigoureuse de nombreuses théories, en particulier celle des séries numériques. Son œuvre est immense, en particulier en analyse, mais aussi en algèbre, et la rigueur de ses raisonnements a profondément transformé les démonstrations mathématiques.

Un peu d'histoire

Dès le XIVe siècle, Nicole Oresme, un mathématicien méconnu, montre la divergence de la série harmonique $\sum 1/n$ mais ceci reste sans suite. Le besoin de calculer des sommes de séries se fait sentir à la fin du XVIIe siècle lorsque se développe le calcul infinitésimal et surtout l'approximation de fonctions à l'aide de leurs dérivées successives comme dans la formule de Taylor introduite en 1715. On se soucie peu de convergence et on tâtonne pour définir la notion de somme.

Au début des années 1820, dans son *Cours à l'École polytechni*que, Augustin-Louis Cauchy établit une définition précise de la notion de convergence d'une série et il affirme « *je me suis vu forcé d'admettre plusieurs propositions qui paraitront peut-être un peu dures au premier abord…, par exemple qu'une série divergente n'a pas de somme.* » C'est désormais la règle !

Objectifs

les incontournables

- Étudier la nature d'une série numérique :
  - en utilisant les relations de comparaison pour les séries à termes positifs ;
  - en étudiant la convergence absolue pour les séries à termes quelconques.
- Calculer la somme d'une série convergente :
  - en reconnaissant une série classique ;
  - au moyen d'un télescopage.

et plus si affinités

- Utiliser une comparaison série-intégrale :
  - pour déterminer la nature d'une série ;
  - pour obtenir un équivalent du reste d'indice n d'une série convergente.

Résumé de cours

Généralités sur les séries

Série associée à une suite

Définition : *Étant donné une suite $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, de nombres réels ou complexes on lui associe la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée la ***série de terme général*** *u_n. On la note simplement $\sum u_n$. Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, S_n s'appelle la* ***somme partielle d'indice*** *n de la série $\sum u_n$.*

Convergence d'une série

Définition : *Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. La série $\sum u_n$ est dite* ***convergente*** *si la suite des sommes partielles (S_n) l'est. En ce cas,* ***la somme de la série est la limite des sommes partielles.*** *On note*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Dans le cas contraire, on dit que la série est ***divergente.***

Théorème 24.1.— Condition nécessaire de convergence —. Soit $\sum u_n$ une série numérique.

$$\boxed{\textbf{Si } \text{la série } \sum u_n \text{ converge } \textbf{alors } \text{la suite } (u_n) \text{ est convergente de limite nulle.}}$$

Vocabulaire : *Si la suite (u_n) n'est pas convergente de limite nulle, alors la série $\sum u_n$ est divergente. On dit alors que la série $\sum u_n$* ***diverge grossièrement.***

Lien fondamental entre suites et séries

L'étude d'une série est l'étude de la suite de ses sommes partielles. Réciproquement, l'étude d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut se ramener à celle d'une série :

Théorème 24.2.— Soit (a_n) et (u_n) deux suites numériques telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = a_{n+1} - a_n.$$

Alors la somme partielle de rang $n \in \mathbb{N}$ de la série $\sum u_n$ est donnée par $S_n = a_{n+1} - a_0$. Ainsi,

$$\boxed{\text{La série } \sum u_n \text{ converge } \textit{si et seulement si} \text{ la suite } (a_n) \text{ converge,}}$$

et dans ce cas $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} a_n - a_0.$

Reste d'une série convergente

Théorème-Définition 24.3.— Restes d'une série convergente —. Soit $\sum u_n$ une série convergente. Le reste d'indice $n \in \mathbb{N}$ de la série $\sum u_n$ est défini par $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ de sorte que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = S_n + R_n}$$

De plus, la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite nulle.

Opérations algébriques sur les séries convergentes

Théorème 24.4.— Soit $\sum u_n$, $\sum v_n$ deux séries numériques, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$.

- Si $\sum u_n$ converge, alors $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ converge.
- Si $\sum u_n$ converge, alors $\sum \lambda \cdot u_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda \cdot u_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
- Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors $\sum (u_n + v_n)$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.
- Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge, alors la série $\sum (u_n + v_n)$ diverge.

Cas d'une série de nombres complexes

Proposition 24.5.— Une série de nombres complexes $\sum z_n$ est convergente *si et seulement si* les séries $\sum \mathfrak{Re}(z_n)$ et $\sum \mathfrak{Im}(z_n)$ sont convergentes dans $\mathbb{R}$. Dans ce cas

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} z_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathfrak{Re}(z_n) + i \sum_{n=0}^{+\infty} \mathfrak{Im}(z_n)}$$

■ Séries à termes positifs

Condition nécessaire et suffisante de convergence

Pour une série à termes positifs, les sommes partielles forment une suite croissante. On peut appliquer le **théorème de la limite monotone**, à la suite des sommes partielles, on obtient :

Théorème 24.6.— Convergence des séries à termes positifs —. Soit $\sum u_n$ une série à termes réels positifs. On note (S_n) la suite des sommes partielles.

$$\boxed{\text{La série } \sum u_n \text{ converge } \textit{ si et seulement si } \text{ la suite des sommes partielles } (S_n) \text{ est majorée.}}$$

Dans ce cas, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sup_n S_n$, sinon la suite (S_n) diverge vers $+\infty$, on note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$.

Comparaison des séries à termes positifs

Théorème 24.7.— Soit $\sum u_n$, $\sum v_n$ des séries à termes positifs telles que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant v_n$.

- Si la série $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge aussi et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.
- Si la série $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge aussi.

Théorème 24.8.— Règle des équivalents —. Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n \sim v_n$. Alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature :

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge } \textit{ si et seulement si } \sum v_n \text{ converge.}}$$

Proposition 24.9.— Soit $\sum v_n$ et $\sum u_n$ deux séries à termes positifs.

- Si la série $\sum v_n$ converge et $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ alors $\sum u_n$ converge.
- Si la série $\sum v_n$ converge et $u_n = o(v_n)$ alors $\sum u_n$ converge.

Comparaison série-intégrale

Théorème 24.10.— Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ une fonction continue et décroissante. Alors pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{f(0) + \int_1^{n+1} f(t)\, dt \leqslant \sum_{k=0}^{n} f(k) \leqslant f(0) + \int_0^n f(t)\, dt}$$

Remarque : lorsque f est supposée croissante, on a un encadrement analogue.

■ Séries absolument convergentes

Convergence absolue

Définition : *Soit $\sum u_n$ une série numérique, à termes réels ou complexes. On dit que $\sum u_n$ est* ***absolument convergente*** *– ou que la suite (u_n) est* ***sommable****) si la série $\sum |u_n|$ est convergente.*

On note cette relation $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| < +\infty$.

Théorème 24.11.— Condition suffisante de convergence —. Soit $\sum u_n$ une série numérique. Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente alors $\sum u_n$ est convergente, et dans ce cas,

$$\boxed{\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|}$$

Comparaison à une série à termes positifs

Proposition 24.12.— Soit $\sum v_n$ une série à termes positifs et $\sum u_n$ une série numérique.

- Si la série $\sum v_n$ converge et $|u_n| = \mathcal{O}(v_n)$ alors $\sum u_n$ converge absolument.
- Si la série $\sum v_n$ converge et $|u_n| = o(v_n)$ alors $\sum u_n$ converge absolument.

■ Séries de référence

Séries géométriques

Théorème 24.13.— Convergence des séries géométriques –. Soit $z \in \mathbb{C}$.

La série géométrique $\sum_{n \geqslant 0} z^n$ est convergente *si et seulement si* $|z| < 1$

Dans ce cas, la série $\sum_{n \geqslant 0} z^n$ est absolument convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \dfrac{1}{1-z}$.

Séries de Riemann

Théorème 24.14.— Convergence des séries de Riemann —. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ un réel donné.

La série de Riemann $\sum_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge *si et seulement si* $\alpha > 1$

Séries exponentielles

Théorème 24.15.— Convergence des séries exponentielles —. Soit $z \in \mathbb{C}$.

La série $\sum_{n \geqslant 0} \dfrac{z^n}{n!}$ est absolument convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!} = e^z$

Méthodes

Étudier la nature et calculer la somme d'une série classique

Séries géométriques et séries géométriques dérivées

Soit $x \in]-1,1[$. On note $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$. En dérivant terme à terme par rapport à x, on obtient

$$\begin{aligned} S_n'(x) &= \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{1-x^{n+1}}{(1-x)^2} + \underset{n\to+\infty}{o}(1) \\ S_n''(x) &= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)x^{k-2} = 2\,\frac{1-x^{n+1}}{(1-x)^3} + \underset{n\to+\infty}{o}(1) \end{aligned}$$

Comme $|x| < 1$, on obtient en passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ la convergence de la série géométrique $\sum x^n$ et des séries géométriques «dérivées» $\sum_{n\geqslant 1} nx^{n-1}$ et $\sum_{n\geqslant 2} n(n-1)x^{n-2}$. De plus

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$
- $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$

Étudier la nature et calculer la somme d'une série

Expliciter la somme partielle d'indice n

Par définition, étudier une série et déterminer sa somme revient à étudier la suite de ses sommes partielles

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

On peut parfois exprimer les sommes partielles en fonction de n et étudier la suite (S_n) ainsi obtenue, comme dans l'exemple des séries géométriques et des séries géométriques dérivées ci-dessus. Lorsque les termes se simplifient deux à deux dans les sommes partielles, on dit qu'il y a télescopage.

Méthode 24.1.— Comment repérer et utiliser un télescopage

[1] Il y a télescopage lorsqu'on peut exprimer le terme général u_n comme la différence de deux termes consécutifs d'une même suite

$$\forall k \in \mathbb{N},\ u_k = a_{k+1} - a_k$$

[2] En sommant pour k variant de 0 à n, les termes se simplifient deux à deux, il vient

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} u_k = a_{n+1} - a_0$$

[3] D'après la **proposition 24.1**, la série $\sum u_n$ converge *si et seulement si* (a_n) converge et dans ce cas

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} a_n - a_0$$

Exemple : étudions la série de terme général $u_n = \ln\left(\dfrac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$ pour $n \geqslant 1$.

$\boxed{1}$ Soit $k \in \mathbb{N}^\star$. On a

$$u_k = \ln\left(\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}\right) = \ln\left(\frac{k+1}{k}\ \frac{k+1}{k+2}\right) = \ln\left(\frac{k+1}{k+2}\right) - \ln\left(\frac{k}{k+1}\right) = a_{k+1} - a_k,$$

où l'on a posé $a_k = \ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$.

$\boxed{2}$ Par télescopage, il s'ensuit que

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} a_{k+1} - a_k = a_{n+1} - a_1 = \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right) + \ln(2).$$

$\boxed{3}$ Par continuité de la fonction ln au point 1, il s'ensuit que (S_n) est convergente de limite $\ln(2)$. Autrement dit la série $\sum u_n$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right) = \ln(2)$$

Plus généralement, lorsque dans les sommes partielles apparaissent des simplifications, on dira encore qu'il y a télescopage.

> ❑ **Méthode 24.2.— Terme général une fraction rationnelle de la forme $u_n = \dfrac{P(n)}{Q(n)}$**
>
> $\boxed{1}$ On effectue la décomposition en éléments simples de première espèce de u_n.
>
> $\boxed{2}$ En sommant pour k variant de 0 à n les termes se simplifient pour obtenir une expression simple de la somme partielle d'indice n.

Exemple : étudions la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ pour $n \geqslant 1$.

$\boxed{1}$ Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. $u_n = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{n+2}$. On détermine a, b, c à l'aide de la **méthode 13.11**. Il vient $a = \dfrac{1}{2}$, $b = -1$ et $c = -\dfrac{1}{2}$. Par suite $u_n = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{n} - 1 \times \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{n+2}$.

$\boxed{2}$ Comme $\dfrac{1}{2} - 1 + \dfrac{1}{2} = 0$, il y aura des simplifications ! Soit $n \geqslant 1$

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{2} \times \frac{1}{k} - 1 \times \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{k+2}\right] = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k}$$

Les termes qui apparaissent dans ces trois sommes se simplifient. Seuls subsistent les termes indexés par $k = 1, 2, n+1$ ou $k = n+2$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} u_k &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ \frac{1}{n+2} - \frac{1}{2}\ \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{4}\end{aligned}$$

$\boxed{3}$ Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{1}{4}$, autrement dit la série de terme général u_n converge et a pour somme $\dfrac{1}{4}$.

Mise en œuvre : exercice 24.2.

Utiliser les opérations algébriques sur des séries convergentes

Lorsque le terme général peut s'écrire comme une combinaison linéaire de termes généraux de séries de référence, on peut conclure à l'aide du **théorème 24.7** à partir des séries de référence : séries géométriques, séries géométriques dérivées ou exponentielles.

> ❑ **Méthode 24.3.— Terme général de la forme $u_n = P(n)x^n$**
>
> Soit $P \in \mathbb{R}_p[X]$ un polynôme de degré p et $x \in \mathbb{R}$ un réel. On étudie convergence et somme de la série $\sum_{n \geqslant 0} P(n)x^n$.
>
> $\boxed{1}$ $P_0(X) = 1$, $P_1(X) = X$, $P_2(X) = X(X-1)$, ...,$P_p(X) = X(X-1)\cdots(X-p+1)$ est une base de $\mathbb{R}_p[X]$, P s'exprime donc comme combinaison linéaire de ces polynômes :
>
> $$P = \lambda_0 \cdot P_0 + \lambda_1 \cdot P_1 + \cdots + \lambda_p \cdot P_p$$
>
> $\boxed{2}$ En remplaçant $P(n)$ par cette expression dans $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, on obtient S_n comme combinaison linéaire de sommes partielles de séries géométriques dérivées.
>
> $\boxed{3}$ On conclut à l'aide du **théorème 24.4** à la convergence et à la somme de la série $\sum u_n$.

Remarque : cette méthode s'applique aussi dans le cas où $u_n = P(n)\dfrac{x^n}{n!}$. On obtient alors une combinaison linéaire de séries exponentielles (**exercice 24.1**).

Exemple : étudions convergence et somme de la série de terme général $u_n = \dfrac{n^2+n-1}{n!}$.

$\boxed{1}$ Soit $k \in \mathbb{N}$. On a $k^2 + k - 1 = k(k-1) + 2k - 1$ de sorte que $u_k = \dfrac{k(k-1)}{k!} + 2\dfrac{k}{k!} - \dfrac{1}{k!}$.

$\boxed{2}$ Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. En remplaçant u_k par cette expression, on fait apparaître des simplifications :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} u_k &= \sum_{k=0}^{n}\left[\frac{k(k-1)}{k!} + 2\frac{k}{k!} - \frac{1}{k!}\right] = \sum_{k=0}^{n}\frac{k(k-1)}{k!} + 2\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{k!} - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \\ &= \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-2)!} + 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k-1)!} - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\end{aligned}$$

À l'aide des changements d'indice qui s'imposent, on obtient finalement

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k!} + 2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = S_{n-2} + 2S_{n-1} - S_n,$$

où $S_n = \sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}$ désigne la somme partielle d'indice n de la série de référence $\exp(1)$.

$\boxed{3}$ Comme $\lim_{n\to+\infty} S_n = \exp(1)$, il s'ensuit que la somme partielle d'indice n de la série $\sum u_n$ converge vers $2e$.

Mise en œuvre : exercice 24.2.

■ Étudier la nature d'une série à termes positifs

Comparaison à une série de référence

Avant tout, pour qu'une série converge, il faut que son terme général tende vers 0 d'après le **théorème 24.1** ! Dans le cas contraire, elle est grossièrement divergente !

Pour une série à termes positifs $\sum u_n$, la convergence revient à établir que les sommes partielles sont majorées indépendamment de n (**théorème 24.6**). En pratique, il s'agit de montrer que le terme général u_n tend vers 0 (condition nécessaire) *suffisamment vite* pour que la série converge. Pour cela, la méthode s'articule généralement en deux étapes.

> ❑ **Méthode 24.4.— Comment étudier la nature d'une série à termes positifs**
>
> $\boxed{1}$ On détermine un équivalent de u_n le plus simple possible $u_n \sim v_n$. D'après le **théorème 24.8** les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.
>
> $\boxed{2}$ On compare alors v_n au terme général d'une série de référence, comme une série de Riemann. Il y a plusieurs modes de comparaison (majoration-minoration, domination ou négligeabilité), on applique suivant les cas le **théorème 24.7** ou la **proposition 24.9**. La règle «$n^\alpha u_n$» (**méthode 24.5** ci-après) présente les comparaisons les plus fréquentes.

Remarques : 1. Lorsque les termes de la suite sont négatifs, on applique cette méthode à la série $\sum -u_n$. De façon plus générale, cette méthode s'applique donc aux séries dont le terme général est de signe constant, au moins à partir d'un certain rang.

2. La recherche d'un équivalent simple permet de confirmer que la suite u_n est de signe constant à partir d'un certain rang, ce qui n'apparaît pas toujours clairement dans l'expression de u_n.

Un cas particulièrement fréquent est la comparaison avec la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$.

> ❑ **Méthode 24.5.— Comparaison à une série de Riemann : règle $n^\alpha u_n$ —.**
>
> Soit $\sum u_n$ une série à termes de signe constant (à partir d'un certain rang).
>
> - S'il existe $\alpha > 1$ tel que $n^\alpha u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, alors $\sum u_n$ converge.
> - S'il existe $\alpha > 1$ tel que $n^\alpha u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \in \mathbb{R}^\star$, alors $\sum u_n$ converge.
> - S'il existe $\alpha \leqslant 1$ tel que $n^\alpha u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \in \mathbb{R}^\star$, alors $\sum u_n$ diverge.
> - S'il existe $\alpha \leqslant 1$ tel que $n^\alpha u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \pm\infty$, alors $\sum u_n$ diverge.

Exemple : étudions la série de terme général $u_n = e - \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

$\boxed{1}$ Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n = e - \exp\left(n \ln(1 + \frac{1}{n})\right) = e\left[1 - \exp\left(n \ln(1 + \frac{1}{n}) - 1\right)\right]$.
Posons $h_n = n \ln(1 + \frac{1}{n}) - 1 = n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})\right) - 1 = -\frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Or $1 - e^h \underset{h\to 0}{\sim} -h$.
Par composition, il s'ensuit que $u_n = e\left(1 - \exp(h_n)\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{e}{2n}$. En particulier, u_n est bien de signe positif pour n assez grand.
$\boxed{2}$ On en déduit que $nu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{e}{2}$. D'après la règle $n^\alpha u_n$ avec $\alpha = 1$, (ou par comparaison à une série de Riemann) la série $\sum u_n$ diverge.

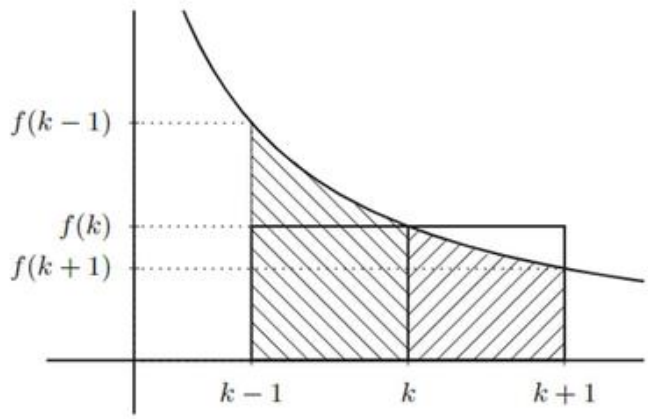
Mise en œuvre : exercice 24.3

> ❑ **Méthode 24.6.— Comment comparer u_n lorsqu'il s'exprime à l'aide de $n!$**
> Lorsque dans l'expression du terme général d'une série intervient $n!$, on peut penser à une série exponentielle (**exercice 24.1**) ou bien chercher un équivalent de u_n à l'aide de la **formule de Stirling**
> $$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$
> On utilise alors les méthodes de comparaison des séries rappelées ci-dessus.

Mise en œuvre : exercice ??

Comparaison des restes et des sommes partielles avec des intégrales

Lorsque le terme général de la série est de la forme $u_n = f(n)$, où $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction continue et décroissante, on peut étudier la convergence de la série en encadrant les sommes partielles à l'aide d'intégrale de f.



Les deux rectangles représentés ont pour aire $f(k)$. On peut facilement comparer cette aire à celles des régions planes situées sous les arcs de courbe correspondants.

$$\int_k^{k+1} f(t)\ dt \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\ dt$$

Ce résultat peut se retrouver aussi en utilisant la monotonie de f !

> ❑ **Méthode 24.7.— Comment comparer sommes partielles et intégrales**
> $\boxed{1}$ On commence par reproduire le schéma ci-dessus !
> $\boxed{2}$ Par monotonie de f (ou simplement à l'aide du schéma), on obtient l'encadrement valide pour $k \in \mathbb{N}^\star$,
> $$\int_k^{k+1} f(t)\ dt \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\ dt$$
> $\boxed{3}$ On somme terme à terme pour k variant de 1 à n puis on ajoute $f(0)$ pour finalement obtenir
> $$f(0) + \int_1^{n+1} f(t)\ dt \leqslant \sum_{k=0}^{n} f(k) \leqslant f(0) + \int_0^n f(t)\ dt$$
> $\boxed{4}$ Cet encadrement peut alors être utilisé pour conclure quant à la nature de la série et pour obtenir un équivalent des sommes partielles d'une série divergente ou des restes d'une série convergente.

Remarques : 1. Cette méthode s'applique aussi pour obtenir un encadrement des restes de la série, il s'agit de sommer terme à terme les encadrements de $f(k)$ pour k variant de $n+1$ jusqu'à

un entier m, puis de passer à la limite (sous réserve de convergence) lorsque m tend vers $+\infty$.
2. Cette méthode s'applique plus généralement pour obtenir un encadrement des restes et des sommes partielles de la série $\sum f(n)$, lorsque f est une fonction monotone et continue par morceaux.

Exemple : convergence de la série de Riemann pour $\alpha > 1$

Soit $\alpha > 1$. On pose pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$. On définit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ par $f(t) = \dfrac{1}{t^\alpha}$.

$\boxed{1}$ L'allure du graphe de f est représentée page précédente.

$\boxed{2}$ Par décroissance de f, on a $\forall k \geqslant 2$, $\displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\,dt \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,dt$.

$\boxed{3}$ Sommant terme à terme ces encadrements pour k variant de 2 jusqu'à n, nous obtenons :

$$f(1) + \int_2^{n+1} f(t)\,dt \leqslant S_n \leqslant f(1) + \int_1^n f(t)\,dt$$

Comme $f(1) + \displaystyle\int_1^n f(t)\,dt = 1 + \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^n = 1 + \frac{n^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} = \frac{n^{1-\alpha} - \alpha}{1-\alpha}$, nous obtenons la majoration

$$0 \leqslant S_n \leqslant \frac{\alpha}{\alpha - 1}.$$

$\boxed{4}$ Finalement, la suite des sommes partielles étant majorée, la série à termes positifs $\sum f(n)$ est convergente d'après le **théorème 24.6**.

Exemple : divergence de la série harmonique (série de Riemann pour $\alpha = 1$)

On pose pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. On définit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ par $f(t) = \dfrac{1}{t}$.

$\boxed{1}$ L'allure du graphe de f est représentée page 721.

$\boxed{2}$ Par décroissance de f, on a $\forall k \geqslant 1$, $f(k) \geqslant \displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\,dt$.

$\boxed{3}$ En sommant terme à terme pour k variant de 1 jusqu'à n, nous obtenons :

$$S_n \geqslant \int_1^{n+1} f(t)\,dt = \ln(n+1) \xrightarrow[n \to \infty]{} +\infty$$

$\boxed{4}$ La suite des sommes partielles étant non majorée, la série à termes positifs $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}$ est divergente.

Exemple : divergence de la série de Riemann pour $\alpha < 1$

Pour $\alpha < 1$, l'inégalité $\dfrac{1}{n^\alpha} \geqslant \dfrac{1}{n}$ montre par comparaison (minoration) que la série à termes positifs $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est divergente.

Mise en œuvre : exercice 24.4.

■ Étudier la nature d'une série à termes réels ou complexes

Rappelons encore une fois que le terme général d'une série convergente doit tendre vers 0, mais que cette condition nécessaire, n'est pas suffisante !

Cas d'une série à termes réels

> ❑ **Méthode 24.8.— Comment étudier la nature d'une série à termes réels**
>
> 1 On détermine un équivalent de u_n le plus simple possible : $u_n \sim v_n$.
>
> 2 Comme deux suites équivalentes ont même signe, deux cas se présentent :
>
> - **Si u_n est de signe constant** (au moins à partir d'un certain rang), alors ces deux séries sont de (même) signe constant et on peut se ramener à l'étude d'une série à termes positifs.
> - **Si u_n n'est pas de signe constant**, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ne sont pas forcément de même nature ! On étudie plutôt l'absolue convergence de la série des u_n en étudiant la série des valeurs absolues. Comme il s'agit d'une série à termes positifs, on est encore ramenés à l'étude d'une série à termes positifs !

Mise en œuvre : exercice 24.6.

Cas d'une série à termes complexes

> ❑ **Méthode 24.9.— Comment étudier la nature d'une série à termes complexes**
>
> - On étudie la convergence de la série des modules $\sum |z_n|$. On peut utiliser toutes les méthodes valides pour étudier la nature de cette série à termes positifs !
> - Si la série $\sum |z_n|$ converge, on peut conclure à l'aide du **théorème 24.11**.

Établir la convergence d'une série de Taylor

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I. Les polynômes de Taylor de f en un point a forment la suite des sommes partielles de la série de Taylor : $\sum \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$.

> ❑ **Méthode 24.10.— Comment montrer la convergence d'une série de Taylor**
>
> Pour étudier la convergence d'une telle série, on utilisera souvent l'**inégalité de Taylor-Lagrange**. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note M_{n+1} un majorant de $\left|f^{(n+1)}\right|$ sur I. Alors
>
> Pour tout $(a, x) \in I^2$, on a $\left|f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!}\right| \leqslant M_{n+1}\dfrac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$.

Exemple : convergence et somme de la série harmonique alternée

Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \ln(1+x)$. f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, $f^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{(1+x)^k}$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, le polynôme de Taylor de f en 0 d'ordre n s'écrit donc $T_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\, x^k$ et pour tout $x \in [0,1]$, on a $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leqslant \dfrac{n!}{(1+x)^{n+1}} \leqslant n!$.

En appliquant l' **inégalité de Taylor-Lagrange** entre 0 et 1, il en résulte donc $\left|f(1) - T_n(1)\right| \leqslant \dfrac{1}{(n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On retrouve la convergence de a série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ et on obtient en plus :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2).$$

Mise en œuvre : exercice 24.1.

■ Étudier la nature d'une suite

❑ **Méthode 24.11.— Comment utiliser une série pour étudier une suite**

Il s'agit d'exploiter le lien fondamental entre suites et séries. Pour étudier la suite (a_n),

1 On considère que (a_n) est la suite des sommes partielles d'une série $a_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

2 On en tire $u_0 = a_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n = a_n - a_{n-1}$.

3 D'après le lien fondamental entre suites et séries, la suite (a_n) est convergente si et seulement si la série $\sum u_n$ est convergente.

Mise en œuvre : exercice 24.12.

Vrai/Faux

	Vrai	Faux
1. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ alors $\sum u_n$ converge.	☐	☐
2. S'il existe $\alpha \geqslant 1$ tel que $n^\alpha u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors $\sum u_n$ converge.	☐	☐
3. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{2^n}$ converge et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{2^n} = 1$.	☐	☐
4. Si $nu_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$ alors $\sum u_n$ diverge.	☐	☐
5. Si $\sum v_n$ converge et $\lvert u_n\rvert \leqslant \lvert v_n\rvert$ alors $\sum u_n$ converge.	☐	☐
6. Si $u_n \sim \dfrac{1}{n^2}$ alors $\sum u_n$ converge et $\sum u_n = \sum \dfrac{1}{n^2}$.	☐	☐
7. Si $\sum u_n$ converge alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=n}^{+\infty} u_k = 0$.	☐	☐
8. La série $\sum \dfrac{1}{n!}$ converge.	☐	☐
9. Si $\sum u_n + v_n$ converge alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n + v_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$.	☐	☐
10. Si $u_n \sim v_n$ alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.	☐	☐

Énoncé des exercices

Nature et somme d'une série numérique

Exercice 24.1 : Séries exponentielles

Montrer que pour tout nombre réel x, la série $\sum_n \frac{x^n}{n!}$ est absolument convergente de somme $\exp(x)$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x)$$

Exercice 24.2 : Établir la convergence et déterminer la somme des séries suivantes.

1. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$ **2.** $\sum \frac{n^2\, 2^n}{n!}$ **3.** $\sum_{n\geqslant 2} \frac{3n+2}{n(n^2-1)}$ **4.** $\sum \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$

5. $\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)}\right)$ **6.** $\sum \frac{n^2+n-1}{n!}$ **7.** $\sum \frac{n^2+3n}{2^n}$ **8.** $\sum (n^2+n+1)e^{-n}$

Exercice 24.3 : Déterminer la nature des séries suivantes.

1. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^2\ln(n)}{e^n}$ **2.** $\sum_{n\geqslant 2} \frac{\sqrt{n+1}}{\ln^3(n)\, n^2}$ **3.** $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\operatorname{Arctan}(n)}{n^2}$ **4.** $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

5. $\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ **6.** $\sum_{n\geqslant 1} \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$ **7.** $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(n)}{n^2}$ **8.** $\sum_{n\geqslant 1} \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right)$

9. $\sum_{n\geqslant 1} \left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^n - \frac{1}{\sqrt{e}}$ **10.** $\sum_{n\geqslant 2} (\ln(n))^{-\ln(n)}$ **11.** $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(1+n)\sin(n)}{n^2\sqrt{n}}$ **12.** $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n\ln(n)}{e^n}$

Comparaisons séries-intégrales

Exercice 24.4 : Séries de Bertrand

1. Déterminer en fonction de $\beta \in \mathbb{R}$ la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln^\beta(n)}$.

2. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Exercice 24.5 : Étudiez en fonction de α la nature de la série $\sum \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n^\alpha}$.

Exercice 24.6* : Équivalents des sommes partielles et des restes pour une série de Riemann

Soit $\alpha > 0$. On pose pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ et si $\alpha > 1$, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

1. On suppose que $0 < \alpha < 1$. Déterminer un équivalent de S_n.

2. On suppose que $\alpha > 1$. Déterminer un équivalent de R_n.

■ Critères de convergence pour les séries à termes positifs

Exercice 24.7 : Soit $\sum u_n$ une série convergente à termes positifs. Étudier les séries de terme général

1. u_n^2 **2.** $\dfrac{\sqrt{u_n}}{n}$ **3.** $\dfrac{u_n}{1+u_n}$

Exercice 24.8 : Règle de D'Alembert —. Soit (u_n) strictement positive telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$.

1. On suppose que $\ell < 1$. Soit $k \in]\ell, 1[$, montrer qu'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, on ait $u_{n+1} \leqslant k\, u_n$. En déduire que la série $\sum u_n$ converge.

2. On suppose que $\ell > 1$. Montrer qu'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant u_{n+1}$. En déduire que la série $\sum u_n$ diverge.

3. On suppose que $\ell = 1$. Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1^+$ alors la série $\sum u_n$ diverge mais qu'on ne peut pas conclure de façon générale lorsque $\ell = 1$.

Exercice 24.9 : Règle de Duhamel —. Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\alpha}{n} + o(\dfrac{1}{n})$.

1. Montrer que $\sum u_n$ converge si $\alpha > 1$, et diverge si $\alpha < 1$.

2. Étudier la série $\sum \dfrac{1.4.7\ldots(3n-2)}{3^n\ n!}$

■ Règles de convergence pour les séries à termes non positifs

Exercice 24.10 : Séries alternées —. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de limite nulle.
On étudie la série $\sum(-1)^n v_n$. On note pour $n \in \mathbb{N}$ S_n la somme partielle d'indice n de cette série.

1. Démontrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

2. En déduire que la série $\sum(-1)^n v_n$ converge.

3. Démontrer pour tout entier naturel, $|R_n| \leqslant v_{n+1}$.

Exercice 24.11* : Règle d'Abel —. Soit (u_n), (v_n) deux suites de réels. On suppose que (u_n) est une suite décroissante de réels positifs convergeant vers 0 et que la suite (S_n) des sommes partielles de la série $\sum v_n$ est bornée.

1. Montrer que la série $\sum(u_n - u_{n+1})S_n$ est convergente.

2. En déduire que la série $\sum u_n v_n$ est convergente.

3. Étudier la nature des séries $\sum \dfrac{\sin(n)}{n}$, $\sum \dfrac{\cos(n)}{\sqrt{n}}$ et $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$, pour $\alpha > 0$.

■ Liens entre suites et séries

Exercice 24.12 : Série harmonique et constante d'Euler —. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)$$

1. Montrer que (u_n) converge. On note $\gamma = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. γ est appelée la constante d'Euler.

2. En déduire un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de $1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$.

3. Déterminer la nature des séries $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{1+2+\cdots+n}$, et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n})$.

Exercice 24.13 : Établir la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$$

Exercice 24.14 : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ un nombre réel, $\alpha > 1$.

1. Montrer que pour tout entier naturel non nul $n \in \mathbb{N}^\star$, $\dfrac{1}{n^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \sim \dfrac{\alpha-1}{n^\alpha}$.
2. En déduire que la série de Riemann $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge.

Indications

Ex. 24.2

1. *et* **3.** *On applique la* **méthode 24.2**.

2. *et* **6.** *La présence au dénominateur de nombres factoriels suggère une série exponentielle.*

4. *On pourra démontrer la relation* $\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{n}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$

5. *Il s'agit encore d'une télescopage* **méthode 24.1**.

Ex. 24.8

1. *Comparez* $\sum u_n$ *à une série géométrique.*

Ex. 24.9

1. *Comparez* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ *avec* $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ *où* v_n *est le terme général d'une série de Riemann* $v_n = \dfrac{1}{n^\beta}$.

Ex. 24.12

On appliquera la **méthode 24.11**.

Corrigé des vrai/faux

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F	F	V	V	F	F	V	V	F	F

1. Une condition nécessaire de convergence de la série $\sum u_n$ est que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, **mais la réciproque est fausse** comme le montre la série harmonique $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$. Son terme général converge vers 0, mais la **série harmonique est divergente**.
2. Eh non ! à cause du cas $\alpha = 1$. L'**exercice 24.4** montre que la série de terme général $u_n = \frac{1}{n\ln(n)}$ est divergente, même si u_n est négligeable devant $\frac{1}{n}$.
3. C'est la série géométrique de premier terme $\frac{1}{2}$ et de raison $\frac{1}{2}$!
4. C'est la règle $n^\alpha u_n$ appliquée ici à une série de terme général négatif !
5. Il suffit de considérer les séries harmonique et harmonique alternée (de termes généraux respectifs $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{n}$) pour voir que ceci est faux. Dans ce cas en effet, $|u_n| = |v_n|$ mais la série harmonique alternée converge (vers $-\ln(2)$) tandis que la série harmonique diverge.
6. Si $u_n \sim \frac{1}{n^2}$ alors $\sum u_n$ est une série à termes positifs (au moins à partir d'un certain rang) qui converge par la **règle des équivalents**. Mais il n'y a aucune raison pour que les sommes de ces séries coïncident ! On sait que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Il suffit de remplacer son premier terme par 48 pour obtenir une série de terme général équivalent mais de somme différente !
7. C'est le **théorème 24.3**.
8. Non seulement cette série converge mais il s'agit de la série exponentielle $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \exp(1)$.
9. Le fait que la somme $u_n + v_n$ soit le terme général d'une série convergente ne signifie pas que chacun est le terme général d'une série convergente.
10. C'est vrai si l'on suppose en outre que u_n et v_n sont de signe constant à partir d'un certain rang, mais c'est faux en général. Par exemple, prenons $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n\ln(n)}$. Comme $\frac{1}{n\ln(n)} = o(\frac{1}{n})$ on a bien $u_n \sim v_n$. La série harmonique alternée, $\sum u_n$ converge tandis que $\sum v_n$ diverge comme somme d'une série convergente et d'une série divergente.

Erreurs classiques

- Ne pas écrire $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ avant d'avoir prouvé la convergence de la série.
- Attention ! Le fait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ ne permet pas de conclure quant à la convergence de la série $\sum u_n$. Il se peut malgré cela qu'elle converge ou qu'elle diverge !
- Il est exact que si $\sum |u_n|$ converge alors $\sum u_n$ converge mais si $\sum |u_n|$ diverge, on ne peut rien dire de la convergence de $\sum u_n$!
- Ne pas appliquer la règle des équivalents pour des séries dont les termes généraux ne sont pas de signe constants (à partir d'un certain rang).

Corrigé des exercices

Exercice 24.1

On met en œuvre la **méthode 24.10**. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Soit $n \in \mathbb{N}$, notons $S_n(x)$ le polynôme de Taylor d'ordre n en 0 de la fonction exp : Comme pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\exp^{(k)}(x) = \exp(x)$, il en résulte que

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!}\, x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!},$$

Il y a deux cas suivant que x est positif ou non !

Appliquons l'**inégalité de Taylor-Lagrange** entre 0 et x. Par croissance de la fonction exponentielle, tout réel t compris entre 0 et x vérifie $\exp^{(n+1)}(t) \leqslant M$, où $M = \max\{\exp(x); \exp(0)\}$. Par suite,

$$\big|\exp(x) - S_n(x)\big| \leqslant M\, \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{par croissances comparées.}$$

Ce qui prouve que la suite des sommes partielles $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite $\exp(x)$. Ceci étant vrai pour tout réel x, on obtient l'absolue convergence en appliquant cette propriété à $|x|$. ▲

Exercice 24.2

1. Le terme général est une fraction rationnelle. On applique la **méthode 24.2** et on décompose le terme général en éléments simples de première espèce : $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$. Il s'écrit comme différence de deux termes consécutifs d'une même suite, il y a **télescopage**. On peut alors expliciter la somme partielle d'indice n

Dans la somme partielle, les termes se simplifient deux à deux.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \quad = \quad \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

Par définition, $\sum \dfrac{1}{n(n+1)}$ converge et a pour somme 1.

2. La présence du nombre factoriel au dénominateur suggère que nous sommes en présence d'une série exponentielle. On applique la **méthode 24.3** :

$$\frac{k^2\, 2^k}{k!} = \frac{[k(k-1)+k]\, 2^k}{k!} = \frac{k(k-1)}{k!}\, 2^k + \frac{k}{k!}\, 2^k$$

On observe d'abord la nullité des premiers termes dans chacune des deux sommes. On peut alors simplifier les nombres factoriels et enfin effectuer les changements d'indice qui vont bien !

On explicite alors la somme partielle d'indice n :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \frac{k^2\, 2^k}{k!} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)}{k!}\, 2^k + \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k!}\, 2^k = \sum_{k=2}^{n} \frac{k(k-1)}{k!}\, 2^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k!}\, 2^k \\ &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-2!)}\, 2^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!}\, 2^k = 4 \sum_{k=0}^{n-2} \frac{2^k}{k!} + 2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{k!}\end{aligned}$$

On note pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ $E_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!}$ la somme partielle d'indice n de la série $\exp(2)$. On peut alors réécrire la somme partielle de notre série sous la forme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2\ 2^k}{k!} = 4E_{n-2} + 2E_{n-1}$$

Comme la suite (S_n) converge vers e^2, il en résulte par opérations algébriques sur des suites convergentes que (S_n) converge vers $6e^2$. Par définition, cela signifie que la série $\sum \frac{n^2\ 2^n}{n!}$ converge et a pour somme $6e^2$.

3. Le terme général est une fraction rationnelle. On applique la **méthode 24.2**. Soit $k \geqslant 2$, $F(k) = \dfrac{3k+2}{k(k^2-1)} = \dfrac{a}{k-1} + \dfrac{b}{k} + \dfrac{c}{k+1}$.

On détermine les coefficients a, b, c à l'aide de la **méthode 13.11**

$$\begin{array}{lcll} (X-1)F(X) & = & \frac{3X+2}{X(X+1)} & \xrightarrow[x=1]{} a = \dfrac{5}{2} \\ XF(X) & = & \frac{3X+2}{X^2-1} & \xrightarrow[x=0]{} b = -2 \\ (X+1)F(X) & = & \frac{3X+2}{X(X-1)} & \xrightarrow[x=-1]{} c = -\dfrac{1}{2} \end{array}$$

Ainsi

$$F(k) = \frac{5}{2}\,\frac{1}{k-1} - 2\,\frac{1}{k} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{k+1}$$

On explicite alors la somme partielle d'indice n de la série proposée :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=2}^{n} \frac{3k+2}{k(k^2-1)} = \frac{5}{2}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1} - 2\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k+1} \\ &= \frac{5}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} - 2\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n+1}\frac{1}{k} \\ &= \frac{5}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right) - 2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{11}{4} \end{aligned}$$

Comme $\frac{5}{2} - 2 - \frac{1}{2} = 0$ les termes qui apparaissent dans les trois sommes se simplifient. Seuls ne subsistent que les autres termes, c'est-à-dire ceux qui correspondent à des indices n'appartenant pas à $[\![3, n-1]\!]$

Par définition, la série $\sum \dfrac{3n+2}{n(n^2-1)}$ converge et a pour somme $\dfrac{11}{4}$.

4. Suivant l'indication fournie, commençons par simplifier l'expression du terme général. Soit $k \in \mathbb{N}^\star$, on a

Le terme général ne ressemble même pas de loin au terme général d'une série classique, on cherche donc à faire apparaître un télescopage.

- $0 \leqslant \operatorname{Arctan}\frac{1}{k} - \operatorname{Arctan}\frac{1}{k+1} < \frac{\pi}{2}$
- $\tan\left(\operatorname{Arctan}\frac{1}{k} - \operatorname{Arctan}\frac{1}{k+1}\right) = \dfrac{\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}}{1 + \frac{1}{k(k+1)}} = \dfrac{(k+1)-k}{k(k+1)+1} = \dfrac{1}{k^2+k+1}$.

Ces deux propriétés signifient précisément que

$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) = \operatorname{Arctan}\frac{1}{k} - \operatorname{Arctan}\frac{1}{k+1}.$$

Comme le terme général de la série à étudier est la différence de deux termes consécutifs d'une même suite, il y a télescopage. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) &= \operatorname{Arctan}(1) + \sum_{k=1}^{n}\left[\operatorname{Arctan}\frac{1}{k} - \operatorname{Arctan}\frac{1}{k+1}\right] \\ &= \operatorname{Arctan}(1) + \operatorname{Arctan}(1) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{n+1}\right) \\ &= 2\operatorname{Arctan}(1) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{n+1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi, par définition, la série de terme général $\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}\right)$ converge et a pour somme $\dfrac{\pi}{2}$.

5. Soit $k \geqslant 2$. On observe que $\ln\left(\dfrac{(k+1)(k+2)}{k(k+3)}\right) = \ln\left(\dfrac{k+1}{k+3}\right) - \ln\left(\dfrac{k}{k+2}\right)$.

Ici, $a_k = \ln \frac{k}{k+2}$.

Le terme général s'écrit comme différence de deux termes consécutifs d'une même suite, il y a donc télescopage. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{(k+1)(k+2)}{k(k+3)}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k+3}\right) - \ln\left(\frac{k}{k+2}\right) \\ &= \ln\left(\frac{n+1}{n+3}\right) - \ln\left(\frac{1}{3}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(3).\end{aligned}$$

Ceci prouve la convergence de la série et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)}\right) = \ln(3)$.

6. On applique la **méthode 24.3** :

$$\frac{k^2+k-1}{k!} = \frac{k(k-1)+2k-1}{k!} = \frac{k(k-1)}{k!} + 2\,\frac{k}{k!} - \frac{1}{k!}$$

Détaillez bien les étapes de ce calcul comme dans l'étude de la série **2**.

On en déduit pour $n \geqslant 2$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \frac{k^2+k-1}{k!} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)}{k!} + 2\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!} + 2\sum_{k=0}^{n-1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = E_{n-2} + 2E_{n-1} - E_n\end{aligned}$$

où on a noté pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $E_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ la somme partielle d'indice n de la série exponentielle. Comme (E_n) converge vers e, il s'ensuit que $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k^2+k-1}{k!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2e$. La série $\sum \dfrac{n^2+n-1}{n!}$ converge et a pour somme $2e$.

7. On applique la **méthode 24.3**. Soit $k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{k^2+3k}{2^k} = \dfrac{k(k-1)}{2^k} + 4\,\dfrac{k}{2^k}$. Par conséquent, la somme partielle d'indice n s'écrit

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \frac{k^2+3k}{2^k} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)}{2^k} + 4\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\frac{1}{2^k} + 4\sum_{k=1}^{n} k\frac{1}{2^k} \\ &= \frac{1}{2^2}\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\frac{1}{2^{k-2}} + 4\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k\frac{1}{2^{k-1}}\end{aligned}$$

Comme $0 \leqslant \frac{1}{2} < 1$ les séries géométriques et dérivées de raison $\frac{1}{2}$ convergent !

On reconnaît des sommes partielles de séries géométriques de raison $\frac{1}{2}$ dérivées d'ordre 1 et 2. Par opérations algébriques sur des suites possédant des limites, il s'ensuit que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k^2+3k}{2^k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{4}\frac{2}{(1-\frac{1}{2})^3} + 2\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = 12$. Autrement dit, la série converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+3n}{2^n} = 12$.

8. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, on a alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(k^2+k+1)e^{-k} &= \sum_{k=0}^{n}k(k-1)e^{-k}+2\sum_{k=0}^{n}ke^{-k}+\sum_{k=0}^{n}e^{-k}\\ &= e^{-2}\sum_{k=0}^{n}k(k-1)e^{-k+2}+2\,e^{-1}\sum_{k=0}^{n}ke^{-k+1}+\sum_{k=0}^{n}e^{-k}\end{aligned}$$

Comme la raison e^{-1} de ces suites géométriques et dérivées appartient à $]0,1[$, elles convergent et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n^2+n+1)e^{-n}=\frac{2e}{(e-1)^3}+\frac{2e}{(e-1)^2}+\frac{e}{e-1}$. ▲

Exercice 24.3

1. Il s'agit d'une série à termes positifs (à partir du rang 3). Pour déterminer sa nature nous comparons le terme général u_n à une série de référence, à savoir une série de Riemann. Par croissances comparées

$$n^2u_n=\frac{n^4\ln(n)}{e^n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.$$

On en conclut que $\sum u_n$ converge par comparaison à une série de Riemann convergente.

Dans cette première étude comme souvent, il s'agit d'une série à termes positifs. Pour déterminer sa nature, on cherche à la comparer avec une série de Riemann, convergente ou divergente au moyen de la **méthode 24.5**. *On l'applique ici avec* $\alpha=2$.

2. Commençons par obtenir un équivalent du terme général

$$u_n=\frac{\sqrt{n+1}}{\ln^3(n)\;n^2}\sim\frac{1}{\ln^3(n)n^{\frac{3}{2}}}.$$

Il s'agit d'une série à termes positifs (à partir d'un certain rang), appliquons la **méthode 24.5** avec $\alpha=\frac{3}{2}$. Il vient

$$n^{\frac{3}{2}}u_n\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{1}{\ln^3(n)}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$

Ainsi $\sum u_n$ converge par comparaison à une série de Riemann convergente.

3. Commençons par obtenir un équivalent du terme général

$$u_n=\frac{\operatorname{Arctan}(n)}{n^2}\sim\frac{\pi}{2n^2}.$$

Il s'agit d'une série à termes positifs : la **méthode 24.5** avec $\alpha=2$ donne

$$n^2u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{\pi}{2}$$

Ainsi $\sum u_n$ converge par comparaison à une série de Riemann convergente.

4. Commençons par obtenir un équivalent du terme général. On utilise pour cela un développement limité de $\ln(1+h)$ au voisinage de 0.

$$\begin{aligned}u_n &= \frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\ &\sim \frac{1}{2n^2}\end{aligned}$$

On voit ici facilement grâce à son équivalent que u_n est de signe positif (lorsque n est assez grand) ce qui a priori n'était pas évident !

Pour conclure, on applique la **méthode 24.5** avec $\alpha=2$

$$n^2u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{1}{2}$$

Ainsi $\sum u_n$ converge par comparaison à une série de Riemann convergente.

5. Commençons par obtenir un équivalent du terme général. On utilise les développements limités de $\ln(1+h)$ et de $\cos(u)$ au voisinage de 0.

$$\begin{aligned} u_n &= \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &\sim \frac{-1}{2n^2} \end{aligned}$$

Il s'agit d'une série à termes négatifs : la **méthode 24.5** avec $\alpha = 2$ donne

Lorsque la série est à termes négatifs les règles de comparaison s'appliquent aussi !

$$n^2 u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{-1}{2}$$

Ainsi $\sum u_n$ converge par comparaison à une série de Riemann convergente.

6. Commençons par obtenir un équivalent du terme général.

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{n}\left(\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}} - 1\right) \\ \text{Or } \sqrt[n]{n} &= \exp\left(\frac{1}{n}\ln(n)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1, \text{ donc } \sqrt[n]{n} \sim 1 \\ \sqrt[n]{1+\frac{1}{n}} - 1 &= \exp\left(\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) - 1 = \exp\left(\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) - 1 \\ &= \exp\left(\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - 1 = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

Finalement $u_n \sim \dfrac{1}{n^2}$. D'après la **règle des équivalents** $\sum u_n$ converge par comparaison à une série de Riemann convergente.

7. u_n n'est pas de signe constant ! On applique la **méthode 24.8**. On a alors

$$|u_n| = \left|\frac{\sin(n)}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$$

Par comparaison à une série de Riemann, on en déduit que $\sum |u_n|$ est convergente. Ainsi, $\sum u_n$ est absolument convergente et donc convergente.

8. On détermine un équivalent de u_n

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{1}{n}\right) &= \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + \left(\frac{1}{n^3}\right) \\ \tan\left(\frac{1}{n}\right) &= \frac{1}{n} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, $u_n = -\dfrac{1}{2n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$. Autrement dit, $u_n \sim -\dfrac{1}{2n^3}$ et par conséquent $n^3 u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{-1}{2}$. La règle $n^\alpha u_n$ (**méthode 24.5**) appliquée avec $\alpha = 3$ à la série à termes négatifs $\sum u_n$ montre qu'elle est convergente.

9. Déterminons un équivalent de u_n :

$$u_n = \left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^n - \frac{1}{\sqrt{e}} = \exp\left[n\ln\left(1 \underbrace{- \frac{1}{2n} + \frac{1}{24n^2} + o(\frac{1}{n^2})}_{h_n}\right)\right] - \frac{1}{\sqrt{e}}$$

Comme $h_n = -\dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{24n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, on a $h_n^2 = \dfrac{1}{4n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et par conséquent

$$\ln(1+h_n) = -\frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

D'où l'on tire finalement

$$\begin{aligned} u_n &= \exp\left[-\frac{1}{2} - \frac{1}{12n} + o(\frac{1}{n})\right] - \frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{1}{\sqrt{e}}\left[\exp\left(1 - \frac{1}{12n} + o(\frac{1}{n})\right) - 1\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{e}}\left(-\frac{1}{12n} + o(\frac{1}{n})\right) \sim \frac{1}{12\sqrt{e}\,n} \end{aligned}$$

Ainsi $nu_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{12\sqrt{e}}$, donc $\sum u_n$ diverge par comparaison à une série de Riemann divergente.

10. On applique directement la **méthode 24.5**

$$n^2 u_n = \frac{e^{2\ln(n)}}{\left(\ln(n)\right)^{\ln(n)}} = \left(\frac{e^2}{\ln(n)}\right)^{\ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

11. u_n n'est pas de signe constant ! On applique la **méthode 24.8**. On a alors

$$|u_n| = \left|\frac{(1+n)\sin(n)}{n^2\sqrt{n}}\right| \sim \frac{|\sin(n)|}{n\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

Attention ici à bien conclure d'abord à la convergence de la série des valeurs absolue puis à la convergence de la série. En effet, la règle des équivalents ne s'applique pas lorsque les séries ne sont pas de signe constant.

Par comparaison à une série de Riemann, on en déduit que $\sum |u_n|$ est convergente. Ainsi, $\sum u_n$ est absolument convergente et donc convergente.

12. Comme précédemment, on applique la **méthode 24.8**. Comme $|u_n| = \dfrac{\ln(n)}{e^n}$, on applique la **méthode 24.5**. Par croissances comparées,

$$n^2|u_n| = \frac{n^2\,\ln(n)}{e^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

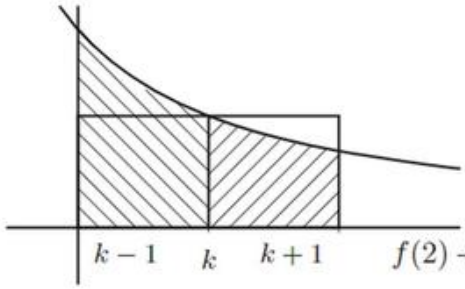
Par comparaison à une série de Riemann, on en déduit que $\sum |u_n|$ est convergente. Ainsi, $\sum u_n$ est absolument convergente et donc convergente. ▲

Exercice 24.4

1. Notons $u_n = \dfrac{1}{n\ln^\beta(n)}$.

- si $\beta \leqslant 0$, alors $\dfrac{1}{n\ln^\beta(n)} \geqslant \dfrac{1}{n}$. Comme la série harmonique est divergente, il en résulte par comparaison à une série de Riemann divergente que la série de terme général u_n diverge en ce cas.

- Si $\beta > 0$, introduisons la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x\ln^\beta(x)}$. f est définie, décroissante, continue et positive sur $[2, +\infty[$. Nous allons encadrer la somme partielle de rang n de la série $\sum u_n$ à l'aide d'intégrales de f.



Soit $k \geqslant 2$, on a par décroissance de f

$$\int_k^{k+1} f(x)\,dx \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx.$$

Sommons terme à terme ces encadrements pour k variant de 3 à n, il vient :

$$f(2) + \int_3^{n+1} f(x)\,dx. \leqslant \sum_{k=2}^{n} f(k) \leqslant f(2) + \int_2^{n} f(x)\,dx.$$

Pour poursuivre la calcul, il convient de discuter suivant la valeur de β.

On effectue le changement de variable $u = \ln(x)$.

► Si $\beta = 1$,

$$\int_3^{n+1} f(x)\,dx = \int_{\ln(3)}^{\ln(n+1)} \frac{du}{u} = \Big[\ln(|u|)\Big]_{\ln(3)}^{\ln(n+1)} = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(3)$$

(S_n) diverge vers $+\infty$.

Ainsi la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}\right)$ est non majorée donc la série correspondante diverge.

On effectue le changement de variable $u = \ln(x)$.

► Si $\beta < 1$,

$$\begin{aligned}\int_3^{n+1} \frac{dx}{x\ln^\beta(x)} &= \int_{\ln(3)}^{\ln(n+1)} \frac{du}{u^\beta} = \frac{1}{1-\beta}\Big[u^{1-\beta}\Big]_{\ln(3)}^{\ln(n+1)} \\ &= \frac{1}{1-\beta}\left[\ln^{1-\beta}(n+1) - \ln^{1-\beta}(3)\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty\end{aligned}$$

Ainsi la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\ln^\beta(k)}\right)$ est divergente vers $+\infty$, la série correspondante diverge.

► Si $\beta > 1$,

On effectue le changement de variable $u = \ln(x)$.

$$\begin{aligned}\int_2^{n} \frac{dx}{x\ln^\beta(x)} &= \int_{\ln(2)}^{\ln(n)} \frac{du}{u^\beta} = \frac{1}{1-\beta}\Big[u^{1-\beta}\Big]_{\ln(2)}^{\ln(n)} \\ &= \frac{1}{1-\beta}\left[\ln^{1-\beta}(n) - \ln^{1-\beta}(2)\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\ln^{1-\beta}(2)}{\beta-1}\end{aligned}$$

Ainsi la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\ln^\beta(k)}\right)$ est majorée, d'après le **théorème 24.6**, la série correspondante converge.

2. Notons cette fois $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$.

► Si $\alpha > 1$, prenons $\gamma = \dfrac{1+\alpha}{2} > 1$. Alors $n^\gamma u_n = \dfrac{n^{\frac{1-\alpha}{2}}}{\ln^\beta(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

On conclut à l'aide de la **méthode 24.5** que $\sum u_n$ converge.

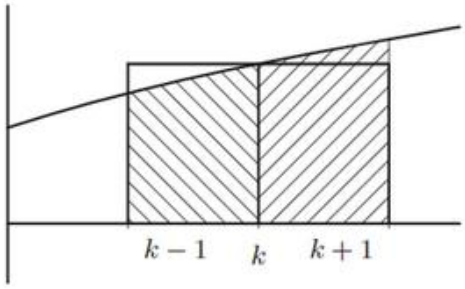
► Si $\alpha = 1$, alors $\sum u_n$ converge si et seulement si $\beta > 1$ d'après la question précédente.

► Si $\alpha < 1$, prenons $\gamma = \dfrac{1+\alpha}{2} < 1$. Alors $n^\gamma u_n = \dfrac{n^{\frac{1-\alpha}{2}}}{\ln^\beta(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
Cette fois, on conclut à l'aide de la **méthode 24.5** que $\sum u_n$ diverge. ▲

Exercice 24.5

Il s'agit d'une série à termes positifs. Pour commencer, on cherche un équivalent simple de u_n. Pour ce faire, nous allons tout d'abord déterminer un équivalent du numérateur. On observe qu'il s'agit de la somme partielle d'indice n de la série (grossièrement divergente !) $\sum \sqrt{n}$. **Méthode 24.4**

Pour en donner un équivalent on utilise une comparaison série-intégrale (**méthode 24.7**). Notons $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction racine carrée. Elle est croissante, positive et continue. Par monotonie de f, on a pour tout entier k l'encadrement



$$\int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \leqslant \sqrt{k} \leqslant \int_{k}^{k+1} f(x)\,dx$$

On somme ces encadrements pour k variant de 1 à n, il vient

$$\int_0^n \sqrt{x}\,dx \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \leqslant \int_1^{n+1} \sqrt{x}\,dx,$$

soit encore
$$\frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}} \leqslant \sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n} \leqslant \frac{2}{3}\left((n+1)^{\frac{3}{2}} - 1\right).$$

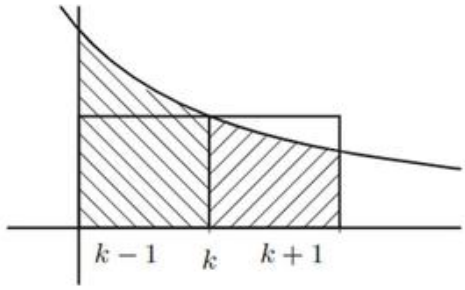
Par la caractérisation des équivalents par le quotient, il en résulte successivement que

$$\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n} \sim \frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}}, \quad \text{puis } u_n \sim \frac{2}{3}\,\frac{1}{n^{\alpha-\frac{3}{2}}}$$

On conclut finalement à l'aide d'une comparaison à une série de Riemann que la série $\sum u_n$ est convergente si et seulement si $\alpha - \frac{3}{2} > 1$, soit $\alpha > \frac{5}{2}$. ▲

Exercice 24.6

Soit $\alpha > 0$. On définit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ par $f(t) = \dfrac{1}{t^\alpha}$. f est décroissante, continue et positive sur $\mathbb{R}^{+\star}$. Par décroissance de f (comme on le visualise sur le schéma ci-contre), on a pour tout $k \geqslant 2$ l'encadrement



$$\int_k^{k+1} f(t)\,dt \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,dt$$

1. Lorsque $0 < \alpha < 1$, on obtient en sommant pour k variant de 2 jusqu'à n :

$$f(1) + \int_2^{n+1} f(t)\,dt \leqslant S_n \leqslant f(1) + \int_1^n f(t)\,dt$$

ce qui revient après calculs à $1 + \dfrac{(n+1)^{1-\alpha} - 2^{1-\alpha}}{1-\alpha} \leqslant S_n \leqslant 1 + \dfrac{n^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha}$.

À l'aide de la caractérisation de la relation d'équivalence par les quotients, il s'ensuit que

$$S_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

On divise les termes de cet encadrement par $\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} = +\infty$, on en déduit par encadrement que le quotient $S_n / \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ tend vers 1.

2. Lorsque $\alpha > 1$, on somme pour k variant de $n+1$ jusqu'à m :

$$\int_{n+1}^{m+1} f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} f(k) \leqslant \int_{n}^{m} f(t)\,dt$$

$$\frac{(n+1)^{1-\alpha} - (m+1)^{1-\alpha}}{\alpha-1} \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} f(k) \leqslant \frac{n^{1-\alpha} - m^{1-\alpha}}{\alpha-1}$$

Comme $\alpha > 1$, il s'ensuit par passage à la limite (quand m tend vers $+\infty$) dans des inégalités que

$$\frac{(n+1)^{1-\alpha}}{\alpha-1} \leqslant R_n \leqslant \frac{n^{1-\alpha}}{\alpha-1}$$

En divisant les termes de cet encadrement par $\dfrac{n^{1-\alpha}}{\alpha-1}$, il vient

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1-\alpha} \leqslant R_n \Big/ \frac{n^{1-\alpha}}{\alpha-1} \leqslant 1$$

Par encadrement, il en résulte que $R_n \Big/ \dfrac{n^{1-\alpha}}{\alpha-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Il découle alors de la **caractérisation de la relation d'équivalence par les quotients** que

$$R_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{\alpha-1}$$

▲

Exercice 24.7

Théorème 24.6

1. Comme $\sum u_n$ est une série à termes positifs convergente, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. En particulier, il existe un rang n_0 tel que

On exploite la définition de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ avec $\varepsilon = 1$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow 0 \leqslant u_n \leqslant 1$$

Soit donc $n \geqslant n_0$, on a donc

$$0 \leqslant u_n^2 \leqslant u_n$$

Théorème 24.7

On peut alors conclure par comparaison que la série $\sum u_n^2$ est convergente.

2. Nous allons encore comparer la série de terme général $\dfrac{\sqrt{u_n}}{n}$ à une série convergente. Pour cela, on utilise l'inégalité

Cette inégalité est équivalente à $(x-y)^2 \geqslant 0$.

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ xy \leqslant \frac{x^2+y^2}{2}$$

Il en résulte que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{\sqrt{u_n}}{n} \leqslant \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{1}{n^2}\right)$$

Or les séries de termes généraux u_n et $\frac{1}{n^2}$ sont convergentes. Par opérations algébriques (**théorème 24.4**) il en va de même de la série $\frac{1}{2}\left(u_n + \frac{1}{n^2}\right)$. On conclut donc par comparaison de séries à termes positifs que $\sum \frac{\sqrt{u_n}}{n}$ est convergente.

3. Nous avons déjà observé que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. Par conséquent

$$\frac{u_n}{1+u_n} \sim u_n$$

La conclusion découe alors de la **règle des équivalents** pour les séries à termes positifs. ▲

Exercice 24.8

Soit (u_n) une suite strictement positive telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$.

1. On suppose que $\ell < 1$. Soit $k \in]\ell, 1[$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < k$, il s'ensuit par compatibilité limite et inégalité qu'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant n_0 \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} < k$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0$, on a donc $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant k u_n$. On en déduit alors par récurrence immédiate que

La positivité de la suite est essentielle ici !

$$\forall n \geqslant n_0, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant k^{n-n_0} u_{n_0}$$

On peut alors conclure à la convergence de la série $\sum u_n$ par comparaison à la série géométrique de raison $k \in]0, 1[$.

2. On suppose ici que $\ell > 1$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

Compatibilité limite et inégalité.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant n_0 \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$$

Comme (u_n) est strictement positive, ceci entraîne qu'elle est croissante, à partir du rang n_0. En particulier, la suite (u_n) ne saurait être convergente de limite nulle, la série $\sum u_n$ est donc grossièrement divergente !

3. Lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1^+$ l'argument ci-dessus est valide et la série $\sum u_n$ est donc grossièrement divergente. Par contre, on ne peut rien dire lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, comme le montrent les deux exemples suivants.

- Si $u_n = \frac{1}{n}$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, et la série harmonique $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge.
- Si $u_n = \frac{1}{n^2}$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, et la série de Riemann $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge. ▲

Corrigé

Exercice 24.9

1. Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs telle que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o(\frac{1}{n}).$$

Au voisinage de 0, on a $(1+x)^{-\beta} = 1-\beta x+o(x)$.

Pour tout réel $\beta \in \mathbb{R}$, notons $v_n = \dfrac{1}{n^\beta}$. On a alors

$$\begin{aligned}\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{n^\beta}{(n+1)^\beta} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\beta} \\ &= 1 - \frac{\beta}{n} + o(\frac{1}{n})\end{aligned}$$

Caractérisation de l'équivalence par la différence.

▸ On suppose que $\alpha > 1$. Considérons alors β tel que $1 < \beta < \alpha$. Des deux développements asymptotiques précédents, on déduit

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} - \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\alpha-\beta}{n} + o(\frac{1}{n}) \text{ soit encore } \frac{v_{n+1}}{v_n} - \frac{u_{n+1}}{u_n} \sim \frac{\alpha-\beta}{n}$$

$\alpha - \beta$ étant strictement positif, ces deux suites équivalentes sont positives à partir d'un certain rang n_0. Ainsi, pour $n \geqslant n_0$, on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.

Autrement dit, la suite $(\dfrac{u_n}{v_n})_{n\geqslant n_0}$ est décroissante. En particulier, elle est majorée par son terme de rang n_0. Pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a donc

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}} \; v_n$$

Comme $\beta > 1$, la série de Riemann $\sum v_n$ est convergente et l'on peut conclure par comparaison que $\sum u_n$ converge.

Cette fois-ci, on prend $\alpha < \beta < 1$.

▸ On suppose dans cette question que $\alpha < 1$. Suivant les mêmes lignes que précédemment, on montre l'existence d'un entier n_0 tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, on ait

$$u_n \geqslant \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}} \; v_n \geqslant 0$$

On conclut alors par comparaison à une série de Riemann divergente que $\sum u_n$ diverge.

2. Soit $u_n = \dfrac{1.4.7\ldots(3n-2)}{3^n\ n!}$. On a

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{1.4.7\ldots(3n-2)(3n+1)}{3^{n+1}(n+1)!} \times \frac{3^n\ n!}{1.4.7\ldots(3n-2)} \\ &= \frac{3n+1}{3n+3} = \left(1+\frac{1}{3n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} = \left(1+\frac{1}{3n}\right)\left(1-\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n})\right) \\ &= 1 - \frac{2}{3n} + o(\frac{1}{n})\end{aligned}$$

Ici, $\alpha = \dfrac{2}{3} < 1$. La **règle de Duhamel** montre que la série $\sum u_n$ diverge. ▲

Exercice 24.10

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, comme (v_n) est décroissante, on a

$$\begin{aligned}
S_{2n+2} - S_{2n} &= \sum_{k=0}^{2n+2}(-1)^k v_k - \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k v_k = v_{2n+2} - v_{2n+1} \leqslant 0 \\
S_{2n+3} - S_{2n+1} &= \sum_{k=0}^{2n+3}(-1)^k v_k - \sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k v_k = v_{2n+2} - v_{2n+3} \geqslant 0 \\
S_{2n+1} - S_{2n} &= \sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k v_k - \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k v_k = -v_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0
\end{aligned}$$

Ainsi, (S_{2n}) est décroissante, (S_{2n+1}) est croissante et $(S_{2n+1} - S_{2n})$ converge vers 0. Par défintion, ceci assure que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

2. D'après le **théorème de convergence des suites adjacentes**, les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont convergentes et de même limite, S. De plus, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on a l'encadrement

Théorème 9.13

$$S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n}$$

Comme ses suites extraites formées des termes de rang pairs et impairs sont toutes deux convergentes vers S, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est elle-même convergente de limite S. Autrement dit, la série $\sum(-1)^n v_n$ converge et

On dit qu'il y a convergence par complémentarité.

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n v_n = S$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On discute suivant la parité de n.

- si n est pair, il s'écrit $n = 2p$. Alors d'après la question précédente, on a $S_{2p+1} \leqslant S \leqslant S_{2p}$. En retranchant S_{2p} aux termes de cet encadrement, nous obtenons $-v_{2p+1} \leqslant R_{2p} \leqslant 0$, d'où l'on tire $|R_n| \leqslant v_{n+1}$

On se rappelle que $n = 2p$ en ce cas !

- si n est impair, il s'écrit $n = 2p+1$. Dans ce cas, on a $S_{2p+1} \leqslant S \leqslant S_{2p+2}$ d'où l'on tire $0 \leqslant R_{2p+1} \leqslant v_{2p+2}$, ce qui donne encore $|R_n| \leqslant v_{n+1}$.
- Dans tous les cas, on a bien montré que $|R_n| \leqslant v_{n+1}$. ▲

Exercice 24.11

1. On montre que $\sum(u_n - u_{n+1})S_n$ est absolument convergente. Soit $M \in \mathbb{R}^{+\star}$ tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $|S_n| \leqslant M$. Fixons un entier $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^{n}|(u_k - u_{k+1})S_k| \leqslant M\sum_{k=0}^{n}(u_k - u_{k+1}) = M(u_0 - u_{n+1}) \leqslant Mu_0$$

Ainsi, la suite des sommes partielles de la série $\sum|(u_n - u_{n+1})S_n|$ est bornée, ce qui garantit la convergence absolue et donc la convergence de la série.

C'est une série à termes positifs.

Corrigé

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, on recalcule la somme partielle d'indice n de la série $\sum(u_n - u_{n+1})S_n$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(u_k - u_{k+1})S_k &= \sum_{k=0}^{n} u_k S_k - \sum_{k=0}^{n} u_{k+1}S_k = \sum_{k=0}^{n} u_k S_k - \sum_{k=1}^{n+1} u_k S_{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} u_k \underbrace{[S_k - S_{k-1}]}_{v_k} + u_0 S_0 - u_{n+1}S_n\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k v_k = \sum_{k=0}^{n}(u_k - u_{k+1})S_k + u_{n+1}S_n$.

D'après la première question, la suite des sommes partielles $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(u_k - u_{k+1})S_k\right)$ converge. De plus la suite $(u_{n+1}S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 comme produit d'une suite convergeant vers 0 et d'une suite bornée. Finalement, la série $\sum u_n v_n$ est bien convergente.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ik} = \frac{e^{i(n+1)} - 1}{e^i - 1} = \frac{e^{i\frac{n+1}{2}}}{e^{i\frac{1}{2}}}\ \frac{2i\sin(\frac{n+1}{2})}{2i\sin(\frac{1}{2})} = e^{i\frac{n}{2}}\ \frac{\sin(\frac{n+1}{2})}{\sin(\frac{1}{2})}$$

En prenant les parties réelle et imaginaire, on en déduit que

$$\sum_{k=0}^{n}\cos(k) = \frac{\cos(\frac{n}{2})\sin(\frac{n+1}{2})}{\sin(\frac{1}{2})} \text{ et } \sum_{k=0}^{n}\sin(k) = \frac{\sin(\frac{n}{2})\sin(\frac{n+1}{2})}{\sin(\frac{1}{2})}$$

Ces sommes sont donc bornées indépendamment de n par $\dfrac{1}{\sin(1/2)}$. Ainsi, prenant $u_n = \dfrac{1}{n}$, $v_n = \sin(n)$, ou $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $v_n = \cos(n)$, on établit à l'aide de la **règle d'Abel** la convergence des séries $\sum \dfrac{\sin(n)}{n}$, $\sum \dfrac{\cos(n)}{\sqrt{n}}$.

Enfin, en prenant $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ et $v_n = (-1)^n$, on obtient la convergence de la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$, pour $\alpha > 0$. ▲

Exercice 24.12

1. Considérons (u_n) comme la suite des sommes partielles de la série $\sum a_n$.

On applique la **méthode 24.11**.

En ce cas, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ de sorte que

$$a_1 = u_1 = 1 \text{ et } \forall n \geqslant 2,\ a_n = u_n - u_{n-1}$$

On utilise un développement limité de $\ln(1+u)$ au voisinage de 0 :

$\ln(1+u) = u + o(u)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, on a

$$\begin{aligned}a_n &= = \left[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)\right] - \left[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \ln(n-1)\right] \\ &= \frac{1}{n} - \ln(n) + \ln(n-1) = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

Ainsi, $n^2 a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\frac{1}{2}$. D'après la **méthode 24.5** pour les séries à termes négatifs, $\sum a_n$ est convergente par comparaison à une série de Riemann. D'après le **lien fondamental suite-série**, il s'ensuit que la suite (u_n) est convergente. On note $\gamma = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

2. D'après la question précédente $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n) = \gamma + o(1)$, soit encore

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln(n) + \gamma + \underset{n\to\infty}{o}(1)$$

En particulier, $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\sim} \ln(n)$.

3. Pour étudier ces séries on utilise la **méthode 24.5** :

a. $v_n = \dfrac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{1 + 2 + \cdots + n} \sim \dfrac{2\ln(n)}{n^2}$, donc $n^{\frac{3}{2}} v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. La série à termes positifs $\sum v_n$ est convergente par comparaison à une série de Riemann convergente.

b. $w_n = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \sim \dfrac{\ln(n)}{n}$. En particulier, à partir d'un certain rang, $w_n \geqslant \frac{1}{n}$. La série $\sum w_n$ est divergente par comparaison à une série de Riemann divergente. ▲

Exercice 24.13

Posons pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ de sorte que

$$a_1 = u_1 = 1 \text{ et } \forall n \geqslant 2,\ a_n = u_n - u_{n-1}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, on a

On se rappelle que $\sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + o(u^2)$.

$$\begin{aligned} a_n &= u_n - u_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n} + 2\sqrt{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}} + 2\sqrt{n}\left(\sqrt{1 - \frac{1}{n}} - 1\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} + 2\sqrt{n}\left(-\frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = -\frac{1}{4n\sqrt{n}} + o\left(n^{-\frac{3}{2}}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, $n^{\frac{3}{2}} a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{-1}{4}$. D'après la **méthode 24.5** pour les séries à termes négatifs, $\sum a_n$ est convergente par comparaison à une série de Riemann. D'après le lien fondamental entre suite et série, ceci revient à dire que la suite (u_n) est convergente. ▲

Exercice 24.14

1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} &= \frac{1}{n^{\alpha-1}}\left[1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha-1}\right] = \frac{1}{n^{\alpha-1}}\left[1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1-\alpha}\right] \\ &= \frac{1}{n^{\alpha-1}}\left[1 - \left(1 + \frac{1-\alpha}{n} + o(n^{-1})\right)\right] = \frac{\alpha-1}{n^\alpha} + o\left(n^{-\alpha}\right) \end{aligned}$$

Autrement dit, $\dfrac{1}{n^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{\alpha-1}{n^\alpha}$.

On utilise la caractérisation des équivalents par la différence.

2. Comme $\alpha > 1$, la suite de terme général $a_n = \dfrac{1}{n^{\alpha-1}}$ est convergente vers 0. D'après le lien fondamental suite-série, il en résulte que la série de

Théorème 24.2

terme général $a_n - a_{n+1}$ est convergente. Comme $\dfrac{1}{n^\alpha} \sim \dfrac{a_n - a_{n-1}}{\alpha - 1}$, il découle finalement de la règle des équivalents pour les séries à termes positifs que la série de Riemann de terme général $1/n^\alpha$ est aussi convergente. ▲

Théorème 24.8

Chapitre 25

Fonctions de deux variables

UN MATHÉMATICIEN

Après des études de droit et de médecine, **Jean le Rond d'Alembert** se tourne vers les mathématiques. Il est l'initiateur de méthodes nouvelles sur les équations différentielles aux dérivées partielles qu'il expose dans son *Traité de mécanique*. À partir de 1749, il se consacre avec Denis Diderot à la rédaction de l'*Encyclopédie*. Les découvertes mathématiques de d'Alembert concernent également les fonctions de variable complexe et la théorie des probabilités.

Un peu d'histoire

Lorsque Newton a introduit le calcul différentiel à la fin du XVIIe siècle, il s'est intéressé à des relations liant deux variables ce qui l'a amené à dériver l'une en fixant l'autre. Par la suite, les dérivées partielles secondes sont introduites et certains, comme Euler puis Clairaut, se sont posé la question de leur interversion.

Pour résoudre différents problèmes venus de la physique, comme l'écoulement d'un fluide ou la propagation d'une onde, Euler puis surtout d'Alembert, aboutissent à des équations différentielles aux dérivées partielles. Leurs résultats ont permis des progrès spectaculaires portés par de grands mathématiciens du XVIIIe siècle comme Lagrange ou Laplace.

Curieusement, l'intérêt pour la continuité n'est venu qu'un siècle plus tard lorsque cette notion a été rigoureusement définie par Weierstrass et ses élèves dans les années 1860.

Objectifs

les incontournables

- Montrer qu'une fonction est continue sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
- Calculer les dérivées partielles d'une fonction de deux variables.
- Montrer qu'une application de deux variables est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert.
- Déterminer les extremums locaux d'une fonction de deux variables.

et plus si affinités

- Résoudre une équation aux dérivées partielles.

Résumé de cours

Ouverts de $\mathbb{R}^2$

Définition : *On munit $\mathbb{R}^2$ de la* ***norme euclidienne usuelle*** *$\|.\|$ définie par :*

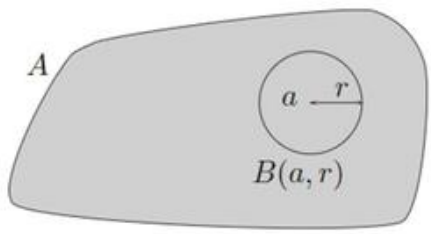
$$\boxed{\forall u = (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \|u\| = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Définition : *Soit $a \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$. On appelle* ***boule ouverte*** *de centre a et de rayon r l'ensemble des points u de $\mathbb{R}^2$ vérifiant $\|u - a\| < r$. On la note $B(a, r)$:*

$$\boxed{B(a, r) = \{u \in \mathbb{R}^2,\ \|u - a\| < r\}}$$

Définition : *Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$. On dit que A est une* ***partie ouverte de*** *$\mathbb{R}^2$ (ou un ouvert de $\mathbb{R}^2$) si, pour tout $a \in A$, A contient une boule ouverte de centre a. Autrement dit, A est un ouvert si :*

$$\boxed{\forall a \in A, \exists r > 0,\ B(a, r) \subset A}$$



Fonctions continues

Définition : *Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$, f une application de A dans $\mathbb{R}$ et $a = (x_0, y_0)$ un élément de A. On appelle* ***applications partielles associées à*** *f en (x_0, y_0) les applications $f(., y_0) : x \mapsto f(x, y_0)$ et $f(x_0, .) : y \mapsto f(x_0, y)$. Ces deux applications sont des fonctions d'une seule variable. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on note simplement f_{y_0} et f_{x_0} les applications partielles de f au point (x_0, y_0).*

Définition : *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, f une application de U dans $\mathbb{R}$ et (x_0, y_0) un élément de U. On dit que f est* ***continue au point*** *(x_0, y_0) lorsque :*

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall (x, y) \in A,\ \|(x, y) - (x_0, y_0)\| \leqslant \alpha \Longrightarrow |f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leqslant \varepsilon}$$

On dit que f est ***continue sur*** *U si f est continue en tout point de U.*

Représentation graphique d'une fonction de deux variables

Définition : *Soit $f : (x, y) \to f(x, y)$ une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. L'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que $z = f(x, y)$ est appelée* ***surface représentative*** *de f.*

Remarque : soit f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et $(x_0, y_0) \in U$. La courbe représentative de l'application partielle f_{y_0} est l'intersection du plan d'équation $y = y_0$ et de la surface $z = f(x, y)$. De même, la courbe représentative de l'application partielle f_{x_0} est l'intersection du plan d'équation $x = x_0$ et de la surface $z = f(x, y)$.

Définition : *Soit $k \in \mathbb{R}$. L'intersection d'une surface d'équation $z = f(x, y)$ avec le plan d'équation $z = k$ est appelée* ***ligne de niveau*** *k de la surface.*

■ Dérivées partielles

Définition : *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, f une application de U dans $\mathbb{R}$ et $(x_0, y_0) \in U$. Lorsqu'elles existent et sont finies, on appelle* ***dérivées partielles*** *de f en (x_0, y_0) les limites suivantes :*

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t} \end{aligned}}$$

Remarque : les dérivées partielles en (x_0, y_0) sont égales aux dérivées des applications partielles correspondantes

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f'_{y_0}(x_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f'_{x_0}(y_0)$$

Remarque : l'existence de dérivées partielles en (x_0, y_0) n'entraîne pas la continuité en ce point.

Définition : *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On dit qu'une application f de U dans $\mathbb{R}$ est de* ***classe $\mathcal{C}^1$*** *sur U si f admet des dérivées partielles en tout point a de U et si les applications $a \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(a)$ et $a \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(a)$ sont continues sur U.*

Théorème 25.1.— Développement limité à l'ordre 1 en un point —. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U et $(x_0, y_0) \in U$. Alors f admet un développement limité d'ordre 1 en (x_0, y_0), c'est-à-dire :

$$\boxed{f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \underset{\|(h,k)\| \to 0}{o}(\|(h, k)\|)}$$

Corollaire 25.2.— Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, alors f est continue sur U.

Définition : *Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U. Pour tout $(x_0, y_0) \in U$, on appelle* ***gradient*** *de f en (x_0, y_0) et on note $\nabla f(x_0, y_0)$ le vecteur :*

$$\boxed{\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)}$$

Remarque : d'après le **théorème 25.1**, en notant $< ., . >$ le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^2$, on a

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \langle \nabla f(x_0, y_0), (h, k) \rangle + \underset{\|(h,k)\| \to 0}{o}(\|(h, k)\|)$$

Théorème 25.3.— Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U et $(x_0, y_0) \in U$. Si $\nabla f(x_0, y_0) \neq \overrightarrow{0}$, alors $\nabla f(x_0, y_0)$ est dirigé dans la direction de plus forte pente au point (x_0, y_0).

Définition : *Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U dont le gradient en $(x_0, y_0) \in U$ est non nul. On appelle* ***plan tangent*** *en (x_0, y_0) à la surface représentative de f le plan d'équation :*

$$\boxed{z = f(x_0, y_0) + (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}$$

Remarque : le plan tangent en (x_0, y_0) à la surface représentative de f est le plan passant par (x_0, y_0) et orthogonal à $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right)$.

■ Dérivées partielles et composées

Définition : *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, f une application de U dans $\mathbb{R}$, (x_0, y_0) un point de U et $\vec{h} = (h_1, h_2)$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$. On dit que f* ***est dérivable suivant le vecteur*** *$\vec{h}$ si la fonction $\varphi_{\vec{h}} : t \mapsto f(x_0 + th_1, y_0 + th_2)$ est dérivable en 0. Autrement dit, lorsque cette limite existe et est finie, on a :*

$$\boxed{\varphi'_{\vec{h}}(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + th_1, y_0 + th_2) - f(x_0, y_0)}{t}}$$

Remarque : en particulier, pour $\overrightarrow{e_1} = (1, 0)$ et $\overrightarrow{e_2} = (0, 1)$, on retrouve les dérivées partielles de f en (x_0, y_0)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \varphi'_{\overrightarrow{e_1}}(0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \varphi'_{\overrightarrow{e_2}}(0)$$

Théorème 25.4.— Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U et $(x_0, y_0) \in U$. Alors f admet une dérivée en (x_0, y_0) selon tout vecteur non nul $\vec{h} = (h_1, h_2)$ donnée par :

$$\boxed{\varphi'_{\vec{h}}(0) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \left\langle \nabla f(x_0, y_0), \vec{h} \right\rangle}$$

Définition : *Soit U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$, φ une application de V dans U définie par $\varphi(x, y) = (\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y))$. On dit que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V lorsque les applications φ_1 et φ_2 le sont.*

Théorème 25.5.— Composition des dérivations —.

- Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$, φ une application de I dans $\mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ et telle que $\varphi(I) \subset U$. On suppose que f et φ sont de classe $\mathcal{C}^1$. Alors la fonction $F = f \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et :

$$\boxed{\forall t \in I,\ F'(t) = \varphi'_1(t) \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) + \varphi'_2(t) \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi_1(t), \varphi_2(t))}$$

- Soit U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$, g une application de U dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, φ une application de V dans U définie par $\varphi(x, y) = (\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y))$, où φ_1 et φ_2 sont deux applications de V dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Alors la fonction $f = g \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V et, pour tout $(x_0, y_0) \in V$, on a :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x_0, y_0) \times \frac{\partial g}{\partial x}(\varphi(x_0, y_0)) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x_0, y_0) \times \frac{\partial g}{\partial y}(\varphi(x_0, y_0)) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x_0, y_0) \times \frac{\partial g}{\partial x}(\varphi(x_0, y_0)) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(x_0, y_0) \times \frac{\partial g}{\partial y}(\varphi(x_0, y_0)) \end{aligned}}$$

Remarque : par abus de notations, on écrit souvent

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y} \end{aligned}}$$

■ Extremums

Définition : *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, f une application de U dans $\mathbb{R}$ et $a \in U$. On dit que f admet un*

- ***maximum global** au point a si :*

$$\forall u \in U,\ f(u) \leqslant f(a)$$

- ***maximum local** au point a s'il existe $r > 0$ tel que :*

$$\forall u \in U \cap B(a,r),\ f(u) \leqslant f(a)$$

- ***minimum global** au point a si :*

$$\forall u \in U,\ f(u) \geqslant f(a)$$

- ***minimum local** au point a s'il existe $r > 0$ tel que :*

$$\forall u \in U \cap B(a,r),\ f(u) \geqslant f(a)$$

- ***extremum global** au point a si f admet un maximum ou un minimum global en a ;*
- ***extremum local** au point a si f admet un maximum ou un minimum local en a.*

Remarque : tout maximum global (respectivement minimum global) est également un maximum local (respectivement minimum local) mais la réciproque est fausse.

Théorème 25.6.— Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^2$. Si f admet un extremum local au point $a \in U$, alors :

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0}$$

ce qui s'écrit aussi $\nabla f(a) = \overrightarrow{0}$.

Vocabulaire : *tout point $a \in U$ vérifiant $\nabla f(a) = \overrightarrow{0}$ est appelé **point critique** de f.*

Remarque : la réciproque du **théorème 25.6** est fausse.

Méthodes

Continuité

Méthode 25.1.— Comment prouver la continuité d'une fonction de deux variables

Pour prouver la continuité d'une fonction f :

- on commence par appliquer, là où cela est possible, les résultats généraux (opérations algébriques et composition à partir de fonctions continues) ;
- lorsque ces résultats ne s'appliquent pas en un point (x_0, y_0), on majore $|f(x,y) - f(x_0,y_0)|$ par une fonction qui tend vers 0 lorsque (x,y) tend vers (x_0,y_0). Pour cela, il peut être utile d'introduire des coordonnées polaires de pôle (x_0,y_0).

Exemple : on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\cos\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

• La fonction $(x,y) \mapsto xy$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ (c'est une fonction polynôme), donc sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. La fonction $(x,y) \mapsto x^2+y^2$ est continue sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et ne s'annule qu'en $(0,0)$. Par conséquent, l'application $(x,y) \mapsto \frac{1}{x^2+y^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Comme $t \mapsto \cos t$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit qu'en tant que composée de fonctions continues, $(x,y) \mapsto \cos(\frac{1}{x^2+y^2})$ est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Ainsi, f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ en tant que produit de deux fonctions continues sur cet ensemble.

• Étudions la continuité de f en $(0,0)$. Comme la fonction cosinus est bornée par 1 sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \quad |f(x,y)| \leqslant |xy| \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

ce qui montre que $f(x,y)$ tend vers $0 = f(0,0)$; f est donc continue en $(0,0)$.

• Finalement, f est continue sur $\mathbb{R}^2$ tout entier.

Exemple : soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

• Sur $\mathbb{R}^2$ privé de $(0,0)$, f est continue comme quotient de deux fonctions continues avec un dénominateur qui ne s'annule pas.

• Pour étudier la continuité en $(0,0)$, passons en coordonnées polaires en posant $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. Il vient :

$$f(x,y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r^3\cos\theta\sin^2\theta}{r^2} = \frac{r}{2}\sin\theta\sin(2\theta) \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0$$

ce qui montre que f est continue en $(0,0)$. D'où la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.

Mise en œuvre : exercice 25.1.

■ Applications de classe $\mathcal{C}^1$

❑ Méthode 25.2.— Comment calculer des dérivées partielles

Soit f une fonction de U dans $\mathbb{R}$, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

- Pour calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, on considère y comme un paramètre et on dérive l'expression de $f(x,y)$ par rapport à x.
- Pour calculer $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, on considère x comme un paramètre et on dérive l'expression de $f(x,y)$ par rapport à y.

Exemple : pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x,y) = x^3y + e^{xy^2}$. On a :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2y + y^2e^{xy^2}$$
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^3 + 2xye^{xy^2}$$

Mise en œuvre : la plupart des exercices de ce chapitre !

❑ Méthode 25.3.— Comment appliquer des résultats généraux

Soit f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

- λf est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U ;
- $f+g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U ;
- fg est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U ;
- si g ne s'annule pas sur U, $\frac{f}{g}$ est continue est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U ;
- si φ est de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $\varphi \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

Cela permet d'établir rapidement le caractère $\mathcal{C}^1$ de certaines fonctions.

Exemple : pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x,y) = 3xy - 1$ et $g(x,y) = x^2 + y^2 + 1$. Les fonctions f et g étant polynomiales, elles sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Par conséquent, $f+g$ et fg sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Par ailleurs,

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 + 1 \geqslant 1$$

donc g ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2$. On en déduit que $\frac{f}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exemple : pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$. La fonction $(x,y) \mapsto x^2 + y^2 + 1$ est polynomiale, donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Par ailleurs, elle est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ puisque :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 + 1 \geqslant 1 > 0$$

Or, la fonction $t \mapsto \ln t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ est $\mathbb{R}_+^*$. Par composition, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Mise en œuvre : exercice 25.10, exercice 25.8, exercice 25.11.

❑ Méthode 25.4.— Comment montrer qu'une application est de classe $\mathcal{C}^1$

On procède souvent en deux temps comme pour l'étude de la continuité :

- on commence par appliquer, là où cela est possible, les résultats généraux (opérations algébriques et composition à partir de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, voir la **méthode 25.3**) ;
- lorsque ces résultats ne s'appliquent pas en un point (x_0, y_0), on étudie tout d'abord l'existence de dérivées partielles en (x_0, y_0) en revenant à la définition. Il s'agit de montrer que les limites suivantes existent :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t}$$

On étudie ensuite la continuité des dérivées partielles en (x_0, y_0) en montrant que :

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \text{et} \quad \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Exemple : soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \sin(x \cos y)$. La fonction $(x, y) \mapsto x \cos y$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Comme $t \mapsto \cos t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ est $\mathbb{R}$, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ par composition. Ici, aucun point ne nécessite une étude locale puisque les résultats généraux s'appliquent en tout point. Pour déterminer les dérivées partielles de f en un point quelconque (x, y) de $\mathbb{R}^2$, on dérive f par rapport à x ou à y. On a :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \cos y . \cos(x \cos y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -x \sin y . \cos(x \cos y)$$

Exemple : soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = \begin{cases} f(x, y) = xy \ln(x^2 + y^2) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

• Par produit et composition, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ privé de $(0, 0)$ et on a :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^2 y}{x^2 + y^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x \ln(x^2 + y^2) + \frac{2xy^2}{x^2 + y^2}$$

• On étudie ensuite l'existence de dérivées partielles en $(0, 0)$. Comme $f(t, 0) = f(0, t) = 0$, on a :

$$\frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = 0 \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = 0 \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$$

ce qui montre que f admet des dérivées partielles en $(0, 0)$ données par : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

• Examinons maintenant la continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $(0, 0)$. On passe en coordonnées polaires en posant $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$. En utilisant l'inégalité triangulaire, il vient :

$$\left| y \ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^2 y}{x^2 + y^2} \right| = \left| r \sin \theta \ln r^2 + \frac{2r^3 \cos^2 \theta \sin \theta}{r^2} \right| \leqslant 2|r \ln r . \sin \theta| + r|\cos \theta \sin 2\theta| \underset{r \to 0}{\longrightarrow} 0$$

car $t \ln t \underset{t \longrightarrow 0^+}{\longrightarrow} 0$. On en déduit que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0,0)$. Comme $f(x,y) = f(y,x)$, l'application $\frac{\partial f}{\partial y}$ est également continue en $(0,0)$. Les dérivées partielles de f sont continues en $(0,0)$ et f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Mise en œuvre : exercice 25.10, exercice 25.11.

■ Extremums locaux

❑ Méthode 25.5.— Comment déterminer les extremums locaux d'une application

Pour déterminer les extremums de $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U :

- on recherche les points critiques de f, c'est-à-dire les solutions du système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$$

- Pour tout point critique (a,b), on étudie le signe de $f(x,y) - f(a,b)$. Pour cela, il est souvent commode de se ramener au point $(0,0)$ en posant $u = x - a$ et $v = y - b$.

Exemple : considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2 + (x+y-1)^2 + y^2$.
La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$ (fonction polynomiale en x et y) et, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2(2x+y-1) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 2(x+2y-1) \end{aligned}$$

L'unique point critique de f est le point $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. On se ramène au voisinage de $(0,0)$ en posant $u = x - \frac{1}{3}$ et $v = y - \frac{1}{3}$. On a $f(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$ et :

$$\begin{aligned} f(x,y) - f(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) &= f(u + \frac{1}{3}, v + \frac{1}{3}) - \frac{1}{3} = (u + \frac{1}{3})^2 + (u + v - \frac{1}{3})^2 + (v + \frac{1}{3})^2 - \frac{1}{3} \\ &= u^2 + v^2 + (u+v)^2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, f admet un extremum local en $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, c'est un minimum valant $f(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$. Notons que c'est un minimum **global** puisque l'inégalité ci-dessus est valable sur $\mathbb{R}^2$ tout entier.

Mise en œuvre : exercices 25.12 à 25.17.

■ Équations aux dérivées partielles

❑ **Méthode 25.6.— Comment résoudre une équation aux dérivées partielles**
Pour résoudre une équation aux dérivées partielles vérifiée par une fonction $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ à l'aide d'un changement de variables défini par :

$$u = \varphi_1(x, y) \quad \text{et} \quad v = \varphi_2(x, y),$$

on procède de la façon suivante :

- on calcule les dérivées partielles de f en fonction de celles de la nouvelle fonction inconnue g définie par $g(u, v) = g(\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)) = f(x, y)$. Pour cela, on applique les relations du **théorème 25.5** ;
- on remplace, dans l'équation initiale vérifiée par f, les dérivées partielles de f par leur expression en fonction de celles de g ;
- on résout alors l'équation vérifiée par g ;
- on en déduit les fonctions f solutions de l'équation initiale.

Exemple : à l'aide du changement de variables $u = x + y$ et $v = x - y$, déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f(x, y)$$

Le changement de variables indiqué s'écrit aussi $x = \frac{u+v}{2}$ et $y = \frac{u-v}{2}$. On pose alors $g(u, v) = f(x, y)$, c'est-à-dire $g = f \circ \varphi$, avec $\varphi(u, v) = (\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2})$. La fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ (f et φ le sont). On exprime les dérivées partielles de f en fonction de celles de l'application g en appliquant le **théorème 25.5**. On a :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial g}{\partial v}$$

L'équation vérifiée par f est alors équivalente à $2\frac{\partial g}{\partial u} = g$. Ainsi, f est solution si et seulement si l'application $u \mapsto g(u, v)$ est solution de l'équation différentielle $z' = \frac{z}{2}$. Par conséquent, $g(u, v) = \lambda(v)e^{\frac{u}{2}}$ puisque les solutions de $z' = \frac{z}{2}$ sont les fonctions $t \mapsto \lambda e^{\frac{t}{2}}$. L'application $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ puisque $\lambda(v) = g(0, v)$, avec g de classe $\mathcal{C}^1$. Par conséquent, les solutions de l'équation initiale sont les fonctions de la forme $f : (x, y) \mapsto \lambda(x - y)e^{\frac{x+y}{2}}$, où λ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ quelconque de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Mise en œuvre : exercice 25.18, exercice 25.19, exercice 25.20.

Vrai/Faux

	Vrai	Faux
1. Une boule ouverte est un ouvert.	☐	☐
2. L'application $u \mapsto ||u||$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.	☐	☐
3. Il existe une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ dont la surface représentative est une sphère.	☐	☐
4. Une fonction qui admet des dérivées partielles en (x_0, y_0) est continue en (x_0, y_0).	☐	☐
5. Si le gradient de f en (x_0, y_0) est non nul, il est orthogonal au plan tangent à la surface représentative de f en ce point.	☐	☐
6. Toute fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.	☐	☐
7. Toute fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.	☐	☐
8. Une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant $\frac{\partial f}{\partial x}(a) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$ admet un extremum local en a.	☐	☐
9. Une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ admettant un extremum local en a vérifie $\frac{\partial f}{\partial x}(a) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$.	☐	☐
10. La fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^2 - y^2$ admet un extremum local.	☐	☐

Énoncé des exercices

Continuité, dérivées partielles et applications de classe $\mathcal{C}^1$

Exercice 25.1 : Montrer que les fonctions suivantes, de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

1. $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.
2. $f(x,y) = xy\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0,y) = 0$.
3. $f(x,y) = \dfrac{1-\cos(xy)}{x^2y}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

Exercice 25.2 : Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes
1. $f(x,y) = xye^{\cos x}$ sur $\mathbb{R}^2$
2. $g(x,y) = x^y$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$

Exercice 25.3 : On pose $f(x,y) = \sqrt{y-x^2}$.
1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer le développement limité de f à l'ordre 1 au point $(1,2)$.
3. Donner une équation du plan tangent à la surface représentative de f au point $(1,2)$.

Exercice 25.4 : En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, démontrer le **théorème 25.3**.

Exercice 25.5 : On pose $f(x,y) = \ln(x^2+y^2+2x)$.
1. Déterminer l'ensemble de définition U de f.
2. Déterminer les lignes de niveau de f.
3. Donner une équation du plan tangent à la surface représentative de f en un point quelconque (x_0, y_0) de U.

Exercice 25.6 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0,0) = 0$ et

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},\ f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

1. Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0,0)$.
2. Calculer, pour $x \neq 0$, $f(x,x)$. La fonction f est-elle continue en $(0,0)$?
3. Que peut-on déduire des questions précédentes ?

Exercice 25.7* : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

1. Montrer que f admet une dérivée en $(0,0)$ selon tout vecteur non nul.
2. Calculer, pour $x \neq 0$, $f(x,x^2)$. La fonction f est-elle continue en $(0,0)$?

Exercice 25.8 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et g l'application définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) = f(e^t \cos t, \ln(1+t^2)).$$

Montrer que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée en fonction des dérivées partielles de f.

Exercice 25.9 : Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$u(x,y) = \int_x^y f(t)\,dt.$$

Montrer que u est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et déterminer ses dérivées partielles.

Exercice 25.10* : Étudier la continuité, l'existence et la continuité des dérivées partielles des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ suivantes :

1. $f(x,y) = \dfrac{xy^3}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.
2. $f(x,y) = ||(x,y)||$.

Exercice 25.11 :** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

■ Extremums locaux

Exercice 25.12 : Déterminer les extremums locaux des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

1. $f(x,y) = x^3 + y^3$.
2. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.
3. $f(x,y) = 2y^4 - 3xy^2 + x^2$.
4. $f(x,y) = x^3 - y^2 - x$.

Exercice 25.13* : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = xe^y + ye^x$.

1. Montrer que $(-1,-1)$ est le seul point critique de f.
2. Montrer que la fonction f n'admet pas d'extremum.

Exercice 25.14* : Déterminer le maximum du produit xyz sous les conditions $x+y+z = 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ et $z \geqslant 0$.

Exercice 25.15* : Déterminer les extremums de la fonction $f : (x,y) \mapsto x^2 + y^2 - 2y$ sur l'ensemble $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 \leqslant 1\}$.

Exercice 25.16* : Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x,y) = \sqrt{x^2+(y-1)^2} + \sqrt{(x-1)^2+y^2}$. Déterminer, sans faire de calcul, le minimum de la fonction f.

Exercice 25.17* : Trouver le point du plan $x + 2y - z = 1$ le plus proche de l'origine.

■ Équations aux dérivées partielles

Exercice 25.18 : À l'aide d'un passage en coordonnées polaires, résoudre sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ l'équation :

$$y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

Exercice 25.19* : On souhaite déterminer toutes les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad 2x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - y(1+y^2)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

On considère l'application $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ définie par $\varphi(u,v) = (\frac{u^2+v^2}{2}, \frac{u}{v})$.

1. Montrer que φ est bijective et déterminer son application réciproque.
2. Résoudre l'équation à l'aide du changement de variables $x = \frac{u^2+v^2}{2}$, $y = \frac{u}{v}$.

Exercice 25.20 : Théorème d'Euler**

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ est homogène de degré $\alpha > 0$ lorsque :

$$\forall u \in \mathbb{R}^2,\ \forall t > 0, \quad f(tu) = t^\alpha f(u).$$

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et homogène de degré $\alpha > 0$. Montrer que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \alpha f(x,y). \tag{25.1}$$

2. Réciproquement, montrer qu'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant (25.1) est homogène de degré α.

■■ Indications

Ex. 25.5

Pour la deuxième question, résoudre pour tout $k \in \mathbb{R}$, l'équation $f(x,y) = k$.

Ex. 25.8

Appliquer le **théorème 25.5**.

Ex. 25.9

Introduire une primitive de f.

Ex. 25.13

Pour la question 2, effectuer un développement limité à l'ordre 2 en 0 des fonctions $h \mapsto f(-1+h, -1+h)$ et $h \mapsto f(-1+h, -1-h)$.

Ex. 25.14

Se ramener à une fonction de deux variables à l'aide des contraintes vérifiées par x, y et z.

Ex. 25.15

L'ensemble $\mathcal{D}$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Ex. 25.16

Interpréter la fonction f en termes de distance.

Ex. 25.17

Déterminer la distance d'un point M du plan d'équation $x + 2y - z = 1$ à l'origine.

Ex. 25.20

Si (x, y) est fixé, considérer les fonctions $t \mapsto f(tx, ty)$ pour la première question et $t \mapsto f(tx, ty) - t^{\alpha} f(tx, ty)$ pour la deuxième.

Corrigé des vrai/faux

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
V	V	F	F	F	V	F	F	V	F

1. Une boule ouverte est ouverte, c'est fou ! Soit $B(a,r)$ une boule ouverte de $\mathbb{R}^2$ et x un point de $B(a,r)$. Le réel $r_1 = r - \|x-a\|$ est alors strictement positif. Montrons que la boule ouverte $B(x,r_1)$ est incluse dans $B(a,r)$. Soit $y \in B(x,r_1)$. D'après l'inégalité triangulaire, on a :

$$\|y-a\| \leqslant \|y-x\| + \|x-a\| < \underbrace{r_1 + \|x-a\|}_{r}$$

ce qui montre que y appartient à $B(a,r)$. Ceci étant vrai pour tout élément y de $B(x,r_1)$, on a $B(x,r_1) \subset B(a,r)$. Ainsi, $B(a,r)$ est ouverte.

2. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$. La fonction $(x,y) \mapsto x^2+y^2$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$; la fonction racine carrée est continue sur $\mathbb{R}_+$. Par composition, la norme euclidienne est continue sur $\mathbb{R}^2$.

3. Une sphère a pour équation cartésienne $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = r^2$. Par conséquent, $z = f(x,y)$ ne peut pas être l'équation d'une sphère car, pour certains couples (x,y), il existe deux valeurs de z pour lesquelles (x,y,z) est un point de la sphère.

4. C'est la deuxième remarque qui suit la définition des dérivées partielles en (x_0,y_0). Pour en être convaincu, voir l'**exercice 25.6**.

5. Le plan tangent en (x_0,y_0) à la surface représentative de f passe par (x_0,y_0) et est orthogonal à $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), -1\right)$, qui est un vecteur de l'espace. Le gradient de f en (x_0,y_0) est, lui, un vecteur du plan.

6. C'est le **corollaire 25.2**.

7. La fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = |x|$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ mais elle n'admet pas de dérivée partielle par rapport à x en $(0,0)$ puisque la quantité :

$$\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \frac{|t|}{t} = \text{signe}(t)$$

n'a pas de limite en 0 (la limite à gauche et la limite à droite sont différentes).

8. La réciproque du **théorème 25.6** est fausse. L'application f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^3$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et ses dérivées partielles sont nulles en $1(0,0)$. Cependant, elle n'admet pas d'extremum local en $(0,0)$ puisque $f(x,0) > 0$ pour tout $x > 0$ et $f(x,0) < 0$ pour tout $x < 0$.

9. C'est le **théorème 25.6**.

10. La fonction f est polynomiale, donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. On a :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y$$

donc $(0,0)$ est l'unique point critique de f. Mais $f(0,0) = 0$ et, pour tout $x,y \in \mathbb{R}^*$, on a $f(x,0) > 0$ et $f(0,y) < 0$ donc f n'admet pas d'extremum local en $(0,0)$.

❑ **Erreurs classiques**

- L'existence de dérivées partielles en un point a n'entraîne pas la continuité en a.
- Un extremum local est un point critique mais la réciproque est fausse.

Corrigé des exercices

Exercice 25.1

1. La fonction $(x,y) \mapsto x^3+y^3$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ et la fonction $(x,y) \mapsto x^2+y^2$ est continue et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2$ privé de $(0,0)$. Ainsi, f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Montrons que f est continue en $(0,0)$. On a :

On applique la **méthode 25.1**.

$$|f(x,y)| = \frac{|x^3+y^3|}{x^2+y^2} \leqslant |x|\frac{x^2}{x^2+y^2} + |y|\frac{y^2}{x^2+y^2} \leqslant |x|+|y| \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

donc f est continue en $(0,0)$. D'où la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.

2. Par produit et composition, f est clairement continue sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. Pour étudier la continuité en un point $(0,y_0)$ ($y_0 \in \mathbb{R}$), on écrit :

$$|f(x,y)-f(0,y_0)| = \left|xy\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqslant |xy| \underset{(x,y)\to(0,y_0)}{\longrightarrow} 0$$

ce qui prouve la continuité de f en $(0,y_0)$. Ainsi, f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

3. D'après les résultats généraux, f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. De plus

$$f(x,y) = y\frac{1-\cos(xy)}{x^2y^2} = y\varphi(xy)$$

avec $\varphi(t) = \frac{1-\cos t}{t^2}$. Comme $\varphi(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{2}$, $f(x,y)$ tend vers 0 lorsque (x,y) tend vers $(0,0)$. Par conséquent, f est continue en $(0,0)$ et donc sur $\mathbb{R}^2$. ▲

Exercice 25.2

1. L'application f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ puisque les fonctions $(x,y) \mapsto xy$ et $(x,y) \mapsto e^{\cos x}$ le sont. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (1-x\sin x)ye^{\cos x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xe^{\cos x}$$

2. Comme $g(x,y) = e^{y\ln x}$, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par produit et composition. De plus, pour $(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{x}e^{y\ln x} = yx^{y-1} \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = (\ln x)e^{y\ln x} = x^y \ln x$$

▲

Exercice 25.3

1. La fonction racine carrée étant définie sur $\mathbb{R}_+$, f est définie en tout point (x,y) de $\mathbb{R}^2$ tel que $y-x^2 \geqslant 0$, c'est-à-dire à l'intérieur de la parabole d'équation $y=x^2$, frontière comprise.

2. La fonction $g : (x,y) \mapsto y-x^2$ est polynomiale, donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Par ailleurs, la fonction racine carrée est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et, pour tout (x,y) à l'intérieur de la parabole d'équation $y=x^2$, frontière **non** comprise, $g(x,y) > 0$. Par composition, f est de classe $\mathcal{C}^1$ en tout point intérieur à la parabole d'équation $y=x^2$, frontière non comprise, donc en particulier en $(1,2)$ et on a :

$2-1^2>0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = \frac{-2\times 1}{2\sqrt{2-1^2}} = -1$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = \frac{1}{2\sqrt{2^2-1}} = \frac{1}{2}$$

Par conséquent, une équation du plan tangent à la surface représentative de f en $(1,2)$ est :

$$\begin{aligned} z &= f(1,2) + (x-1)\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) + (y-2)\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) \\ &= 1 + (x-1)\times(-1) + \frac{1}{2}(y-2) = 1 - x + \frac{y}{2} \end{aligned}$$

3. D'après le **théorème 25.1**, le développement limité d'ordre 1 en $(1,2)$ est :

$$\begin{aligned} f(1+h,2+k) &= f(1,2) + h\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) + k\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) + \underset{\|(h,k)\|\to 0}{o}(\|(h,k)\|) \\ &= 1 + h\times(-1) + k\times\frac{1}{2} + \underset{\|(h,k)\|\to 0}{o}(\|(h,k)\|) \\ &= 1 - h + \frac{k}{2} + \underset{\sqrt{h^2+k^2}\to 0}{o}\left(\sqrt{h^2+k^2}\right) \end{aligned}$$

▲

Exercice 25.4

Soit $\vec{u}$ un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^2$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$|\langle \nabla f(x_0,y_0), \vec{u}\rangle| \leqslant \|\nabla f(x_0,y_0)\| \times \|\vec{u}\|$$

✐ $\|\vec{u}\| = 1$

soit $|\langle \nabla f(x_0,y_0), \vec{u}\rangle| \leqslant \|\nabla f(x_0,y_0)\|$. Par conséquent, si $\nabla f(x_0,y_0) \neq \overrightarrow{0}$, le vecteur

$$\vec{u} = \frac{\nabla f(x_0,y_0)}{\|\nabla f(x_0,y_0)|}$$

est un vecteur unitaire pour lequel la dérivée directionnelle est, en valeur absolue, maximale. Autrement dit, lorsque le gradient de f est non nul en (x_0,y_0), il définit la direction dans laquelle f croît le plus vite, et nous avons donc démontré le **théorème 25.3**. ▲

Exercice 25.5

1. Comme la fonction ln est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction f est définie en tout point (x,y) de $\mathbb{R}^2$ tel que $x^2+y^2+2x > 0$. Or,

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2+2x = (x+1)^2 - 1 + y^2$$

✐ *$\mathcal{D}$ a pour équation* $(x+1)^2 + y^2 \leqslant 1$.

Par conséquent, f est définie en tout point (x,y) de $\mathbb{R}^2$ tel que $(x+1)^2+y^2 > 1$, c'est-à-dire à l'extérieur du disque $\mathcal{D}$ de centre $A(-1,0)$ et de rayon 1.

2. Soit (x,y) un point de U (extérieur du disque $\mathcal{D}$) et $k \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} f(x,y) = k &\Leftrightarrow \ln(x^2+y^2+2x) = k \\ &\Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 - 1 = e^k \\ &\Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = 1 + e^k \end{aligned}$$

Les lignes de niveau de f sont donc les cercles centrés en A et de rayon $1+e^k$.

3. On a $f = \ln \circ g$ où g est définie par $g(x,y) = x^2 + y^2 + 2x$. La fonction g est polynomiale donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, en particulier sur U. Comme la fonction ln est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $g(U) \subset \mathbb{R}_+^*$, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U par composition et on a : **Méthode 25.3**

$$\forall (x_0, y_0) \in U,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{2(x_0+1)}{x_0^2 + y_0^2 + 2x_0}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{2y_0}{x_0^2 + y_0^2 + 2x_0}$$

Une équation du plan tangent à la surface représentative de f en $(x_0, y_0) \in U$ est donc donnée par :

$$z = \ln(x_0^2 + 2y_0^2 + 2x_0) + \frac{2(x_0+1)(x-x_0)}{x_0^2 + y_0^2 + 2x_0} + \frac{2y_0(y-y_0)}{x_0^2 + y_0^2 + 2x_0}$$

▲

Exercice 25.6

1. Pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, on a $f(t,0) = f(0,t) = f(0,0) = 0$, donc :

$$\frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = 0 \underset{t\to 0}{\to} 0, \qquad \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = 0 \underset{t\to 0}{\to} 0$$

ce qui montre que f admet des dérivées partielles en $(0,0)$, données par :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

2. On a :

$$\forall x \neq 0, f(x,x) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

Si f était continue en $(0,0)$, on aurait $\lim\limits_{x\to 0} f(x,x) = f(0,0)$, ce qui n'est pas le cas puisque $f(x,x) = \frac{1}{2}$. La fonction f n'est donc pas continue en $(0,0)$.

3. La fonction f admet donc des dérivées partielles en $(0,0)$ mais n'y est pas continue. Cet exercice montre que l'existence de dérivées partielles en un point n'entraîne pas la continuité de la fonction en ce point. ▲

Exercice 25.7

1. On revient à la définition de la dérivée selon un vecteur non nul $\vec{h} = (h_1, h_2)$ en calculant :

Dérivée selon un vecteur non nul quelconque.

$$\frac{f(t\vec{h}) - f(0,0)}{t} = \frac{f(th_1, th_2) - f(0,0)}{t} = \frac{t^2 h_1^2 h_2}{t^2(t^2 h_1^4 + h_2^2)} = \frac{h_1^2 h_2}{t^2 h_1^4 + h_2^2}$$

Lorsque t tend vers 0, cette quantité tend vers 0 si $h_2 = 0$ et h_1^2/h_2 sinon (dans ce cas le dénominateur est équivalent à h_2^2 lorsque t tend vers 0). Ainsi, f admet une dérivée en $(0,0)$ selon $\vec{h}$ donnée par :

$$D_{\vec{h}} f(0,0) = \begin{cases} 0 & \text{si } h_2 = 0 \\ \frac{h_1^2}{h_2} & \text{si } h_2 \neq 0 \end{cases}$$

2. On a :

$$\forall x \neq 0, f(x, x^2) = \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}$$

f admet une dérivée à l'origine selon tout vecteur sans pour autant y être continue.

Si la fonction f était continue en $(0,0)$, on aurait $\lim\limits_{x \to 0} f(x, x^2) = f(0,0)$, ce qui n'est pas possible puisque $f(x, x^2) = \frac{1}{2}$ et $f(0,0) = \frac{1}{2}$. Par conséquent, la fonction f n'est donc pas continue en $(0,0)$. ▲

Exercice 25.8

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $g(t) = f \circ \varphi(t)$, avec $\varphi(t) = (e^t \cos t, \ln(1+t^2))$. La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ puisque les fonctions $t \mapsto e^t \cos t$ et $t \mapsto \ln(1+t^2)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Par composition, g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel t :

Application directe du **théorème 25.5**.

$$g'(t) = e^t(\cos t - \sin t)\frac{\partial f}{\partial x}(e^t \cos t, \ln(1+t^2)) + \frac{2t}{1+t^2}\frac{\partial f}{\partial y}(e^t \cos t, \ln(1+t^2))$$

▲

Exercice 25.9

f est continue, elle admet une primitive.

Introduisons une primitive F de f sur $\mathbb{R}$. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$u(x,y) = \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t = [F(t)]_x^y = F(y) - F(x)$$

Comme F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (f est continue et $F' = f$), u est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et ses dérivées partielles au point (x,y) sont données par :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = -F'(x) = -f(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = F'(y) = f(y)$$

▲

Exercice 25.10

1. • Tout d'abord, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et continue en $(0,0)$ puisque :

$$|f(x,y)| = \left|\frac{xy^3}{x^2+y^2}\right| = |xy|\frac{y^2}{x^2+y^2} \leqslant |xy| \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

Les dérivées partielles en un point $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ sont données par :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^3\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xy^2\frac{3x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

• Étudions maintenant l'existence de dérivées partielles au point $(0,0)$. Comme

$$\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = 0 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$$

f admet des dérivées partielles en $(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

• Enfin, on examine la continuité des dérivées partielles en $(0,0)$. Comme $|y^2 - x^2| \leqslant x^2 + y^2$ et $y^2 \leqslant x^2 + y^2$ on a :

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| = |y|\frac{y^2|y^2-x^2|}{(x^2+y^2)^2} \leqslant |y|\frac{y^2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} \leqslant |y| \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

ce qui montre que l'application $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0,0)$. De même :

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| = |x|\frac{y^2|3x^2+y^2|}{(x^2+y^2)^2} \leqslant |x|\frac{3y^2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} \leqslant 3|x| \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

donc $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue en $(0,0)$. En conclusion, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

2. On a déjà vu dans la partie vrai/faux que la norme euclidienne est continue sur $\mathbb{R}^2$. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. La fonction $(x,y) \mapsto x^2+y^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs positives, et ne s'annule qu'à l'origine. La fonction racine carrée est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composition, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ privé de $(0,0)$. Ses dérivées partielles en $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ valent :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Par ailleurs, f n'admet pas de dérivée partielle par rapport à x en $(0,0)$ puisque la quantité

$$\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \frac{\sqrt{t^2}}{t} = \frac{|t|}{t} = \text{signe}(t)$$

n'a pas de limite lorsque t tend vers 0. De même, f n'a pas de dérivée partielle par rapport à y en $(0,0)$. En résumé, f est continue sur $\mathbb{R}^2$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ mais n'admet pas de dérivées partielles en $(0,0)$. ▲

Exercice 25.11

Notons tout d'abord que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (f est une fraction rationnelle avec un dénominateur qui ne s'annule jamais sur U).

• Les dérivées partielles en un point $(x,y) \in U$ sont données par :

On utilise la **méthode 25.4** *pour montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - xy\frac{4x^2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}.$$

• On étudie maintenant l'existence de dérivées partielles en $(0,0)$:

$$\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = 0 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0,$$
$$\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Par conséquent, f admet des dérivées partielles en $(0,0)$ données par :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

• Montrons maintenant que les dérivées partielles d'ordre 1 sont continues à l'origine (on sait déjà que f est de classe $\mathcal{C}^1$ dans U). À l'aide de l'inégalité triangulaire, on obtient :

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| = |y|\frac{|x^4+4x^2y^2-y^4|}{(x^2+y^2)^2} \leqslant |y|\frac{2x^4+4x^2y^2+2y^4}{(x^2+y^2)^2} \leqslant |y|\frac{2(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\leqslant 2|y| \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0\ ;$$

Par conséquent, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

On montre de la même façon que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. Les dérivées partielles de f sont continues à l'origine et f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

▲

Exercice 25.12

Les fonctions proposées étant polynomiales, elles sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

On recherche les points critiques (points qui annulent en même temps les deux dérivées partielles).

1. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2$$

$(0,0)$ est l'unique point critique de f. Comme $f(x,0) - f(0,0) = x^3$ (qui change de signe avec x), f n'a pas d'extremum.

2. En tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, les dérivées partielles de f sont données par :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y - 3, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y + x - 6$$

L'unique point critique de f est le point $(0,3)$, avec $f(0,3) = -9$. On se ramène au voisinage de 0 en posant $u = x$ et $v = y - 3$:

$$\begin{aligned} f(x,y) - f(0,3) &= f(u, v+3) + 9 \\ &= u^2 + u(v+3) + (v+3)^2 - 3u - 6(v+3) + 9 \\ &= u^2 + uv + v^2 = (u + \frac{v}{2})^2 - \frac{v^2}{4} + v^2 = (u + \frac{v}{2})^2 + \frac{3v^2}{4} \geqslant 0 \end{aligned}$$

Minimum global.

Par conséquent, f admet un minimum local en $(0,3)$ et il vaut $f(0,3) = -9$.

3. Le point $(0,0)$ est l'unique point critique de f puisque :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - 3y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 8y^3 - 6xy$$

On a $f(0,0) = 0$ et, pour $y \neq 0$, $f(0,y) = 2y^4 > 0$ et $f(\frac{3}{2}y^2, y) = -\frac{y^4}{4} < 0$. Par conséquent, f n'admet pas d'extremum.

4. Les dérivées partielles de f au point (x,y) sont égales à :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y$$

ce qui donne deux points critiques $a = (\frac{\sqrt{3}}{3}, 0)$ et $b = (-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0)$, avec

$$f(a) = -2\frac{\sqrt{3}}{9} \quad \text{et} \quad f(b) = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

Pour étudier f au voisinage de ces points, on se ramène à l'origine en posant $u = x - \varepsilon\frac{\sqrt{3}}{3}$ (avec $\varepsilon = \pm 1$) et $v = y$. On a alors :

$$f(x,y) - f(\varepsilon\frac{\sqrt{3}}{3}, 0) = f(u + \varepsilon\frac{\sqrt{3}}{3}, v) + 2\varepsilon\frac{\sqrt{3}}{9} = u^3 + u^2\varepsilon\sqrt{3} - v^2.$$

Notons $g(u,v)$ cette quantité.
• Étude au point a ($\varepsilon = 1$). Pour $u \neq 0$ et $v \neq 0$, on a :

$$g(0,v) = -v^2 < 0, \qquad g(u,0) = u^3 + \sqrt{3}u^2 \underset{u\to 0}{\sim} \sqrt{3}u^2 > 0,$$

ce qui montre que f n'a pas d'extremum local en a.
• Étude au point b ($\varepsilon = -1$). Comme, pour $u \neq 0$, $u^3 - \sqrt{3}u^2 \underset{u\to 0}{\sim} -\sqrt{3}u^2$, $g(u,v) = u^3 - u^2\sqrt{3} - v^2$ est négative au voisinage de $(0,0)$ et f admet un maximum local en b (égal à $\frac{2\sqrt{3}}{9}$). ▲

Exercice 25.13

1. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Les points critiques de f sont les solutions du système :

$$\begin{cases} e^y + ye^x &= 0 \\ xe^y + e^x &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} e^y + ye^x &= 0 \\ e^x(1-xy) &= 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} y &= -e^{y-x} \\ xy &= 1 \end{cases}$$

Toute solution (x,y) est telle que $y < 0$ et $x < 0$ ($xy = 1$). De plus, si $x > y$, on a $y = -e^{y-x} > -1$, donc $x = \frac{1}{y} < -1 < y$, ce qui est absurde. On montre de même qu'aucun couple (x,y) avec $x < y$ n'est solution. Si $x = y$, alors $x = y = -1$. Réciproquement, le couple $(-1,-1)$ est solution. Ainsi, $(-1,-1)$ est l'unique point critique de f. Notons que $f(-1,-1) = -\frac{2}{e}$.
2. Effectuons un développement limité à l'ordre 2 en 0 des fonctions $\varphi : h \mapsto f(-1+h,-1+h)$ et $\psi : h \mapsto f(-1+h,-1-h)$. On a :

$$\begin{aligned}
\varphi(h) &= 2(-1+h)e^{-1+h} = 2e^{-1}(-1+h)(1+h+\frac{h^2}{2} + \underset{h\to 0}{o}(h^2)) \\
&= -\frac{2}{e} + \frac{h^2}{e} + \underset{h\to 0}{o}(h^2) \\
\psi(h) &= (-1+h)e^{-1-h} - (1+h)e^{-1+h} = e^{-1}[(-1+h)e^{-h} - (1+h)e^h] \\
&= e^{-1}[(-1+h)(1-h+\frac{h^2}{2}) - (1+h)(1+h+\frac{h^2}{2}) + \underset{h\to 0}{o}(h^2)] \\
&= -\frac{2}{e} - \frac{3}{e}h^2 + \underset{h\to 0}{o}(h^2)
\end{aligned}$$

Ceci montre que $\varphi(h) + \frac{2}{e} \geqslant 0$ au voisinage de 0 et $\psi(h) + \frac{2}{e} \leqslant 0$ au voisinage de 0. La fonction f n'a donc pas d'extremum en $(-1,-1)$. Il n'y a ainsi aucun extremum. ▲

Exercice 25.14

Le problème est équivalent à trouver le maximum de la fonction définie par

$$f(x,y) = xy(1-x-y)$$

sur $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \geqslant 0, y \geqslant 0, x+y \leqslant 1\}$. L'ensemble $\mathcal{D}$ n'est pas ouvert, il est la réunion de l'ouvert $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 0, x+y < 1\}$ et du triangle ABC, où $A = (0,0)$, $B = (0,1)$ et $C = (1,0)$. La fonction f est

positive sur $\mathcal{D}$ et nulle en tout point de ABC (car, dans ce cas, $x = 0$ ou $y = 0$ ou $x + y = 1$). Ainsi, si f admet un maximum, c'est nécessairement en un point de U. Les points critiques de f sur U sont les solutions du système :

Le **théorème 25.6** *s'applique sur un ouvert.*

$$\begin{cases} y - 2xy - y^2 &= 0 \\ x - 2xy - x^2 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y &= 1 \\ x + 2y &= 1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x &= \frac{1}{3} \\ y &= \frac{1}{3} \end{cases}$$

L'unique point critique est donc $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. On a $f(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{1}{27}$. En appliquant l'inégalité arithmético-géométrique

si $x_1, \ldots, x_n \geqslant 0$ $\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$

$$uvw \leqslant \left(\frac{u + v + w}{3}\right)^3$$

à x, y et $1 - x - y$, on obtient $f(x, y) \leqslant (\frac{x+y+1-x-y}{3})^3 = \frac{1}{27} = f(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ pour $(x, y) \in U$. Ainsi, le maximum vaut $\frac{1}{27}$ et il est atteint pour $x = y = z = \frac{1}{3}$. ▲

Exercice 25.15

Ne pas appliquer le **théorème 25.6** *à $\mathcal{D}$ qui n'est pas ouvert.*

La fonction f est polynomiale donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$. L'ensemble $\mathcal{D}$ n'est pas ouvert, $\mathcal{D}$ est la réunion de la boule ouverte $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 < 1\}$ et du cercle unité $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 + y^2 = 1$. Les dérivées partielles de f en un point (x, y) de U sont :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2(y - 1)$$

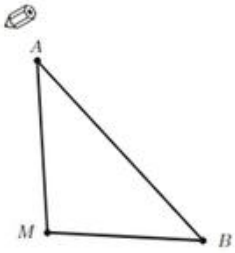
La dérivée partielle selon y ne s'annule pas sur U et, par conséquent, f n'a aucun point critique dans U. Les extremums éventuels ne peuvent donc être atteints que sur $\mathcal{C}$. On paramètre ce cercle en posant $x(t) = \cos t$ et $y(t) = \sin t$. On étudie sur $[0, 2\pi]$ la fonction $g : t \mapsto f(\cos t, \sin t)$. On a :

$$g(t) = \cos^2 t + \sin^2 t - 2\sin t = 1 - 2\sin t$$

ce qui montre que le maximum de g est 3 (atteint pour $t = \frac{3\pi}{2}$) et son minimum est -1 (atteint pour $t = \frac{\pi}{2}$). Par ailleurs, pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$:

- $f(x, y) \leqslant x^2 + y^2 + 2|y| \leqslant 1 + 2$, le maximum de f sur $\mathcal{D}$ est donc 3 et celui-ci est atteint au point $(0, -1)$;
- $f(x, y) \geqslant y^2 - 2y \geqslant -1$ (le minimum de la fonction $y \mapsto y(y - 2)$ sur $[-1, 1]$ est -1), le minimum de f est -1 et celui-ci est atteint en $(0, 1)$. ▲

Exercice 25.16



Dans un repère orthonormé du plan, on considère les points $A(0, 1)$, $B(1, 0)$ et $M(x, y)$. On alors $f(x, y) = MA + MB$. Or, on sait d'après l'inégalité triangulaire que :

$$AB \leqslant MA + MB,$$

avec égalité si et seulement si M appartient au segment $[AB]$. Le minimum de la fonction f est donc la longueur $AB = \sqrt{2}$, et celui-ci est atteint en tout point du segment $[AB]$. ▲

Exercice 25.17

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on note $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x+2y-z=1$. La distance d'un point $M(x,y,z)$ à l'origine est égale à $OM = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Lorsque M appartient à $\mathcal{P}$, $z = x+2y-1$ et :

$$OM^2 = x^2 + y^2 + (x+2y-1)^2$$

Étudions alors les extremums de la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = x^2 + y^2 + (x+2y-1)^2$$

La fonction f étant polynomiale, elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Les dérivées partielles en un point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ sont :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x + 4y - 2$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4x + 10y - 4$$

et l'unique point critique de f est $(\frac{1}{6}, \frac{1}{3})$. On a $f(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}) = \frac{1}{6}$ et, en posant $u = x - \frac{1}{6}$ et $v = y - \frac{1}{3}$, il vient :

$$f(x,y) - \frac{1}{6} = f(u + \frac{1}{6}, v + \frac{1}{3}) - \frac{1}{6} = 2u^2 + 5v^2 + 4uv = 2(u+v)^2 + 3v^2 \geqslant 0.$$

Ainsi, f admet au point $(\frac{1}{6}, \frac{1}{3})$ un minimum global. La distance de O à un point M de $\mathcal{P}$ est donc minimale pour $x = \frac{1}{6}$, $y = \frac{1}{3}$ et $z = \frac{1}{6} + 2.\frac{1}{3} - 1 = -\frac{1}{6}$. Le point de $\mathcal{P}$ le plus proche de l'origine est donc le point $(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{6})$. ▲

Exercice 25.18

On recherche les solutions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. On passe en coordonnées polaires en posant $f(x,y) = g(r,\theta)$, avec $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ ($r > 0$ et $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$). Notons que $\varphi : (r,\theta) \mapsto (x,y)$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^* \times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et que l'on a $g = f \circ \varphi$. Comme f et φ sont de classe $\mathcal{C}^1$, g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et :

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial y} = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}$$
$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial f}{\partial y} = -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}$$

On en déduit que :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \cos\theta\dfrac{\partial g}{\partial r} - \dfrac{\sin\theta}{r}\dfrac{\partial g}{\partial \theta}, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \sin\theta\dfrac{\partial g}{\partial r} + \dfrac{\cos\theta}{r}\dfrac{\partial g}{\partial \theta} \end{cases};$$

d'où : $y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial \theta}$. Ceci signifie que f est solution si et seulement si la fonction g ne dépend pas de θ. Ainsi, $g(r,\theta) = h(r)$, avec h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Les solutions sont les fonctions de la forme $f(x,y) = h(\sqrt{x^2+y^2})$, où h est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. ▲

Exercice 25.19

1. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Le système $\varphi(u,v) = (x,y)$ s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{u^2+v^2}{2} & = & x \\ \frac{u}{v} & = & y \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} u & = & vy \\ \frac{v^2y^2+v^2}{2} & = & x \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} u & = & vy \\ v^2 & = & \frac{2x}{1+y^2} \end{array}\right. ;$$

(x,y) admet un unique antécédent $(u,v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ donné par :

$$u = y\sqrt{\frac{2x}{1+y^2}} \quad \text{et} \quad v = \sqrt{\frac{2x}{1+y^2}},$$

ce qui montre que l'application φ est bijective. On a :

$$\varphi^{-1}(x,y) = \left(y\sqrt{\frac{2x}{1+y^2}}, \sqrt{\frac{2x}{1+y^2}}\right)$$

2. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, on pose $g(u,v) = f(x,y)$, avec $(u,v) = \varphi^{-1}(x,y)$. Ce changement de variable est bijectif d'après ce qui précède. La fonction $g = f \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et :

Il est plus commode ici d'exprimer les dérivées partielles de g à l'aide de celles de f.

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial y} = u\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{v}\frac{\partial f}{\partial y},$$
$$\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial y} = v\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{u}{v^2}\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Alors :

$$u\frac{\partial g}{\partial u} + v\frac{\partial g}{\partial v} = (u^2+v^2)\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\frac{\partial f}{\partial x},$$
$$u\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{u^2}{v}\frac{\partial g}{\partial v} = (\frac{u}{v} + \frac{u^3}{v^3})\frac{\partial f}{\partial y} = y(1+y^2)\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Ainsi, f est solution si et seulement si

$$\frac{u^2+v^2}{v}\frac{\partial g}{\partial v} = 0,$$

g ne dépend que de la seule variable u.

ce qui équivaut à $\frac{\partial g}{\partial v} = 0$. On a donc $g(u,v) = \lambda(u)$, où λ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Les solutions de l'équation sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par :

$$f(x,y) = \lambda\left(y\sqrt{\frac{2x}{y^2+1}}\right),$$

où λ est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. ▲

Exercice 25.20

1. Soit $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ fixé. Pour $t > 0$, on pose $g(t) = f(tu)$. Par composition, la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour $t > 0$, $g'(t) = \alpha t^{\alpha-1} f(u)$ car f est homogène de degré α. Cette dernière relation s'écrit :

On calcule $g'(t)$ à l'aide du **théorème 25.5**.

$$\forall t > 0, \quad x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) + y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty) = \alpha t^{\alpha-1} f(x,y).$$

En appliquant cette relation à $t = 1$, on obtient l'égalité attendue.

2. Soit $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $t > 0$, on pose $h(t) = f(tu) - t^\alpha f(u)$. Par composition, h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et :

Nouvelle application du **théorème 25.5**

$$\forall t > 0, \quad h'(t) = x\frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + y\frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) - \alpha t^{\alpha-1} f(x, y).$$

Comme f vérifie (25.1), on a alors :

$$\begin{aligned}\forall t > 0, \quad th'(t) &= tx\frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + ty\frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) - \alpha t^\alpha f(x, y)\\ &= \alpha f(tx, ty) - \alpha t^\alpha f(x, y) = \alpha h(t).\end{aligned}$$

Ainsi, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $h(t) = Ct^\alpha$, pour tout $t > 0$. Comme $h(1) = 0 = C$, on en déduit que h est la fonction nulle, ce qui montre que $f(tu) = t^\alpha f(u)$. Comme cela est vrai pour tout élément u de $\mathbb{R}^2$, la fonction f est homogène de degré α. ▲

h est solution de $tz' = \alpha z$, dont les solutions sont les fonctions $t \mapsto Ct^\alpha$.

Corrigé

Annexes

FORMULAIRE

■ Trigonométrie

- **Propriété fondamentale de trigonométrie —.** Soit $x \in \mathbb{R}$, alors
  - $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$
  - $1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$ si $x \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$

- **Factorisation d'une somme d'exponentielles —.** Soit $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$, alors
  - $e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2} = 2\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right) e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}$
  - $e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2} = 2i\sin\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right) e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}$

On déduit de ces propriétés, les formules de trigonométrie suivantes.

- **Propriétés de symétrie**
  - $\cos(u) = \cos(v) \iff u \equiv v\ [2\pi]$ ou $u \equiv -v\ [2\pi]$.
  - $\sin(u) = \sin(v) \iff u \equiv v\ [2\pi]$ ou $u \equiv \pi - v\ [2\pi]$.
  - $\tan(u) = \tan(v) \iff u \equiv v\ [\pi]$.

- **Formules d'addition et de duplication**
  - $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
  - $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
  - $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$
  - $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$
  - $\sin 2a = 2\sin a \cos a$
  - $\tan 2a = \dfrac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$

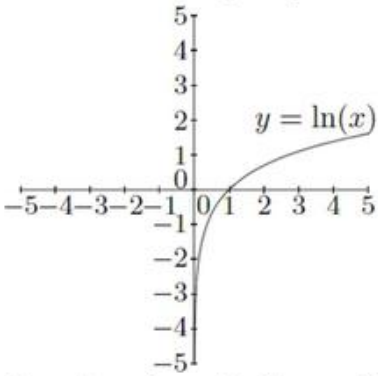
- **Transformations de produits en somme**
  - $\cos a \cos b = \frac{1}{2}\big[\cos(a+b) + \cos(a-b)\big]$
  - $\sin a \sin b = \frac{1}{2}\big[\cos(a-b) - \cos(a+b)\big]$
  - $\sin a \cos b = \frac{1}{2}\big[\sin(a+b) + \sin(a-b)\big]$

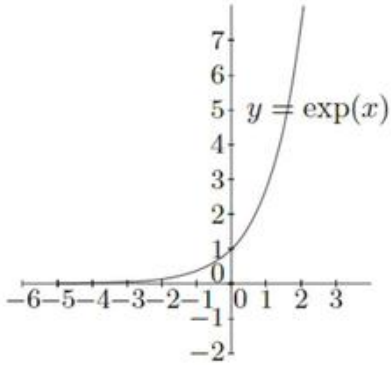
En particulier, lorsque $a = b$, $\cos^2 a = \frac{1}{2}\big[1 + \cos 2a\big]$ et $\sin^2 a = \frac{1}{2}\big[1 - \cos 2a\big]$.

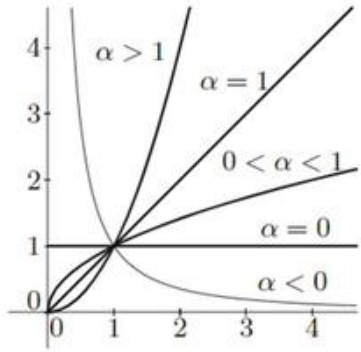
- **Transformations de sommes en produits**
  - $\cos p + \cos q = 2\cos\dfrac{p-q}{2}\ \cos\dfrac{p+q}{2}$
  - $\sin p + \sin q = 2\cos\dfrac{p-q}{2}\ \sin\dfrac{p+q}{2}$
  - $\cos p - \cos q = -2\sin\dfrac{p-q}{2}\ \sin\dfrac{p+q}{2}$
  - $\sin p - \sin q = 2\sin\dfrac{p-q}{2}\ \cos\dfrac{p+q}{2}$

■ Graphes des fonctions usuelles

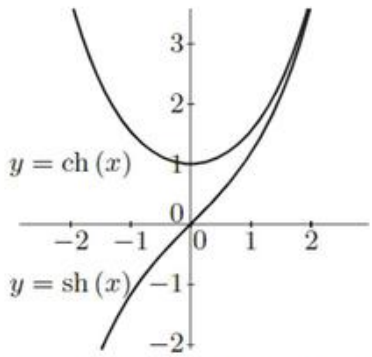
Fonctions ln, exp et puissances



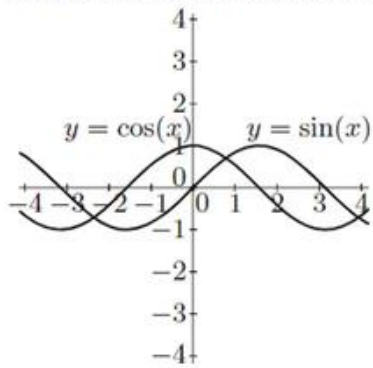


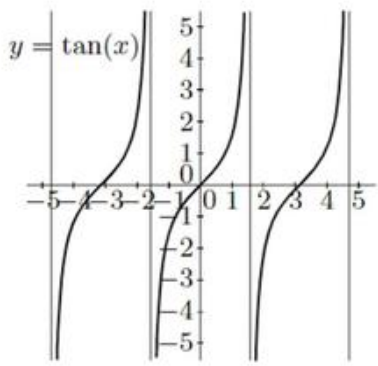


Fonctions hyperboliques directes

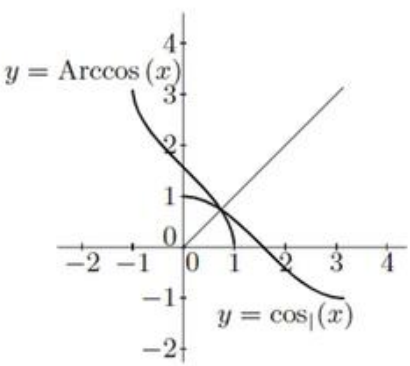


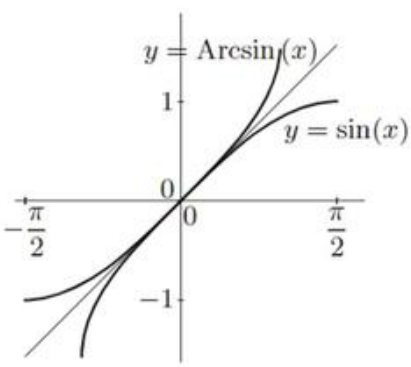
Fonctions circulaires directes

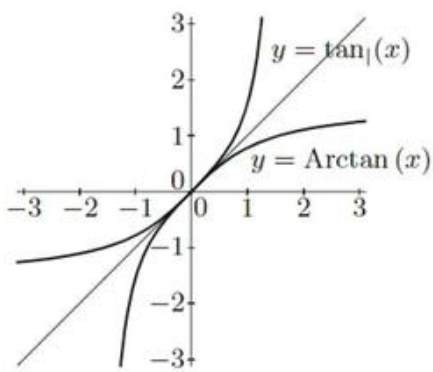




Fonctions circulaires réciproques







■ Dérivées usuelles

Fonction	Expression de la dérivée	Intervalle
$x \mapsto \exp(x)$	$\exp'(x) = e^x$	$x \in \mathbb{R}$
$x \mapsto \ln(x)$	$\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$	$x \in \mathbb{R}^{+\star}$
$x \mapsto p_\alpha(x) = x^\alpha$	$p'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$	$x \in]0, +\infty[$
$x \mapsto \sin(x)$	$\sin'(x) = \cos(x)$	$x \in \mathbb{R}$
$x \mapsto \cos(x)$	$\cos'(x) = -\sin(x)$	$x \in \mathbb{R}$
$x \mapsto \tan(x)$	$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$x \in \mathcal{D}_{\tan}$
$x \mapsto \mathrm{ch}\,(x)$	$\mathrm{ch}\,'(x) = \mathrm{sh}\,(x)$	$x \in \mathbb{R}$
$x \mapsto \mathrm{sh}\,(x)$	$\mathrm{sh}\,'(x) = \mathrm{ch}\,(x)$	$x \in \mathbb{R}$
$x \mapsto \mathrm{Arcsin}\,(x)$	$\mathrm{Arcsin}\,'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in]-1, 1[$
$x \mapsto \mathrm{Arccos}\,(x)$	$\mathrm{Arccos}\,'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in]-1, 1[$
$x \mapsto \mathrm{Arctan}\,(x)$	$\mathrm{Arctan}\,'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$

Dans ce tableau, α désigne un réel quelconque.

■ Primitives usuelles

Fonction	Expression des primitives	Intervalle
$x \mapsto x^\alpha$	$x \mapsto \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$I \subset \mathcal{D}_\alpha$
$x \mapsto e^{cx}$	$x \mapsto \dfrac{1}{c} e^{cx} + C$	$I \subset \mathbb{R}$
$x \mapsto \sin(ax)$	$x \mapsto -\dfrac{1}{a}\cos(ax) + C$	$I \subset \mathbb{R}$
$x \mapsto \cos(ax)$	$x \mapsto \dfrac{1}{a}\sin(ax) + C$	$I \subset \mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto \ln\lvert x\rvert + C$	$I \subset \mathbb{R}^\star$
$x \mapsto \mathrm{ch}(ax)$	$x \mapsto \dfrac{1}{a}\mathrm{sh}\,(ax) + C$	$I \subset \mathbb{R}$
$x \mapsto \tan(x)$	$x \mapsto -\ln\lvert\cos(x)\rvert + C$	$I \subset \mathcal{D}_{\tan}$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sin^2(x)}$	$x \mapsto -\dfrac{1}{\tan(x)} + C$	$I \subset \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$	$x \mapsto \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2-a^2}\right\rvert + C$	$I \cap [-a, a] = \emptyset$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$	$x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right) + C$	$I \subset \mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$x \mapsto \mathrm{Arcsin}\,\dfrac{x}{a} + C$	$I \subset]-a, a[$
$x \mapsto \dfrac{1}{a^2-x^2}$	$x \mapsto \dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{a+x}{a-x}\right\rvert + C$	$I \subset \mathbb{R} \setminus \{\pm a\}$
$x \mapsto \ln(x)$	$x \mapsto x\ln(x) - x + C$	$I \subset \mathbb{R}^{+\star}$
$x \mapsto \dfrac{1}{a^2+x^2}$	$x \mapsto \dfrac{1}{a}\,\mathrm{Arctan}\,\dfrac{x}{a} + C$	$I \subset \mathbb{R}$
$x \mapsto \ln(x)$	$x \mapsto x\ln(x) - x + C$	$I \subset \mathbb{R}^{+\star}$
$x \mapsto \mathrm{sh}\,(ax)$	$x \mapsto \dfrac{1}{a}\mathrm{ch}\,(ax) + C$	$I \subset \mathbb{R}$

Dans ce tableau, $b \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^{+\star}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $c \in \mathbb{R}^\star$ ou $c \in \mathbb{C}^\star$ et C est une constante réelle (ou complexe). Enfin, on a noté $\mathcal{D}_{\tan}$ le domaine de défintion de la fonction tangente : $\mathcal{D}_{\tan} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \not\equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi]\}$ et $\mathcal{D}_\alpha$ le domaine de dérivabilité de la fonction puissance d'exposant α, ($\mathcal{D}_\alpha = \mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{N}$, $\mathcal{D}_\alpha = \mathbb{R}^\star$ si $\alpha \in \mathbb{Z}^-$, $\mathcal{D}_\alpha = \mathbb{R}^{+\star}$ lorsque α est un réel quelconque).

■ Équivalents et développements limités usuels

Équivalents usuels, au voisinage de 0

- $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
- $\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
- $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
- $1-\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$
- $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$
- $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$

Développements limités au voisinage de 0 de fonctions usuelles

- $$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$
- $$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^k + \cdots + x^n + o(x^n)$$
- $$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$
- $$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$
- $$\operatorname{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$
- $$\operatorname{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$
- $$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$
- $$\operatorname{Arctan}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$
- $$\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6), \ \operatorname{cotan}(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{45}x^3 + o(x^4)$$
- $$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{2^{2n-1}(n-1)!n!}x^n + o(x^n)$$
- $$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^n + o(x^n)$$
- $$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

■ Variables aléatoires réelles : lois usuelles

Nom de la loi	Paramètres	Loi de probabilité	Espérance, variance
Loi uniforme $X \rightsquigarrow \mathscr{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$	• $n \in \mathbb{N}^\star$	• $X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$ • $P([X = k]) = 1/n$	• $E(X) = \frac{n+1}{2}$ • $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$
Loi de Bernoulli $X \rightsquigarrow \mathscr{B}(p)$	• $p \in [0, 1]$ • $q = 1 - p$	• $X(\Omega) = \{0, 1\}$ • $P[X = 1] = p$ • $P[X = 0] = q$	• $E(X) = p$ • $V(X) = pq$
Loi hypergéométrique $X \rightsquigarrow \mathscr{H}(N, n, p)$	• $N, n \in \mathbb{N}^\star$, • $p \in [0, 1]$ • $0 < n \leqslant N$ • $Np \in \mathbb{N}$ • $q = 1 - p$	• $X(\Omega) \subset \llbracket 0, n \rrbracket$ • $P[X = k] = \frac{\binom{Np}{k} \times \binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	• $E(X) = np$ • $V(X) = npq\,\frac{N-n}{N-1}$
Loi binomiale $X \rightsquigarrow \mathscr{B}(n, p)$	• $n \in \mathbb{N}^\star$, • $p \in [0, 1]$ • $q = 1 - p$	• $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ • $P[X = k] = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	• $E(X) = np$ • $V(X) = npq$

INDEX DES NOTATIONS

$\overline{\mathbb{R}}$ $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, 66

$\binom{n}{k}$ coefficient du binôme k parmi n, 65

Card (E) nombre d'éléments d'un ensemble E, 593

$\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ ensemble des fonctions continues de I vers $\mathbb{R}$, 289

$\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, 320

$\dim E$ dimension d'un espace vectoriel, 477

$\lfloor x \rfloor$ partie entière d'un réel x, 66

$\mathcal{F}(E, F$ ou F^E ensemble des applications de E dans F, 35

$[\![m, n]\!]$ intervalle d'entiers $[m, n] \cap \mathbb{Z}$, 70

$\operatorname{Im} f$ image d'une application linéaire, 452

$\mathbb{K}[X]$ ensemble des polynômes d'indéterminée X, 379

$\operatorname{Ker} f$ noyau d'une application linéaire, 452

$\mathcal{L}(E)$ ensemble des endomorphismes de E, 452

$\mathcal{L}(E, F)$ ensemble des applications linéaires de E vers F, 452

$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ensemble des matrices de n lignes et p colonnes, 347

$\mathscr{B}(n, p)$ loi binomiale de paramètres n et p, 665

$\mathscr{B}(p)$ loi de Bernoulli de paramètre p, 664

$\mathscr{H}(N, n, p)$ loi hypergéométrique, 665

$\mathscr{U}([\![1, n]\!])$ loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$, 664

$\mathsf{M}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(a)$ matrice représentative d'une application linéaire dans des bases, 505

$\mathsf{M}_{\mathcal{E}}(x)$ matrice représentative d'un vecteur dans une base, 505

$\mathscr{P}(E)$ ensemble des parties d'un ensemble E, 33

$\mathrm{GL(E)}$ ensemble des automorphismes de E, 452

$\mathrm{GL_n}(\mathbb{K})$ ensemble des matrices carrées d'ordre n inversibles, 350

$\sup A$ borne supérieure d'une partie de $\mathbb{R}$, 257

$\mathbb{U}$ ensemble des nombres complexes de module 1, 104

$\mathbb{U}_n$ ensemble des racines n-ièmes de 1, 105

Vect $(\mathcal{A})$ sous-espace vectoriel engendré par une partie, 450

$A \sim B$ B se déduit de A par opérations élémentaires, sur les lignes ou les colonnes, 513

A^T ou ${}^tA$ matrice transposée de A, 347

$DL_n(a)$ développement limité à l'ordre n au voisinage de a, 416

$d^\circ P$ degré d'un polynôme, 379

$f = o_a(g)$ relation de négligeabilité entre fonctions, 415

$f = \mathcal{O}_a(g)$ relation de domination entre fonctions, 415

$F \oplus G$ sous-espaces vectoriels en somme directe, 450

$f \sim_a g$ relation d'équivalence entre fonctions, 415

$PGCD(a, b)$ plus grand commun diviseur de a et b, 34

$PPCM(a, b)$ plus petit commun multiple de a et b, 34

INDEX

algorithme d'Euclide, 38
application linéaire
    automorphisme, 452
    canoniquement associée à une matrice, 506
    caractérisation sur une base, 479
    définition, 452
    endomorphisme, 452
    isomorphisme, 452
    rang, 479
asymptotes, 293

base d'un espace vectoriel, 451, 477
borne
    inférieure d'une partie, 257
    supérieure d'une partie, 257
branches infinies, 293

caractérisation
    séquentielle de la continuité, 287
    des automorphismes, 538
    des bases, 537
    des racines multiples, 380
    matricielle des bases, 505
combinaison linéaire, 450
conjugué d'une nombre complexe, 103
convergence des séries
    à termes positifs
        par équivalents, 715
        par comparaison, 715
    en valeur absolue, 715
    par opérations algébriques, 714
coordonnées selon une base, 451, 477
covariance d'un couple de v.a.r., 654
croissances comparées, 416

dérivée (s)
    des fonctions usuelles, 167, 322
déterminant
    d'une famille de vecteurs, 537
    d'une matrice carrée, 539
    développement par rapport à une ligne ou une colonne, 539
décomposition
    primaire dans $\mathbb{K}[X]$, 381
    en éléments simples, 381
développement limité, 416
    des fonctions usuelles, 420

écart-type d'une v.a.r., 654
égalité des accroissements finis, 319
ensemble ordonné, 257
équation
    auxiliaire, 136
    principale, 136
équations linéaires, 480
équivalents
    de fonctions, 415
    usuels, 416
espace euclidien
    définition, 687
préhilbertien, 687
espace vectoriel
    $\mathbb{K}^n$, 483
    $\mathbb{K}_n[X]$, 483
    $\mathcal{L}(E, F)$, 478
    définition, 449
    de dimension finie, 477
    dimension, 477
événement (s)
    aléatoire, 619
    incompatibles, 619

famille
    génératrice, 451, 477
    libre, 451, 477

famille
liée, 451, 477
orthogonale, 688
orthonormale, 688
famille de vecteurs
base, 482
génératrice, 481
génératrice minimale, 478
libre, 481
libre maximale, 478
fonction
continue en un point, sur I, 160
convexe, 320
de classe $\mathcal{C}^n$, 320
exponentielle, 726
lipschitzienne, 319
fonctions usuelles
dérivées, 322
développement limité de, 420
formes linéaires, 480
formule
de Moivre, 104
de Poincaré, 626
d'Euler, 104
de Bayes, 622
de changement de base, 506
de Huygens, 654
de Poincaré, 635
de Taylor pour les polynômes, 379
des probabilités composées, 621
des probabilités totales, 621
du binôme de Newton, 65
formule de Grassmann, 478

groupe linéaire, 452

homothéties, 453

identité géométrique, 65, 261
inégalité
des accroissements finis, 319
de Bienaymé-Tchebychev, 654, 662
de Cauchy-Schwarz, 688
de Markov, 653
triangulaire, 104
intégrale
d'une fonction continue, 565
d'une fraction rationnelle, 569

limite
à gauche, 287
d'une fonction réelle, 287
théorèmes d'existence, 288
loi
binomiale, 655
de Bernoulli, 655
de probabilité d'une v.a.r. finie, 651
hypergéométrique, 663
loi d'un couple de v.a.r.
loi conjointe, loi du couple, 651
lois marginales, 652

méthode du pivot de Gauss, 137
majorant, 257
matrice
diagonale, 349
élémentaire, 347
d'opération élémentaire, 348
inversible, 349
relation polynomiale, 356
réduite de Gauss, 513
scalaire, 349
semblable, 506
symétrique, 349
triangulaire, 349
mineur, 539
minorant, 257

nombre de succès en n tentatives, 664
norme euclidienne, 687

opérations sur les limites, 259
orthogonal d'une partie, 689
orthonormalisation de Gram-Schmidt, 688
en pratique, 692

partie
bornée, 257
majorée, 257
minorée, 257
partie entière, 66
plus grand élément, 257
plus petit élément, 257
polynôme
annulateur d'une matrice, 356
polynôme scindé, 380
probabilité, 620
conditionnelle, 621

produit scalaire, 687
projecteurs, 453
projection orthogonale, 689
propriété fondamentale de trigonométrie, 67

rang
d'un système échelonné, 136
d'un système d'équations linéaires, 512
d'une application linéaire, 512
d'une famille de vecteurs, 512
d'une matrice, 512
d'une matrice échelonnée, 513
d'une matrice par la méthode de Gauss, 513
résolution d'un système d'équations linéaires
par remontée, 138
par substitution, 138

série
absolument convergente, 715
grossièrement divergente, 713
séries
exponentielles, 726
géométriques, 716
sommation d'une suite géométrique, 261
somme
de Riemann, 566
partielle de rang n d'une série, 713
sous-espace vectoriel
définition, 449
engendré par une partie, 450
somme, 450
supplémentaires, 450
suite
arithmétique, 260
bornée, 258
complexe, 264
convergente, 258
croissante, 258
décroissante, 258
divergente, 258
divergente vers $\pm\infty$, 258
équivalente, 418
extraite, 258
géométrique, 260
majorée, 258
minorée, 258
monotone, 258
dominée, 418
suite
négligeable, 418
récurrente linéaire d'ordre deux, 261
symétries, 453
symétrie orthogonale, 689
système d'équations linéaires, 135, 348
compatible, 135
de Cramer, 350
homogène, 135
homogène associé, 135
incompatible, 135
indéterminé, 135
système complet d'événements, 619

tableau de variations, 165
théorème
de D'Alembert-Gauss, 381
des valeurs intermédiaires, 289
pour fonction strictement monotone, 290
d'existence de limite, 288
de la bijection bicontinue, 290
de la limite de la derivée, 318
des accroissements finis, 319
fondamental du calcul intégral, 223, 568
théorème
d'existence de limite par comparaison, 259
d'existence de limite par encadrement, 259
de la base extraite, 477
de la base incomplète, 477
de la limite monotone, 260
de Pythagore, 689
de Rolle, 319
des gendarmes, 259
du rang, 479
trigonométrie, 74

unicité de la limite, 287

valeur absolue, 66
variable aléatoire
finie, 619, 651
réelle, 619
variables aléatoires réelles
indépendantes, 652
variance d'une v.a.r., 654

Dans la même collection

NOUVEAUX PROGRAMMES !

PRÉPAS SCIENCES

Les ouvrages de la collection ***PRÉPAS** SCIENCES* sont le complément indispensable à la réussite en CPGE. Ils ont été conçus et rédigés par des professeurs enseignant en classes préparatoires dans différents lycées de notre pays. Leur contenu a été discuté et pensé avec soin pour permettre la meilleure adéquation avec les attentes et les besoins des étudiants en CPGE.

Pour intégrer, il faut assimiler le cours, en connaître les points fondamentaux et savoir le mettre en application dans des exercices ou des problèmes souvent ardus. Cette collection est conçue pour répondre à ces difficultés. Dans chaque chapitre, correspondant à peu près à une semaine de cours, vous trouverez :

- **Le résumé de cours**
  Il vous permettra d'accéder à une connaissance synthétique des notions.
- **Les méthodes**
  Elles vous initieront aux techniques usuelles qu'il faut savoir mettre en place.
- **Le vrai/faux**
  Il testera votre compréhension du cours et vous évitera de tomber dans les erreurs classiques.
- **Les exercices, avec des indications**
  Souvent tirés d'annales de concours, ils vous entraîneront aux écrits comme aux oraux.
- **Les corrigés**
  Toujours rédigés avec soin, ils vous aideront à progresser dans la résolution d'exercices.

Ainsi, avec un seul livre par année et par matière, la collection ***PRÉPAS** SCIENCES* vous permettra de surmonter les colles, d'affronter les devoirs, et elle vous guidera, jour après jour, dans votre cheminement vers la **réussite aux concours**.

www.editions-ellipses.fr
9 782340 048515